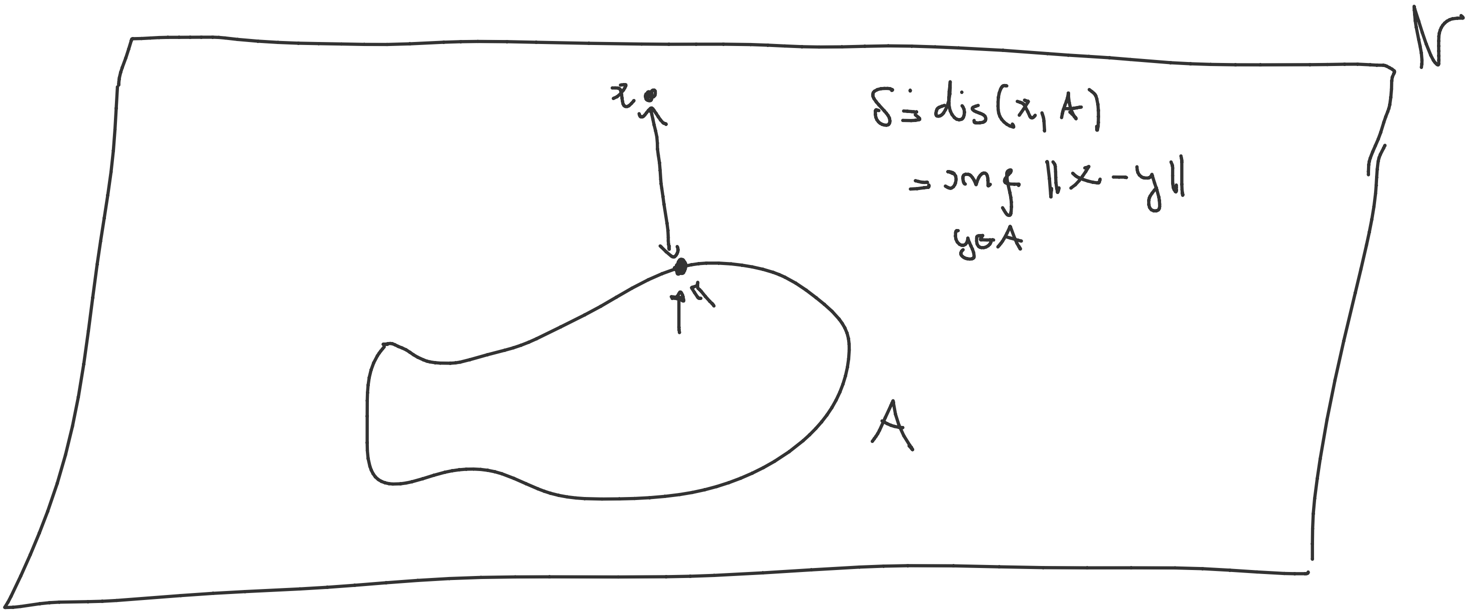
Em ℓ^2 temos o conjunto ortonormal $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

$$e_k \in \ell^2 \rightsquigarrow e_k = \{e^k_j\}_{j\in\mathbb{N}} \qquad e^k_j = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$$
$$\vdots$$

$$\langle x, y \rangle_{\ell^2} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \overline{y_j}$$

$$\Rightarrow \langle e_k, e_\ell \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} e^k_j \cdot \overline{e^\ell_j} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ 1, & k = \ell \end{cases}$$



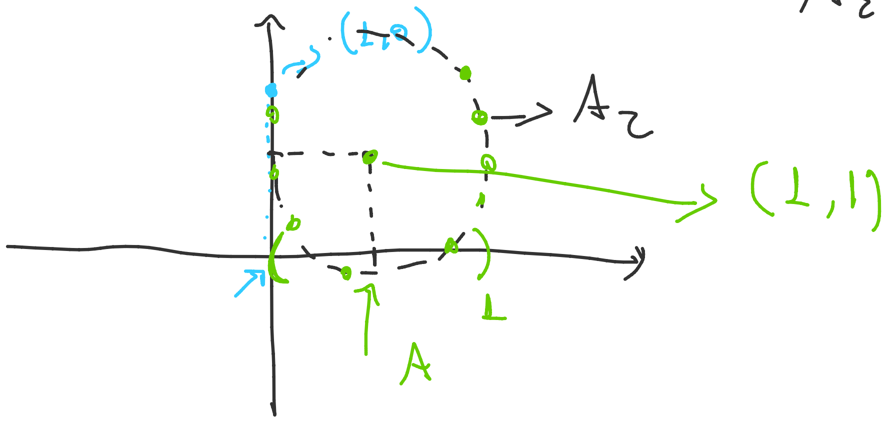
$$\delta = dis(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

Perguntas ① Existe $y \in A$; $\delta = \|x - y\|$?

