Aula 5 - 24_01- Operadores lineares limitados

segunda-feira, 24 de janeiro de 2022 09:35

Note que $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço vetorial munido das operações usuais.

$T, S \in B(N_1, N_2)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$(T+S): N_1 \to N_2$,

$\eta \mapsto (T+S)(\eta) = T(\eta) + S(\eta)$

$\lambda \cdot T: N_1 \to N_2$

$\eta \mapsto (\lambda T)(\eta) = \lambda T(\eta)$

$\rightsquigarrow (\lambda \cdot T + S) \in B(N_1, N_2)$

$B(N_1, N_2) \ni T \longmapsto \|T\|_{B(N_1,N_2)} = \sup_{\eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1}$

TEOREMA

Para cada $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ defina

$$\|T\|_{B(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)} = \sup_{\eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1}.$$

(a) $\|\cdot\|_{B(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)}$ é uma norma em $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.

(b) Valem as igualdades

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \inf_{\eta \in \mathcal{N}_1} \{C > 0;\ \|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1\}.$$

(c) Se $\mathcal{N}_2$ é um espaço de Banach, então $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é Banach.

É uma norma em $B(N_1, N_2)$

$\to (B(N_1, N_2), \|\cdot\|_B)$

$\to \|T\|_B \doteq \sup_{\eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1}$

- Se $T \in B(N_1, N_2) \to \exists\ C > 0;\ \|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1$

$$\Rightarrow \forall \eta \neq 0 \quad \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_2} \leq C \quad \Rightarrow \exists \sup_{\eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1}$$

$\Rightarrow$ Prop. de Norma

(1) $\|T\|_B \geq 0$ e $\|T\|_B = 0 \Leftarrow T \equiv 0$

(2) $\|\lambda \cdot T\|_B = |\lambda| \, \|T\|_B$

(3) Triangular

Tome $T, S \in B(N_1, N_2)$. Fixado $\eta \in N_1$:

$$\|(T+S)(\eta)\| = \|T\eta + S\eta\|_2 \leq \|T\eta\|_2 + \|S\eta\|_2$$

$$\Rightarrow \sup_{\eta \neq 0} \frac{\|T(\eta) + S(\eta)\|}{\|\eta\|} \leq \sup_{\eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|}{\|\eta\|} + \sup_{\eta \neq 0} \frac{\|S\eta\|}{\|\eta\|}$$

$$\Downarrow$$

$$\|T+S\|_B \leq \|T\|_B + \|S\|_B$$

TEOREMA

Para cada $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ defina

$$\|T\|_{B(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)} = \sup_{\eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1}.$$

(a) $\|\cdot\|_{B(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)}$ é uma norma em $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.

(b) Valem as igualdades

Exercício

$$\left[\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \inf_{\eta \in \mathcal{N}_1} \{C > 0;\ \|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1\}. \right]$$

(c) Se $\mathcal{N}_2$ é um espaço de Banach, então $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é Banach.

Tome $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(N_1, N_2)$ uma seq. de Cauchy:

Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$;

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \|T_n - T_m\|_B \leq \epsilon$$

$\rightarrow$ Fixado $x \in N_1$, temos

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_2 = \|(T_n - T_m)(x)\|_2$$

$$\leq \|T_n - T_m\|_B \, \|x\|_2$$

Se $n, m \geq n_0$

$$\Rightarrow \quad \|T_n(x) - T_m(x)\|_2 \leq \epsilon \|x\|_2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}}_{} \subset N_2$$

$\hookrightarrow$ seq. de Cauchy, para cada $x \in N_1$

Como N_2 é Banach: existe y .

$\Rightarrow$ Como N_2 é Banach: Existe y_x;

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = y_x$$

⊛ Defina $T: N_1 \to N_2$ pondo

$$Tx = \lim_{n\to+\infty} T_n(x) = y_x$$

Exi (I) T é linear

(II) $T \in B(N_1, N_2)$

(III) $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{B} T$

(II): Note que

- $$\|Tx\|_2 = \Big\| \lim_{n\to+\infty} T_n(x) \Big\|_{N_2} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\|_2$$

- Como $\{T_n\}$ é de Cauchy, então

é limitada, ou seja, $\exists\ M > 0$;

$$\|T_n\|_B \leq M, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

$T_n \in B$

Assim $$\|Tx\|_2 = \lim_n \|T_n x\|_2 \leq \lim_n \|T_n\| \cdot \|x\|_1$$

$$\leq M \cdot \|x\|_1$$

$$\Rightarrow x \neq 0: \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < +\infty$$

$$\Rightarrow T \in B(N_1, N_2)$$

(II) $\quad T_n \xrightarrow[n\to\infty]{B} T$

Note que: $$\|T_n - T\|_B = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_n(x) - Tx\|_2}{\|x\|_1}$$

