$\rightarrow S_h \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert e $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear limitada. Então existe um único operador linear limitado $S_h : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que

$$h(x, y) = \langle S_h x, y \rangle_2, \ \forall (x, y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2.$$

Alem disso, $\|h\| = \|S_h\|_{B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)}$.

Dem.: Fixado $x \in \mathcal{H}_1$, considere

$$\mathcal{H}_2 \ni y \xmapsto{\varphi_x} \overline{h(x,y)}$$

$$\mathcal{H}_2 \xrightarrow{\varphi_x} \mathbb{K}$$

$\rightsquigarrow \varphi_x$ é linear

$\rightsquigarrow \boxed{\varphi_x \in \mathcal{H}_2^*}$!!!

Como $\varphi_x \in \mathcal{H}_2^*$, então por Riesz,

existe um único $y_x \in \mathcal{H}_2$;

$$\varphi_x(y) = \langle y, y_x \rangle_2 \ , \ \forall y \in \mathcal{H}_2$$

ou seja

$$\overline{h(x,y)} = \langle y, y_x \rangle_2 \ ,$$

ou ainda

$$h(x,y) = \overline{\langle y, y_x \rangle_2} = \langle y_x, y \rangle_2$$

Assim

$$h(x,y) = \langle y_x, y \rangle_2$$

$\rightsquigarrow$ Ponha $S_h : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, $\rightsquigarrow h(x,y) = \langle S_h x, y \rangle$

$\rightsquigarrow$ Vonha $S_n : H_1 \longrightarrow H_2$, $\rightsquigarrow$ $h(x,y) \underset{\uparrow}{=} \langle S_n x, y \rangle_2$

$x \longmapsto y_x$

Afirmação: S_n é Linear.

$\langle \eta, \xi \rangle = 0, \ \forall \xi \Rightarrow \eta = 0$

$$\langle S_n(\alpha x + y), z \rangle = h(\alpha x + y, z) = \alpha h(x,z) + h(y,z)$$

$$= \alpha \langle S_n x, z \rangle + \langle S_n y, z \rangle$$

$$= \langle \alpha S_n x + S_n y, z \rangle$$

$$\Rightarrow \quad S_n(\alpha x + y) = \alpha S_n x + S_n y$$

Afirmação: $S_n \in B(H_1, H_2)$

$$\|S_n x\|_2^2 = \langle S_n x, S_n x \rangle_2 = h(x, S_n x)$$

$$\leq \|h\| \|x\| \|S_n x\|$$

$$\Rightarrow \|S_n x\|_2 \leq \underset{\uparrow}{\|h\|} \cdot \|x\| \quad (*)$$

Afirmação: $\|S_n\|_{B(H_1, H_2)} = \|h\|$

$$(*) \Rightarrow \|S_n\| \leq \|h\|$$

$(*) \Rightarrow \|S_h\| \leq \|h\|$

Por outro lado

$$|h(x,y)| = |\langle S_h x, y\rangle| \leq \|S_h x\| \cdot \|y\|$$

$$\leq \|S_h\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\Rightarrow \frac{|h(x,y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \|S_h\| \Rightarrow \|h\| \leq \|S_h\|$$

Unicidade:

$$h(x,y) = \langle S_1 x, y\rangle = \langle S_2 x, y\rangle$$

$$\Rightarrow S_1 x = S_2 x, \quad \forall x \Rightarrow S_1 = S_2$$

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert. Dado $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, existe um único $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}_1, \ \forall y \in \mathcal{H}_2.$$

Além disso, $\|T^*\| = \|T\|$.

- O operador T^* acima é dito **adjunto (de Hilbert) de T**.
- Nas condições do teorema acima, temos que $T^{**} \doteq (T^*)^* = T$.

Dem: Dada $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, defina

$$h_T : \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \to \mathbb{K}$$

$$(y, x) \longmapsto \langle y, Tx \rangle_{H_2}$$

$\rightsquigarrow h_T$ é uma forma sesq. lin. limitada em $H_2 \times H_2$

$$\rightsquigarrow \quad |h(y,x)| = |\langle y, Tx \rangle| \leq \|y\| \cdot \|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\rightsquigarrow \quad \|h\| \leq \|T\|$$

Por outro lado

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = h_T(Tx, x) \leq \|h_T\| \cdot \|Tx\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \quad \|Tx\| \leq \|h_T\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \quad \|T\| \leq \|h_T\|$$

$$\Rightarrow \quad \|T\| = \|h_T\|$$

$$h_T(y, x) = \langle y, Tx \rangle_2$$

Rep. Riez: $\quad \exists ! \quad S_T \in B(H_2, H_2)$;

$$h_T(y,x) = \langle S_T y, x \rangle_1$$

$$\Rightarrow \quad \langle y, Tx \rangle = \langle S_T y, x \rangle_1, \quad \forall\, x \in H_1, \forall\, y \in H_2$$