② Se existe, é único?

$$\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow A_1 = \{(x,0);\ 0 \le x \le 1\}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}$$



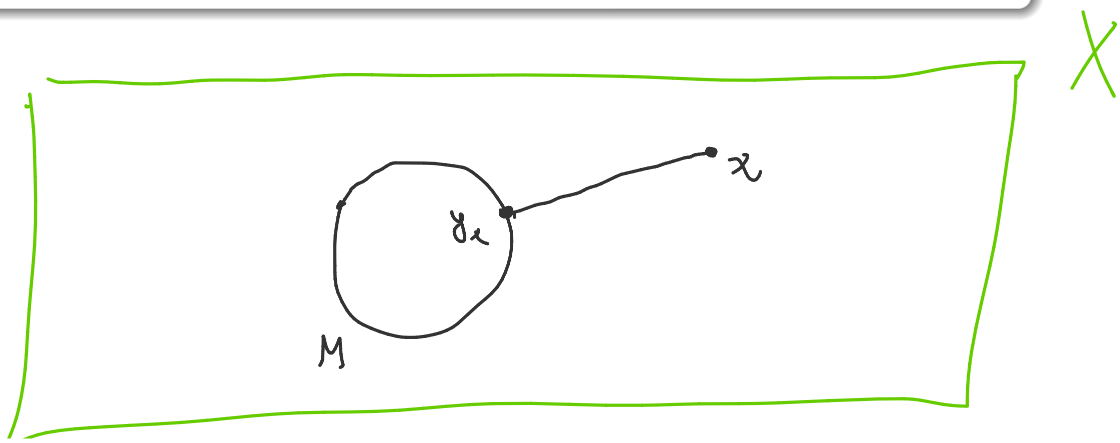
TEOREMA (PROJEÇÃO ORTOGONAL)

Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno e $M \neq \emptyset$ um subconjunto convexo e completo (com a métrica induzida pelo produto interno). Então, para cada $x \in \mathbb{X}$ existe um único $y_x \in M$ tal que

$$\|x - y_x\| = \inf\{\|x - y\|,\ y \in M\}.$$

$\mathbb{X} \rightsquigarrow$ Hilbert

$M \rightsquigarrow$ sub. vet. fechado



TEOREMA (PROJEÇÃO ORTOGONAL)

Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno e $M \neq \emptyset$ um subconjunto convexo e completo (com a métrica induzida pelo produto interno). Então, para cada $x \in \mathbb{X}$ existe um único $y_x \in M$ tal que

$$\|x - y_x\| = \inf\{\|x - y\|,\ y \in M\}.$$

A norma $\|\cdot\|$ num espaço normado $\mathcal{N}$ é induzida por um produto interno se, e somente se, ela satisfaz a identidade

$$\|\xi + \eta\|^2 + \|\xi - \eta\|^2 = 2\|\xi\|^2 + 2\|\eta\|^2,\ \forall \xi, \eta \in \mathcal{N}.$$

(I) Existência.

Defina $\delta = \inf_{y \in M} \|x - y\|$

$[\delta \le \|x - \eta\|,\ \forall \eta \in M]$

Existe $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$;

$$\delta_n = \|x - y_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} \delta$$

$$\delta_n \doteq \|x - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta$$

Afirmação: $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy

Define $v_n = y_n - x \Rightarrow \|v_n\| = \|x - y_n\| = \delta_n, \ n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Dados $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2\,\Big\|\overbrace{\tfrac{1}{2}(y_n + y_m)}^{\in M} - x\Big\| \geq 2\cdot\delta$$

$$\Rightarrow \quad \|v_n + v_m\| \geq 2\delta$$

Por outro lado

$$\|v_n - v_m\| = \|y_n - y_m\|$$

Assim

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 \underset{\text{Paral.}}{=} -\|v_n + v_m\|^2 + 2\|v_n\|^2 + 2\|v_m\|^2$$

$$\leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2)$$

$\delta_n^2 \xrightarrow{n\to+\infty} \delta^2$, $\delta_m^2 \xrightarrow{m\to+\infty} \delta^2$, $2(\delta_n^2+\delta_m^2) \to 4\delta^2$

$$\Downarrow$$

$$\|y_n - y_m\| \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Como M é completo, então

