Aula 9 - 07_02- Lema de Zorn e Teorema de Hahn-Banach

segunda-feira, 7 de fevereiro de 2022   09:03

DEFINIÇÃO

Uma ordem parcial "$\leq$" em um conjunto M, é uma relação binária que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $a \leq a$ para todo $a \in M$,

(ii) se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$,

(iii) se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

$$X \neq \emptyset \rightsquigarrow \quad M \doteq \mathcal{P}(X) = \{A ;\ A \subseteq X\}$$

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

(i) $A \subseteq A$ (ii) $A \subseteq B$ e $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

(iii) $A \subset B \subset E \Rightarrow A \subset E$

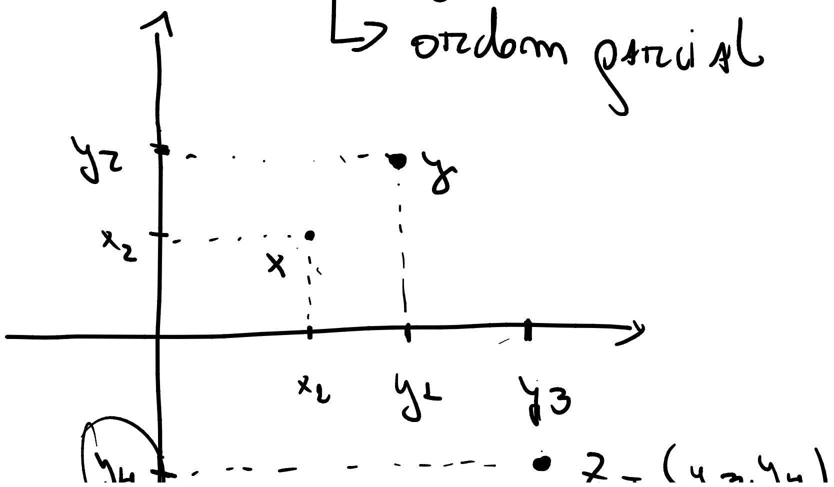
Ex: $X = \mathbb{R}$, $A = \{1, 2\}$

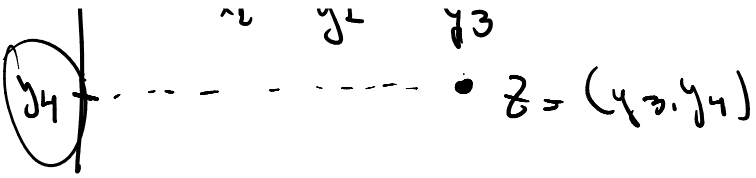
$B = \{2, 3\}$

Ex: $M = \mathbb{R}^2$

$$\underset{x}{(x_1, x_2)} \leq \underset{y}{(y_1, y_2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq y_1 \\ x_2 \leq y_2 \end{cases}$$

↳ ordem parcial





Considere

$$M = \{A \subseteq \mathbb{R};\ A \subset \mathbb{Q},\ \text{ou}\ A \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

com $\leq \doteq \subseteq$. Note que M não possui cota superior. Além disso,

$$u_1 = \mathbb{Q} \text{ e } u_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

são maximais.

$\mathbb{Q} \subset M$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset M$

TEOREMA

Todo espaço vetorial $\mathbb{X} \neq \{0\}$ tem uma base de Hamel.

LEMA

Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto parcialmemte ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado possui uma cota superior, então M tem um elemento maximal.

Demo:

$M \doteq$ conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{X}$ que são L.I.

$\leq \doteq \subseteq$ ~> ordem parcial

Tome W um subconjunto de M totalmente ordenado.

Afirmação: W possui cota superior

De fato, defina

$$\overline{U} \doteq \bigcup_{A \in W} A$$

Fato: $\overline{U}$ é L.I:

Tome $x_1, x_2, \dots, x_m \in \overline{U}$

$\Rightarrow x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m$

(*) Como W é totalmente ordenado, então existe $1 \leq i_0 \leq m$;

$$A_j \subset A_{i_0},\ \forall\ j = 1, \dots, m$$

$\Rightarrow x_1, x_2, \dots, x_m \in A_{i_0}$

Como A_{i_0} é L.I $\Rightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$ é L.I

Note então que

$\overline{U} \in M$ é uma cota

Superior de W

Pelo Lema de Zorn, M possui um elemento maximal: $\mathcal{B}$

($\beta \in M \Rightarrow \beta$ é L.I)

Afirmação: $Ger(\beta) = X$.