[Relembrando

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$; $\|T_n - T_m\|_B < \varepsilon$, $\quad n, m \geq n_0$]

[Relembrando: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \|T_n - T_m\|_B < \varepsilon$ $\quad n, m \geq n_0$]

$\Rightarrow$ Dado $x \in N_2$: $\quad \|T_n(x) - T_m(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_2 \quad , \; n, m \geq n_0$

↳ Fixando n e Tomando o limite em m:

$$\Rightarrow \lim_{m \to +\infty} \|T_n(x) - \underbrace{T_m(x)}_{m \to +\infty}\| \leq \varepsilon \|x\|_2 \quad , \; n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon \|x\|_2$$

$$\Rightarrow \forall x \neq 0 : \quad \frac{\|(T_n - T)(x)\|_2}{\|x\|_2} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T_n - T)(x)\|_2}{\|x\|_2} \leq \varepsilon$$

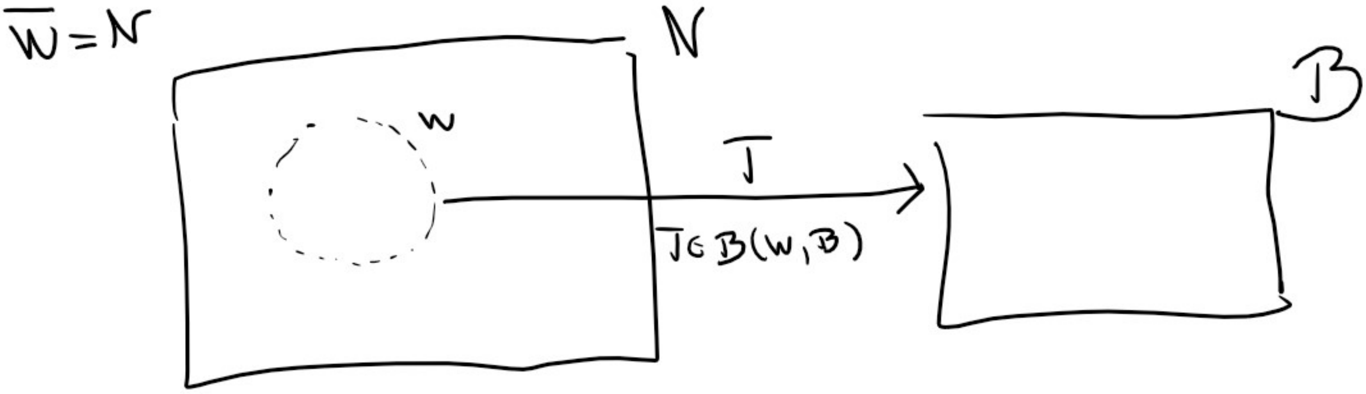
$$\Updownarrow$$

$$\|T_n - T\|_B \leq \varepsilon \quad , \; n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \quad T_n \to T \text{ em } \mathcal{B}$$

TEOREMA (EXTENSÃO CONTÍNUA)

Sejam $T : W \to \mathcal{B}$ um operador linear limitado, no qual $W \subset \mathcal{N}$ é um subespaço denso. Nestas condições T possui uma única extensão $\widetilde{T} \in B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$. Além disso, temos $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.



$$\tilde{T} : N \to B$$

IDEIA: $\eta \in N$. Com $\overline{W} = N$, existe

$$\{\eta_n\} \subset W; \quad \eta_n \xrightarrow{N} \eta$$

Note que $\|T\eta_n - T\eta_m\|_2 \leq \|T\|_{B(W,B)} \cdot \|\eta_n - \eta_m\|_1$

Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$; $\|\eta_n - \eta_m\|_1 < \epsilon / \|T\|$

$$\Rightarrow \|T\eta_n - T\eta_m\|_2 \leq \epsilon, \quad n, m \geq n_0$$

$\Rightarrow \{T\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ é uma seq. de Cauchy

BANACH

$\exists\, y_\eta \in B$; $T\eta_n \xrightarrow{B} y_\eta$

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{T} : N \to B \\ \quad \eta \longmapsto y_\eta \end{array}\right.$$

- O operador integral $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ dado por

$$(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\, ds,$$

é um operador limitado e $\|T\| = 1$.

$Tx \in C[0,1]$

Dados $x \in C[0,1]$ e $t \in [0,1]$

$$|Tx(t)| \leq \int_0^t |x(s)|\, ds \leq \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|x\|_\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{t\in[0,1]} |Tx(t)| \leq \|x\|_\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{t\in[0,1]} \left| \int x(t) \right| \leq \|x\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_\infty \leq \|x\|_\infty \Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 1$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq 1$$

$$\boxed{\text{Tome } x \equiv 1 \Rightarrow \|Tx\|_\infty = 1}$$

é contínuo.