$$y_n \longrightarrow y \in M$$

Em particular, $\|x-y\| \geq \delta$

Note que

$$\|x-y\| = \|x-y_n+y_n-y\| \leq \|x-y_n\| + \|y_n-y\|$$

$$= \delta_n + \|y_n-y\|$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta$$

$$\Rightarrow \|x-y\| = \delta$$

(II) UNICIDADE

Sejam $y, y_0 \in M$;

$$\|x-y\| = \delta \quad e \quad \|x-y_0\| = \delta$$

Paral. $\rightsquigarrow$ $\|y-y_0\|^2 = \|(y-x)-(y_0-x)\|^2$

$$\Rightarrow \|y - y_0\|^2 = \|(y-x) - (y_0 - x)\|^2$$

$$= -\|(y-x) + (y_0 - x)\|^2 + 2\|y-x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2$$

$$= 4\delta^2 - 4\|\underbrace{\tfrac{1}{2}(y+y_0)}_{\in M} - x\|^2$$

$$\leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \|y - y_0\|^2 \leq 0 \iff y = y_0 \quad //$$

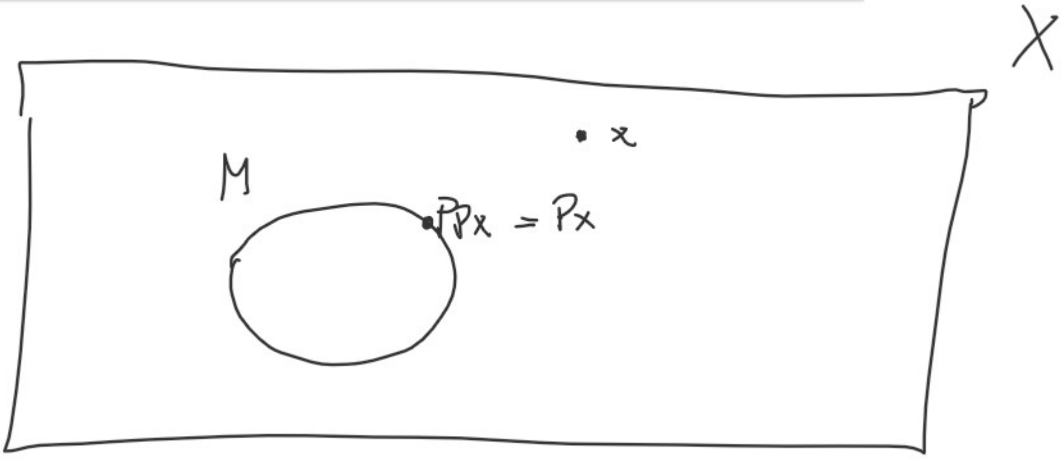
$$P \circ P = P$$

DEFINIÇÃO

Seja M um subconjunto convexo, completo e não vazio do espaço com produto interno $\mathbb{X}$. Definimos o *Operador Projeção Ortogonal de $\mathbb{X}$ sobre M*, à aplicação $P = P_M : \mathbb{X} \to M$ definida por $Px = y_x$ onde y_x é do teorema anterior. Isto é, para cada $x \in \mathbb{X}$, Px é o único elemento em M tal que

$$\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

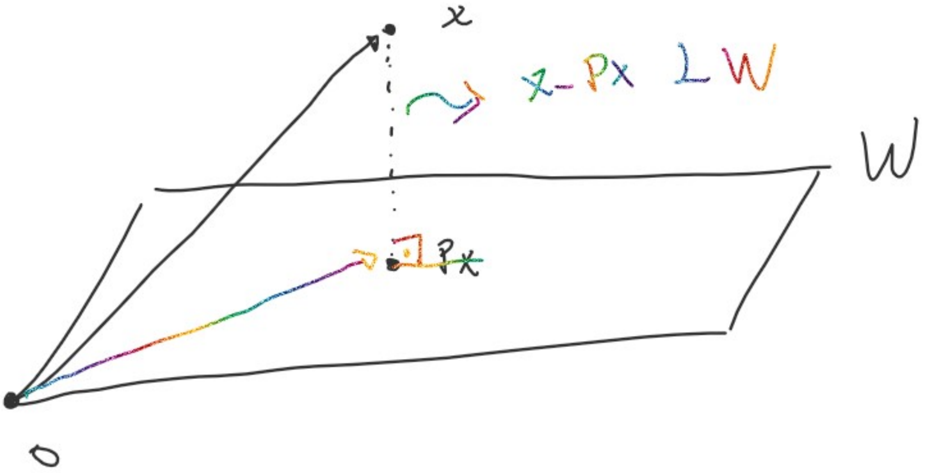
$$P_M : X \to M$$
$$x \mapsto P_M(x) = y_x$$



$$\|x - \underbrace{Px}_{\in M}\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

TEOREMA

Sejam W é um subespaço vetorial completo de $\mathbb{X}$ e $P = P_W$ o operador projeção ortogonal sobre W. Então, para cada $x \in \mathbb{X}$ temos que Px é o único elemento de W tal que $x - Px \perp W$.



