DEFINIÇÃO

Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado e $\{\xi_j\}_{j\in N}$ uma sequência em $\mathcal{N}$.

- Dizemos que a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \xi_j$ converge em $\mathcal{N}$ se a sequência das somas parciais $\{\sum_{j=1}^{n} \xi_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente.
- Dizemos que a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \xi_j$ é absolutamente convergente se a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \|\xi_j\|$ é convergente.

$$\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N} \rightsquigarrow \forall n\in\mathbb{N} \hookrightarrow S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \in \mathcal{N}$$

$\{S_n\} \subset \mathcal{N}$ Pergunta:

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{N}} \xi \in \mathcal{N} \, ?$$

Notação $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \xi_j = \text{"}\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\text{"}$

$$\rightsquigarrow \boxed{S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \doteq \forall \epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}; \quad n\geq n_0 \Rightarrow \left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j - \xi\right\| < \epsilon}$$

$(*)$ $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j$ conv. $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N};$

$$\left\|\sum_{j=n}^{m} \xi_j\right\| < \epsilon, \quad \forall n,m \geq n_0$$

DEFINIÇÃO

Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado e $\{\xi_j\}_{j\in N}$ uma sequência em $\mathcal{N}$.

- Dizemos que a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \xi_j$ converge em $\mathcal{N}$ se a sequência das somas parciais $\{\sum_{j=1}^{n} \xi_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente.
- Dizemos que a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \xi_j$ é absolutamente convergente se a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \|\xi_j\|$ é convergente.

" $\sum_{j\in\mathbb{N}} \xi_j$ "

$\sum_{j\in\mathbb{N}} \|\xi_j\|$ série em $\mathbb{R}$

$x_j \doteq \|\xi_j\| \in \mathbb{R}$

TEOREMA

Um espaço normado $\mathcal{N}$ é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente em $\mathcal{N}$ é convergente.

Dem: ($\Rightarrow$) Suponha $\mathcal{N}$ é Banach e seja $\sum_{j\in\mathbb{N}} \xi_j$ abs. conv.

$\sum_{j\in\mathbb{N}} \|\xi_j\|$ converge: $\forall \epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$; $\sum_{j=m+1}^{n} \|\xi_j\| < \epsilon$ $\forall n,m \geq n_0$ (*)

Dados $n,m\in\mathbb{N}$, $n \geq m$:

$$\|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j - \sum_{j=1}^{m} \xi_j\right\| = \left\|\sum_{j=m+1}^{n} \xi_j\right\|$$

$$\leq \sum_{j=m+1}^{n} \|\xi_j\| \quad (**)$$

Assim, dado $\epsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$;

$$\|S_n - S_m\| < \epsilon, \quad \forall n,m \geq n_0$$

(*) e (**)

$\Rightarrow \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N$ é de Cauchy.

Como N é Banach, então

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{N} \xi \in N$$

($\Leftarrow$) Assuma que Abs. conv. $\Rightarrow$ Conv.

Tome $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset N$ de Cauchy

$$\boxed{\forall \epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N};\ \|\xi_n-\xi_N\|<\epsilon,\ \forall n\geq N}$$

- Para $\epsilon = 1/2$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$;

$$\|\xi_n-\xi_{n_1}\|<1/2,\ \forall n\geq n_1$$

- Para $\epsilon = 1/2^2$, $\exists n_2\in\mathbb{N}$, $n_2>n_1$;

$$\|\xi_n-\xi_{n_2}\|<1/2^2,\ \forall n\geq n_2$$

Indutivamente, $\{\xi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\forall k \geq 2, \quad \| \xi_n - \xi_{n_k} \| \leq 1/2^k, \quad \forall n \geq n_k$$

$$\underline{n_k > n_{k-1}}$$

!!

$$\| \xi_{n_k} - \xi_{n_{k-1}} \| \leq 1/2^{k-1}, \quad k \geq 2$$

Note que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \| \xi_{n_k} - \xi_{n_{k-1}} \| \leq \sum_{k=2}^{\infty} 1/2^{k-1} < +\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} (\xi_{n_k} - \xi_{n_{k-1}})}_{\Rightarrow\ \text{é conv.} (=y)} \text{ é abs. conv.}$$

Mas

$$\xi_{n_k} = \xi_{n_1} + \overbrace{\sum_{l=2}^{k} (\xi_{n_l} - \xi_{n_{l-1}})}$$

(Tomando $k \to \infty$)

$$\eta = \xi_{n_1} + y$$

$\Rightarrow \{\xi_{n_K}\}_{K \in \mathbb{N}}$ é convergente

Note que: Dado $\epsilon > 0$, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$;

$$\|\xi_n - \xi_m\| < \epsilon/2 \,, \quad \forall\, n, m \geq N_1$$

$$\|\xi_{n_K} - \eta\| < \epsilon/2 \,, \quad \forall\, K \geq N_2$$

Assim, tomando $M = \max\{N_1, N_2\}$:

$$\|\xi_n - \eta\| = \|\xi_n - \xi_{n_K} + \xi_{n_K} - \eta\|$$

$$\leq \|\xi_n - \xi_{n_K}\| + \|\xi_{n_K} - \eta\|$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2$$

$$= \epsilon, \quad \forall\, n \geq M$$

$$\Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \eta$$

Para $1 \leq p < \infty$ temos em ℓ^p a base de Schauder $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, na qual $e_n = \{e_{n,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e

$$e_{n,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = j, \\ 0, & \text{se } n \neq j. \end{cases}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}$$

