PROPOSIÇÃO

Sejam $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno e $M \subset \mathbb{X}$ um subconjunto.

(a) Se M é total, então $M^\perp = \{0\}$.

(b) Se $\mathbb{X}$ é Hilbert e $M^\perp = \{0\}$, então M é total.

(d) $M^\perp = [\mathrm{Ger}(M)]^\perp = \left[\overline{\mathrm{Ger}(M)}\right]^\perp$.

(a) $M^\perp = \left[\overline{\mathrm{Ger}(M)}\right]^\perp = [X]^\perp = \{0\}$

(b) $\underbrace{X}_{\text{Hilb.}} = \overline{\mathrm{Ger}(M)} \oplus \left[\overline{\mathrm{Ger}(M)}\right]^\perp = \overline{\mathrm{Ger}(M)} \oplus \{0\} = \overline{\mathrm{Ger}(M)}$

TEOREMA (IDENTIDADE DE PARSEVAL)

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\beta = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ um conjunto ortonormal. Então, β é uma base se, e somente se,

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |\langle x, \alpha\rangle|^2, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

→ Hilb.

Dem: ($\Rightarrow$) Suponha β base de Hilbert.

↳ β é ort. total

Tome $x \in \mathcal{H}$.

$\{\alpha \in \mathcal{I} ; \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\} \text{ “=” } \mathbb{N}$

Defina $y = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle e_j \in \mathcal{H}$ $\quad S_k = \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j\rangle e_j$

Note que, dados $n, p \in \mathbb{N}$:

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\|\sum_{j=n+1}^{n+p} \langle x, e_j\rangle e_j\right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{n+p} |\langle x, e_j\rangle|^2 \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy

AFIRMAÇÃO: $x-y \in \beta^{\perp}$

• Se "$\alpha \in \mathbb{N}$"

$$\langle x-y, e_\alpha \rangle = \langle x, e_\alpha \rangle - \langle y, e_\alpha \rangle$$

$$= \langle x, e_\alpha \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j, e_\alpha \right\rangle$$

$$= \langle x, e_\alpha \rangle - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_\alpha \rangle$$

$$= \langle x, e_\alpha \rangle - \langle x, e_\alpha \rangle = 0$$

• $k \in \mathcal{I}$ ("$k \notin \mathbb{N}$")

$$\langle x-y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle y, e_k \rangle$$

$$= 0 - \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$\therefore \quad \langle x-y, e_\alpha \rangle = 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I} \Rightarrow x = y$

($\Leftarrow$) Tome $x \in \beta^{\perp} \Rightarrow \langle x, e_\alpha \rangle = 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}$

$$\Rightarrow \quad \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathfrak{J}} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

Todas as bases de Hilbert em $\mathcal{H}$ tem a mesma cardinalidade.

Sejam $\quad \mathcal{U} = \{e_\alpha\}_{\alpha \in J} \quad$ e $\quad \mathcal{V} = \{\eta_\beta\}_{\beta \in K}$

duas bases de Hilbert em $\mathcal{H}$

Dado $\alpha \in J$ define

$$V_\alpha \doteq \{\eta_\beta \in \mathcal{V} \,;\, \langle \eta_\beta, e_\alpha \rangle \neq 0\}$$

↳ é contável

$$\Rightarrow \quad \mathcal{V} = \bigcup_{\alpha \in J} \boxed{V_\alpha} \quad \sim$$

?/?

$$[\text{card}(\mathcal{V})] \leq [\text{card}\ \mathcal{U}]$$

...

TEOREMA

Um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é separável, se e somente se, tem uma base de Hilbert contável.

$$\psi : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{K})$$

TEOREMA

Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert de dimensão infinita e separável, então ele é isometricamente isomorfo com $\ell^2(\mathbb{K})$ onde $\mathbb{K}$ é o corpo de escalares sobre o qual $\mathcal{H}$ esta definido.

Seja $\beta = \{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ base de $\mathcal{H}$

Dado $x \in \mathcal{H} \rightsquigarrow \|x\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} |\langle x, e_j \rangle|^2$

$$\rightsquigarrow \quad x \longmapsto \{\langle x, e_j \rangle\}_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{K})$$

Fica bem def.:

$$\psi : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{}]{\text{Linear}} \ell^2(\mathbb{K})$$

$$x \longmapsto \{\langle x, e_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$$

- $\|\psi x\|^2_{\ell^2(\mathbb{K})} = \|x\|^2 \Rightarrow \psi$ preserva norma.