Suponha que β não é base de Hamel $\Rightarrow \exists\ \eta \in X$ tal que $\eta \notin Ger(\beta)$ $(\Rightarrow \eta \neq 0)$

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{B}} \doteq \mathcal{B} \cup \{\eta\}$ é L.i

e $\mathcal{B} \subsetneq \tilde{\mathcal{B}}$

e $\mathcal{B} \not\subseteq \breve{\mathcal{B}}$

Contradizendo a maximalidade de $\mathcal{B}$.

TEOREMA(HAHN-BANACH-$\mathbb{R}$)

Sejam $\mathbb{X}$ um espaço vetorial real e p um funcional sublinear sobre $\mathbb{X}$, isto é, $p : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}, \quad \forall \alpha \geq 0.$$

Se f é um funcional linear definido sobre um subespaço Z de $\mathbb{X}$ tal que

$$f(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in Z,$$

então f tem uma extensão linear $\tilde{f}$ definida em todo o espaço $\mathbb{X}$ tal que,

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{X}.$$

Defina:

$G = \{g_t\}$ a coleção de todas as ext. lineares $\neq \emptyset$, $f \in G$

$g_t : Z_t \to \mathbb{R}$

↳ sub. de $\mathbb{X}$, $Z \subseteq Z_t \subseteq \mathbb{X}$

↳ $g_t|_Z = f$

$\hookrightarrow g_t|_Z = f$

$\hookrightarrow g_t(x) \leq p(x), \ \forall x \in Z_t$

Ordem parcial em G:

$$g_t < g_s \iff \begin{cases} (1) \ Z_t \subseteq Z_s \\ (2) \ g_t(x) = g_s(x), \ \forall x \in Z_t \end{cases}$$

(*) Considere $\{g_t\}_{t \in J}$ $g_t : Z_t \to \mathbb{R}$

um subconj. tot. ordenado de G

$\rightsquigarrow \Lambda \doteq \bigcup_{t \in J} Z_t \Big\}$ é subespaço do X

$$\rightsquigarrow \quad g : \Lambda \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto g(x) \doteq g_t(x), \quad x \in Z_t$$

- bem definido
- Linear
- $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in \Lambda$

$$\Rightarrow \quad g \in G$$

Mais ainda:

$$g_t \prec g, \quad \forall t \in J$$

$\Rightarrow$ Toda família tot. ord em G

Toda família tot. ord. em G possui cota superior

Por Zorn, G possui elemento maximal:

$$F : \underbrace{X_0}_{\text{subespaço}} \subseteq \mathbb{X} \xrightarrow{\text{Linear}} \mathbb{R},$$

$$F(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in X_0$$

Afirmação: $X_0 = \mathbb{X}$

Suponha, por contradição, que

$$0 \neq \eta \in \mathbb{X} \setminus X_0$$

Defina: $Y = \mathrm{Ger}(X_0 \cup \{\eta\})$

Defina: $Y = \text{Ger}\left(X_0 \cup \{\eta\}\right)$

$\Rightarrow$ Se $\xi \in Y \Rightarrow \xi = x + \underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}}\eta$

Ponha $\tilde{F} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ $(X_0 \subsetneq Y)$

$$\tilde{F}(\xi) = F(x) + \alpha \underbrace{\tilde{F}(\eta)}_{\text{qualquer}}$$

↳ "Linear"

obs: Se $x_1, x_2 \in X_0$:

$$F(x_1) + F(x_2) = F(x_1 + x_2) \leq p(x_1 + x_2)$$

$$= p(x_1 + x_2 + \eta - \eta)$$

$$\leq p(x_1 - \eta) + p(x_2 + \eta)$$

$$\Rightarrow \quad F(x_1) - p(x_1 - \eta) \leq p(x_2 + \eta) - F(x_2)$$

• $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$; $\quad F(w) - p(w-\eta) \leq \lambda \quad \forall w \in X_0$

$$\boxed{\sup_{x_1 \in X_0} \{F(x_1) - p(x_1 - \eta)\} \leq \lambda \leq \inf_{x_2 \in X_0} \{p(x_2 + \eta) - F(x_2)\}}$$