Dem: Dado $x \in X$, ponha

$$z_x = x - Px$$

↳ Suponha z_x não é ortogonal a W

$$\Rightarrow \exists\, y \in W \;;\; \langle z_x, y\rangle \neq 0 \quad (\Rightarrow y \neq 0)$$

Dado $\alpha \in \mathbb{K}$, Note que

$$\|z_x - \alpha y\|^2 = \|z_x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\langle z_x, \alpha y\rangle\right) + \|\alpha y\|^2$$

Tomando $\alpha \doteq \dfrac{\langle z_x, y\rangle}{\|y\|^2}$

$$\hookrightarrow \|z_x - \alpha y\|^2 = \|z_x\|^2 - \frac{|\langle z_x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

$\|y\|^2$

$< \|z_x\|^2$

$\|z_x - \alpha y\| < \|z_x\|$

$\downarrow$

$\|x - \underbrace{(Px - \alpha y)}_{\in W}\| < \|x - Px\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$

Absurdo

(UNICIDADE) Suponha $y_0 \in W$; $x - y_0 \perp W$

$\|x - Px\|^2 = \|\underbrace{x - y_0}_{W^\perp} + \underbrace{y_0 - Px}_{W}\|^2 = \dots$ Pitágoras

Note que se W é um subespaço de dimensão finita, então fixada uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_m\}$ de W temos que

$$Px = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Dado $x \in X$, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$;

$$Px = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j$$

Mas $\langle x - Px, y \rangle = 0$, $\forall\, y \in W$

Mas $\langle x - Px, y \rangle = 0, \quad \forall y \in W$

Tomando $y = e_k$, $1 \leq k \leq m$

$$0 = \langle x - Px, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle Px, e_k \rangle$$

$$= \langle x, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle e_j, e_k \rangle$$

$$= \langle x, e_k \rangle - \lambda_k$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \langle x, e_k \rangle$$

TEOREMA

Se Z é um subespaço vetorial completo de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$, então

$$\mathbb{X} = Z \oplus Z^{\perp}$$

Além disso, $Z = Z^{\perp\perp}$.

Tome $x \in X$: $x - Px \in Z^{\perp}$,

ou seja, existe $y \in Z^{\perp}$;

$$x - Px = y \Rightarrow x = \overbrace{Px}^{\in Z} + \overbrace{y}^{\in Z^{\perp}}$$

Se $y \in Z \cap Z^{\perp}$, então

$\langle y, y \rangle = 0 \Leftrightarrow y = 0$

TEOREMA

Seja $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal de $\mathbb{X}$. Então, então para cada $x \in \mathbb{X}$ temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, define

$$M_m \doteq \text{Ger}\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$$

$$\Rightarrow \quad P_m : X \longrightarrow M_m$$

Dado $x \in X$, ponha

$$z = x - P_m x \in M_m^{\perp}$$

$$\overset{!!!}{\Rightarrow} \quad z \perp P_m x$$

Assim

$$\|x\|^2 = \|z + P_m x\|^2 \underset{\text{Pit.}}{=} \|z\|^2 + \|P_m x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|P_m x\|^2 \leq \|x\|^2$$

Mas,

$$\|P_m x\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 \underset{\text{Pit}}{=} \sum_{j=1}^{m} \| \langle x, e_j \rangle e_j \|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{m} |\langle x, e_j \rangle|^2$$

Assim

$$\sum_{j=1}^{m} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

$\sum a_n$

obs: $\lim_{j \to +\infty} \langle x, e_j \rangle = 0$

TEOREMA

Seja $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal de $\mathbb{X}$. Então, então para cada $x \in \mathbb{X}$ temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

- Note que $\langle x, e_n \rangle \to 0$, quando $n \to \infty$.
- Se $\mathbb{X}$ é Hilbert, então $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ é convergente.

n

De facto, ponha $S_n = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$

Para $n > m$:

$$\|S_n - S_m\|^2 = \Big\| \sum_{j=m+1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \Big\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2$$

$\Rightarrow \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.