- Considere $T : C[-1,1] \to \mathbb{K}$, dado por $Tf = f(0)$, e assuma $C[-1,1]$ munido da norma da integral. Neste caso, T não é limitado.

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt$$

$$\psi \in C[-1,1] \;;\; \psi(-1) = 0 \;\text{ e }\; \psi(0) \neq 0$$

$$n \geq 1 \rightsquigarrow \psi_n(t) = \begin{cases} \psi(nt), & |t| \leq 1/n \\ 0, & |t| > 1/n \end{cases}$$

$$\to \|\psi_n\|_1 = \int_{-1}^{1} |\psi_n(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} |\psi(nt)|\, dt = \frac{1}{n} \|\psi\|_1$$

$$\lim \|\psi_n\|_1 = 0$$

$n \to \infty$

MAS $T\varphi_n = \varphi_n(0) = \varphi(0) \neq 0$

- O dual de $\mathbb{R}^n$ é $\mathbb{R}^n$.
- O dual de ℓ^1 é ℓ^∞.
- Para $1 < p < \infty$, o dual de ℓ^p é ℓ^q, sendo $1/p + 1/q = 1$.

$$(\mathbb{R}^n)^* = B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$(\mathbb{R}^n)^* \text{ "}=\text{" } \mathbb{R}^n \qquad w_f = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

Dado $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\exists$ um único $w_f \in \mathbb{R}^n$;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j = \langle w, x \rangle$$

$$\Psi : (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f \longmapsto w_f$$

(1) é linear e bijetiva!!!

Note que, dados $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ e $x \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x)| \leq \|x\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|w_f\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\therefore \quad \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} \leq \|w_f\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_{(\mathbb{R}^n)^*} \leq \|w_f\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_{(\mathbb{R}^n)^*} \leq \|\varphi f\|_{\mathbb{R}^n}$$

Além disso, para $x = w_f$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} = \frac{|f(w_f)|}{\|w_f\|} = \frac{\|w_f\|^2}{\|w_f\|} = \|w_f\|$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = \|\varphi f\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\varphi : (\ell^p)^* \to \ell^q$$

- O dual de $\mathbb{R}^n$ é $\mathbb{R}^n$.
- O dual de ℓ^1 é ℓ^∞.
- Para $1 < p < \infty$, o dual de ℓ^p é ℓ^q, sendo $1/p + 1/q = 1$.

$$\|x\|_{\ell^1} = \sum_{j=1} |x_j| \quad e \quad \|x\|_{\ell^\infty} = \sup |x_j|$$

$\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^1$ base de Sch.

Únicos!!!

$\hookrightarrow \forall x \in \ell^1 \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k$

$f : \ell^1 \to \mathbb{K}$

Tome $f \in (\ell^1)^*$, Defina $\eta_k \doteq f(e_k)$

$$\Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) \overset{!!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \eta_k$$

Note que $\|e_k\|_{\ell^1} = 1$, $\forall k$. Assim

$$|\eta_k| = |f(e_k)| \leq \|f\|_{(\ell^1)^*} \cdot \|e_k\|_{\ell^1} = \|f\|_{(\ell^1)^*}$$

$$\Rightarrow |\eta_k| \leq \|f\|_{(\ell^1)^*}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad |\eta_k| \leq \|f\|_{(\ell^1)^*}, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} |\eta_k| \leq \|f\|_{(\ell^1)^*}$$

$$\Rightarrow \eta_f = \{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^\infty$$

Está bem definida a aplicação

$$\Psi : (\ell^1)^* \xrightarrow{\text{(Linear)}} \ell^\infty$$

$$f \longmapsto \eta_f$$

e ainda $\quad \|\Psi f\|_{\ell^\infty} \leq \|f\|_{(\ell^1)^*}$

Por outro lado

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k x_k\right| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |\eta_k| \cdot \|x\|_{\ell^1}$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{\ell^1}} \leq \|\eta_f\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_{(\ell^1)^*} \leq \|\eta_f\|_{\ell^\infty}$$

$$\Rightarrow \quad \|\psi f\|_{\ell^\infty} = \|f\|_{(\ell^1)^*}$$

Afirmação: ψ é sobrej.

Dado $\beta = \{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, defina

$$g : \ell^1 \to \mathbb{K},$$

$$g(x) = \sum^{\infty} x_k \beta_k$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \beta_k$$

$$\rightsquigarrow \quad g \in (\ell^1)^*$$

$$e \quad \Psi g = \beta$$

$$B(X,Y)$$