Mas $\|S_T\| = \|h_T\| = \|T\|$

Assim, denotando $S_T = T^*$

$$\Rightarrow \quad \langle T^* y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$$

$$\overline{\langle x, T^* y \rangle} = \overline{\langle Tx, y \rangle}$$

$$\Rightarrow \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

Ex: em $\mathbb{C}^n$: $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \overline{y_j} = x^t \cdot \overline{y}$

$x = (x_1, \dots, x_n)^t$

$y = (y_1, \dots, y_m)^t$

Dada $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$: $\rightsquigarrow$ $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$
$x \mapsto A \cdot x$

$$\Rightarrow \langle Ax, y \rangle = (Ax)^t \overline{y} = x^t \cdot A^t \, \overline{y}$$
$$= x^t \, \overline{\overline{A^t} y}$$
$$= \langle x, \overline{A^t} y \rangle$$

$$\Rightarrow A^* = \overline{A^t}$$

$S_d : \ell^2 \to \ell^2$, $S_d(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \doteq (0, x_1, x_2, \dots)$
$(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3} \quad)$

$S_e : \ell^2 \to \ell^2$, $S_e(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$

$$\rightsquigarrow \langle S_d x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} (S_d x)_j \cdot \overline{y_j}$$
$$= 0 \cdot \overline{y_1} + \sum_{j=2}^{\infty} (S_d x)_j \, \overline{y_j}$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{(S_e y)}$$

$$= \langle x, S_\beta y \rangle$$

$$\Rightarrow \quad S_\alpha^* = S_\beta$$

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in B(\mathcal{H})$.

(a) T é normal se, e somente se, $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

(b) Se $\mathcal{H}$ é um espaço complexo, então T é autoadjunto se, e somente se, $\langle Tx, x\rangle$ é real para todo $x \in \mathcal{H}$.

(c) T é unitário se, e somente se, é uma isometria sobrejetiva.

(d) Se $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $B(\mathcal{H})$ de operadores autoadjuntos que converge para T, então T é autoadjunto.

DEFINIÇÃO

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in B(\mathcal{H})$. Dizemos que T é:

(a) Normal, se $TT^* = T^*T$.

(b) Autoadjunto, se $T^* = T$.

(c) Unitário, se for bijetivo e $T^* = T^{-1}$.

(a) $\Rightarrow$ $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle$

$$= \|T^*x\|^2$$

Polarização

($\Leftarrow$) Se $\|T^*x\| = \|Tx\| \Rightarrow \langle T^*x, T^*y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$

Assim

$$\langle (TT^* - T^*T)(x), y\rangle = \langle TT^*x, y\rangle - \langle T^*Tx, y\rangle$$

$$= \langle T^*x, T^*y\rangle - \langle Tx, Ty\rangle$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow TT^*x = T^*Tx, \ \forall x \Rightarrow TT^* = T^*T$$

$$\Rightarrow TT^*x = T^*Tx, \ \forall x \Rightarrow TT^* = T^*T$$

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in B(\mathcal{H})$.

(a) T é normal se, e somente se, $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

(b) Se $\mathcal{H}$ é um espaço complexo, então T é autoadjunto se, e somente se, $\langle Tx, x\rangle$ é real para todo $x \in \mathcal{H}$.

(c) T é unitário se, e somente se, é uma isometria sobrejetiva.

(d) Se $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $B(\mathcal{H})$ de operadores autoadjuntos que converge para T, então T é autoadjunto.

$\rightsquigarrow$ Se $\langle Qx, x\rangle = 0, \forall x$, então $Q \equiv 0$

(b) $(\Rightarrow)$ $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle$

$$= \overline{\langle Tx, x\rangle} \Rightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$$

$(\Leftarrow)$ $\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \overline{\langle x, T^*x\rangle} = \langle T^*x, x\rangle$

$$\rightsquigarrow \langle (T - T^*)x, x\rangle = 0, \ \forall x \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow T - T^* = 0 \Rightarrow T = T^*$$

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in B(\mathcal{H})$.

(a) T é normal se, e somente se, $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

(b) Se $\mathcal{H}$ é um espaço complexo, então T é autoadjunto se, e somente se, $\langle Tx, x\rangle$ é real para todo $x \in \mathcal{H}$.

(c) T é unitário se, e somente se, é uma isometria sobrejetiva.

(d) Se $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $B(\mathcal{H})$ de operadores autoadjuntos que converge para T, então T é autoadjunto.

Suponha $T_n \to T$, $T_n = T_n^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|T^* - T\| = \|T^* - T_n - T_n - T\| \leq \|T^* - T_n\| + \|T - T_n\|$$

$$= \| T^* - T_n^* \| + \| T - T_n \|$$

$$= \| (T - T_n)^* \| + \| T - T_n \|$$

$$= \| T - T_n \| + \| T - T_n \|$$

$$\Rightarrow \quad \| T - T^* \| = 2 \| T - T_n \| \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad \| T - T^* \| = 0 \quad \Rightarrow \quad T = T^* \quad //$$