$\Rightarrow \psi$ é injetiva

Sobrej. Tome $z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{K})$

Ponha: $S = \sum^{n} z_k e_k \in \mathcal{H}$

Tomamos:
$$S_n = \sum_{j=1}^{n} z_j e_j \in \mathcal{H}$$

$n \geq m$

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\|\sum_{j=m+1}^{n} z_j e_j\right\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |z_j|^2 \to 0$$

$\Rightarrow \{S_n\} \subset \mathcal{H}$ é de Cauchy

$$\Rightarrow \quad x \doteq \sum_{j=1}^{\infty} z_j e_j \in \mathcal{H}$$

Fixado $k \in \mathbb{N}$:
$$\langle x, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} z_j \langle e_j, e_k \rangle = z_k$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(x) = \{\langle x, e_j \rangle\}_{j \in \mathbb{N}} = \{z_j\}_j = z$$

$$f \in \mathcal{H}^* \longmapsto x_f \in \mathcal{H}$$

TEOREMA (REPRESENTAÇÃO DE RIESZ)

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Para cada $f \in \mathcal{H}^*$ existe um único $x_f \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Alem disso, $\|f\|_{\mathcal{H}^*} = \|x_f\|_{\mathcal{H}}$.

Dem: Se $f \equiv 0 \rightsquigarrow x_f = 0$

Suponha $f \not\equiv 0 \Rightarrow \underbrace{Nuc(f)}_{\text{subespaço fechado}} \neq \mathcal{H}$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = Nuc(f) \oplus \underbrace{[Nuc(f)]^{\perp}}_{\neq \{0\}}$$

Podemos tomar $0 \neq y \in [Nuc(f)]^{\perp}$.

Dado $x \in \mathcal{H}$,

$$z_x \doteq f(x)y - f(y) \cdot x \quad \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow f(z_x) = f(x)f(y) - f(y)f(x) = 0$$

$$\Rightarrow z_x \in Nuc(f)$$

Assim

$$0 = \langle z_x, y \rangle = f(x)\langle y, y\rangle - f(y)\langle x, y\rangle$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\langle y, y\rangle} f(y) \langle x, y\rangle$$

$$= \left\langle x, \frac{\overline{f(y)}}{\langle y, y\rangle} y \right\rangle$$

Definindo $x_f \doteq \overline{f(y)} / \langle y, y\rangle$ /

ENTÃO $\quad f(x) = \langle x, x_f\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$

[UNICIDADE (EXERC.)]

$$\rightsquigarrow \quad |f(x)| = |\langle x, x_f\rangle| \leq \|x\| \cdot \|x_f\|$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|x_f\| \Rightarrow \|f\|_{\mathcal{H}^*} \leq \|x_f\|_{\mathcal{H}}$$

Por outro lado,

$$\|x_f\|^2 = \langle x_f, x_f\rangle = f(x_f) \leq \|f\|_{\mathcal{H}^*} \cdot \|x_f\|_{\mathcal{H}}$$

$\Rightarrow \quad \|x_f\|_{\mathcal{H}}$ é $\|f\|_{\mathcal{H}^*}$

Observação

Note que:

- O operador $\Psi : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ dado por $\Psi(f) = x_f$ é uma isometria sobrejetiva.
- A norma em $\mathcal{H}^*$ provém do produto interno

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^*} = \overline{\langle x_f, x_g\rangle_{\mathcal{H}}}.$$

- Todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{H}^{**}$.

$\mathcal{H}^* = B(\mathcal{H}, \mathbb{K})$

$\mathcal{H}^*$, $\|f\|_{\mathcal{H}^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$

$\Rightarrow (\mathcal{H}^*, \langle \, , \, \rangle)$ é Hilbert.

$\Rightarrow \quad f : \mathcal{H}^* \to \mathbb{K}$ lin. con

$\Rightarrow (\mathcal{H}^*)^* = \mathcal{H}^{**}$

Observação

Note que:

- O operador $\Psi : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ dado por $\Psi(f) = x_f$ é uma isometria sobrejetiva.
- A norma em $\mathcal{H}^*$ provém do produto interno

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^*} = \overline{\langle x_f, x_g\rangle_{\mathcal{H}}}.$$

- Todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{H}^{**}$.

$$F: \underline{H} \longrightarrow H^{**}$$

$$\eta \longmapsto F_\eta : H^* \to \mathbb{K}$$

$$f \longmapsto (F_\eta)(f) \doteq f(\eta)$$

$a = 0 \quad b = 2\pi$

Exemplo: Em $L^2[a,b]$

Dado $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi_n(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{b-a}} \exp\left(i 2\pi n \frac{(t-a)}{\sqrt{b-a}} \right)$

$\leadsto \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ base de Hilbert de $L^2[a,b]$

$$\mathcal{F} : L^2[a,b] \longrightarrow \ell^2(\mathbb{C})$$

$$\psi \longmapsto \{(\mathcal{F}\psi)_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$(\mathcal{F}\psi)_n = \langle \psi, \varphi_n \rangle_{L^2} = \int_a^b \psi(t)\, \overline{\varphi_n(t)}\, dt$$

↳ coef. de Fourier de ψ

Mais ainda : $\psi \in L^2[a,b]$

$\rightsquigarrow \psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}\psi)_n \, \psi_n(t)$

$u \in L^2$,

$Pu = f \in C^\infty$