$(\ell^p, \|\cdot\|_p)$

$\{e_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$

$\rightarrow e_m \in \ell^p, \ \forall m \in \mathbb{N}$

$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$

$\vdots$

$\{e_m\}$ é uma base de S. em ℓ^p $(1 \leq p < +\infty)$

De fato: Tome $\eta \in \ell^p$, ou seja,

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots)$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$S_m \doteq \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\eta_j}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{e_j}_{\in \ell^p} \in \ell^p$$

Note que $\|\eta - S_m\|_p^p = \sum_{j=m+1}^{\infty} |\eta_j|^p$

$$S_m = \sum_{j=1}^{m} \eta_j e_j = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_m e_m$$

$$= \underbrace{(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, 0, 0, 0, \dots)}$$

$\eta - S_m = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}, \dots) -$

$$\eta - S_n = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \eta_{n+1}, \dots) - \downarrow$$

$$= (0, 0, \dots, 0, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots)$$

Com $\eta \in \ell^p$, então Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$;

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\eta_j|^p < \varepsilon^{1/p}$$

ou seja $\|\eta - S_n\|_p < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad S_n \longrightarrow \eta$$

TEOREMA

Seja $\mathcal{N}$ um espaço de dimensão finita.

(a) Todas as normas definidas em $\mathcal{N}$ são equivalentes.

(b) $\mathcal{N}$ é completo com qualquer norma.

(c) Qualquer subconjunto fechado e limitado de $\mathcal{N}$ é $\boxed{\text{compacto.}}$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Completos!!

- $\mathbb{K}^n$ é completo!!!

$\mathbb{K}^n \rightsquigarrow$ Norma do máximo

$\{x_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n$ seq. de Cauchy

$$x_\ell \doteq (x_1^\ell, x_2^\ell, \dots, x_n^\ell) \in \mathbb{K}^n$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\hookrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \\ \qquad \|x_\ell - x_m\|_{\mathbb{K}^n} < \varepsilon, \ \forall \ell, m > n_0 \end{array} \right.$$

⊛ Cada seq $\{x_j^\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$, $\ell = 1, \dots, n$

é de Cauchy em $\mathbb{K}$

$$x_1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$$
$$x_2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)$$
$$x_3 = (x_1^3, \dots, x_n^3)$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$y := (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

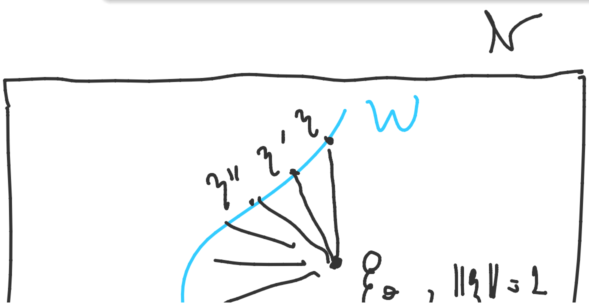
$$x_\ell \xrightarrow{\mathbb{K}^n} y$$

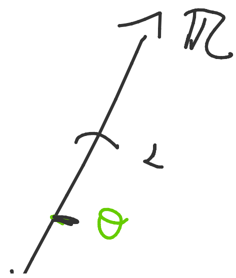
$$\boxed{\begin{array}{c} T : \mathcal{N} \to \mathbb{K}^n \\ \text{Isom. sob.} \end{array}}$$

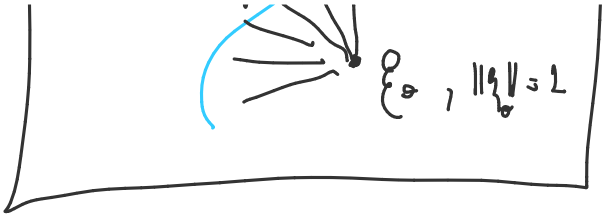
LEMA (DE RIESZ)

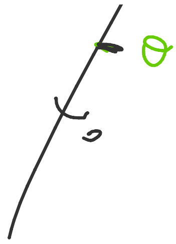
Seja $\mathcal{W}$ um subespaço próprio e fechado de uma espaço normado $\mathcal{N}$. Então, para cada $\theta \in]0, 1[$ existe $\xi_\theta \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{W}$ com $\|\xi_\theta\| = 1$ tal que

$$\inf_{\eta \in \mathcal{W}} \|\xi_\theta - \eta\| \geq \theta.$$









Lema (de Riesz)