Ponha $\tilde{F}(\eta) \doteq \lambda$

$$\Rightarrow \tilde{F}(y) = F(x) + \alpha \lambda$$

(I) $\alpha > 0$

$$\Rightarrow \tilde{F}(y) = F(x) + \alpha\lambda \leq F(x) + \alpha\Big[p\big(\underset{\substack{\uparrow \\ x/\alpha \in X_0}}{x/\alpha} + \eta\big) - F(x/\alpha)\Big]$$

$$= F(x) + \alpha\, p\left[\tfrac{1}{\alpha}(x + \alpha\eta)\right] - \alpha \frac{1}{\alpha} F(x)$$

$$= \alpha\, p\left[\tfrac{1}{\alpha}(x + \alpha\eta)\right]$$

$$= \cancel{\alpha} \frac{1}{\cancel{\alpha}}\, p(\underline{x + \alpha\eta})$$

$$\Rightarrow \tilde{F}(y) \leq p(y), \quad \forall\, y \in Y$$

II) $\alpha = 0 \Rightarrow \tilde{F}(\eta) \leq p(\eta)$

(III) $\alpha < 0$

$$\tilde{F}(\eta) = \tilde{F}(x + \alpha\eta) = \tilde{F}(x - |\alpha|\eta)$$

$$= F(x) - |\alpha| \tilde{F}(\eta)$$

$$= F(x) - |\alpha| \lambda$$

$$\leq F(x) - |\alpha| \left[F\left(x/|\alpha|\right) - p\left(x/|\alpha| - \eta\right) \right]$$

$$= F(x) - |\alpha| \frac{1}{|\alpha|} F(x) + |\alpha| p\left[\frac{1}{|\alpha|}(x - |\alpha|\eta)\right]$$

$$= p(x - |\alpha|\eta)$$

$$= p(\eta)$$

$$\Rightarrow \tilde{F}(\eta) \leq p(\eta)$$

$\Rightarrow F(\eta)$ é $P(\eta)$

$$\Rightarrow F < \tilde{F}$$

com $F \neq \tilde{F}$

~//~

obs: Suponha que existam duas ext. F_1, F_2

$s \in [0,1]$,

$$F_s : X \xrightarrow{\text{LINEAR}} \mathbb{C}$$

$$F_s(x) \doteq s F_1(x) + (1-s) F_2(x)$$

- $\eta \in Z$: $F_s(\eta) = s F_1(\eta) + (1-s) F_2(\eta)$

$$= s f(\eta) + (1-s) f(\eta)$$

$$= f(\eta)$$

$\Rightarrow$ F_s ext. f

- $|F_s(x)| \leq s|F_1(x)| + (1-s)|F_2(x)|$

$$\leq s\,p(x) + (1-s)\,p(x)$$

$$= p(x)$$

TEOREMA

Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Todo funcional linear limitado f definido sobre um subespaço Z de $\mathbb{X}$ tem uma extensão linear limitada $\tilde{f}$ definida em todo $\mathbb{X}$ tal que

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

$Z \underset{\text{sub.}}{\subset} X \rightsquigarrow f \in B(Z, \mathbb{K}) = Z^*$

$\exists \quad \tilde{f} \in B(X, \mathbb{K}) = X^*$;

$$\tilde{f}\big|_Z = f \quad \text{e} \quad \|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Z^*}$$

Demo: Como $f \in Z^*$:

$$|f(x)| \leq \|f\|_{Z^*} \cdot \|x\|, \quad \forall\, x \in Z$$

Defina $p : X \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \|f\|_{Z^*} \cdot \|x\|,$$

↳ é sublinear em X.

$$(*) \quad |f(x)| \leq p(x), \quad \forall\, x \in Z$$

Por H-B, existe

$$\tilde{f} : X \xrightarrow{\text{Linear}} \mathbb{K};$$

$$\begin{cases} |\tilde{f}(x)| \leq p(x), & \forall\, x \in X \\ \tilde{f}\big|_Z = f \end{cases}$$

$$|\tilde{g}(x)| \leq p(x) = \|g\|_{Z^*} \cdot \|x\|$$

$\Rightarrow$ (1) $\tilde{g} \in X^*$

(2) $\displaystyle\sup_{x \neq 0} \frac{|\tilde{g}(x)|}{\|x\|} \leq \|g\|_{Z^*}$

$$\Rightarrow \|\tilde{g}\|_{X^*} \leq \|g\|_{Z^*}$$

Como $\tilde{g}$ ext. g, entonces

$$\|g\|_{Z^*} \leq \|\tilde{g}\|_{X^*}$$

$$\Rightarrow \quad \|g\|_{Z^*} = \|\tilde{g}\|_{X^*}$$