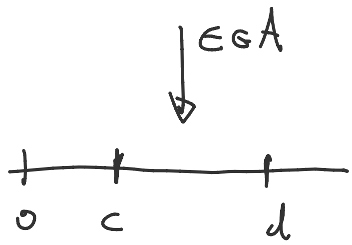
Seja $\mathcal{W}$ um subespaço próprio e fechado de uma espaço normado $\mathcal{N}$. Então, para cada $\theta \in]0,1[$ existe $\xi_\theta \in \mathcal{N}\setminus\mathcal{W}$ com $\|\xi_\theta\| = 1$ tal que

$$\inf_{\eta\in\mathcal{W}} \|\xi_\theta - \eta\| \geq \theta.$$

$A = \{ \|\eta - x\|, \eta \in W \}$

Tome $x \in N/W$ e defina

$$c \doteq \inf_{\eta \in W} \|\eta - x\| > 0$$



Se $d > 0$, então $\exists\, w \in W$;

$$0 < c \leq \|x - w\| \leq d$$

Defina

$$\xi \doteq \frac{x - w}{\|x - w\|}$$

$$\|\xi\| = 1$$

$$\xi \notin W$$

Dado $\eta \in W$:

$$\|\xi - \eta\| = \left\| \frac{x-w}{\|x-w\|} - \eta \right\| = \frac{1}{\|x-w\|} \| x - \underbrace{(w + \eta\|x-w\|)}_{\in W} \|$$

$$\geq \frac{1}{\|x-w\|}\, c \geq \frac{c}{d}$$

ou seja,

$$\|\xi - \eta\| \geq c/d \,, \quad \forall\, \eta \in W$$

Assim, dado $0 < \theta < 1$, ponha $d = c/\theta$

$$\Rightarrow \quad \|\xi - \eta\| \geq \theta \,, \quad \forall\, \eta \in W$$

$$\Rightarrow \quad \inf_{\eta \in W} \|\xi - \eta\| \geq \theta$$

TEOREMA

Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado. A bola fechada $\overline{B}_1(0)$ é compacta se, e somente se, $\mathcal{N}$ tem dimensão finita.

Afirmação: Se $\dim N = +\infty \Rightarrow \overline{B_1(0)}$ não é comp.

Tome $\xi_1 \in \overline{B_1(0)}$, com $\|\xi_1\| = 1$

$\Rightarrow \xi_1 \neq 0 \Rightarrow W_1 = \text{ger}\{\xi_1\}$ (esp. vet. dim $< +\infty$ $\Rightarrow$ é fechado)

Lema de R.

Tomando $\theta = 1/2$, existe

$\xi_2 \notin W_1$, $\|\xi_2\| = 1$ e

$$\|\xi_1 - \xi_2\| \geq 1/2$$

$W_2 \doteq \text{ger}\{\xi_1, \xi_2\}$ (sub. fech)

$\theta = 1/2$, $\exists\ \xi_3 \notin W_2$;

$\|\xi_3\| = 1$ e

$$\|\xi_3 - \xi_1\| \geq 1/2 \ \text{e}\ \|\xi_3 - \xi_2\| \geq 1/2$$

$\boxed{\ldots}$ $\exists\ \{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)}$, $\|\xi_j\| = 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$

e

$$\|\xi_j - \xi_k\| \geq 1/2, \quad \forall\ j \neq k$$

$\Rightarrow \{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ não possui sub. conv.

TEOREMA

Seja $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear entre espaços normados. São equivalentes:

(a) $\sup_{\|\eta\|_1 \leq 1} \|T\eta\|_2 < \infty$.

(b) Existe $C > 0$ tal que $\|T\xi\|_2 \leq C\|\xi\|_1$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$.

(c) T é uniformemente contínuo.

(d) T é contínuo.

(e) T é contínuo em 0.

(a) $\Rightarrow$ (b)

$C \doteq \sup_{\|\eta\|_1 \leq 1} \|T\eta\|_2$. Dado $\xi \neq 0 \Rightarrow$

$$\left\| T\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right) \right\| \leq C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|\xi\|} \|T(\xi)\| \leq C \Rightarrow \|T(\xi)\| \leq C\|\xi\|$$

$\|\eta\|$

(b) $\Rightarrow$ (c) Dados $\xi, \eta \in \mathcal{N}_1$: $\|T\xi - T\eta\|_2 = \|T(\xi-\eta)\|_2 \leq C\|\xi-\eta\|_1$

(c) $\Rightarrow$ (d) Exercício

(d) $\Rightarrow$ (e) OK

TEOREMA

Seja $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear entre espaços normados. São equivalentes:

(a) $\sup_{\|\eta\|_1 \leq 1} \|T\eta\|_2 < \infty$.

(b) Existe $C > 0$ tal que $\|T\xi\|_2 \leq C\|\xi\|_1$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$.

(c) T é uniformemente contínuo.

(d) T é contínuo.

(e) T é contínuo em 0.

(e) $\Rightarrow$ (a) (Exercício)