MATE-7007 - Análise Funcional - Verão 2022

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1

1 Métricas

Exercício 1 *Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre as desigualdades*

1. $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$, $\forall x, y, z \in M$.
2. $|d(x_1,y_1) - d(x_2,y_2)| \leq d(x_1,x_2) + d(y_1,y_2)$, $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$.

Exercício 2 *Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$ um subconjunto não-vazio. Defina a distância entre um ponto $x \in M$ e o conjunto A pondo*

$$\delta(x, A) = \inf\{d(x,a);\ a \in A\}.$$

(a) *Se $\delta(x, A) = 0$, então $x \in A$?*

(b) *Mostre que*
$$|\delta(x,A) - \delta(y,A)| \leq d(x,y),\ \forall x, y \in M;$$

(c) *Mostre que*
$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y),\ \forall x, y, z \in M.$$
O que isso quer dizer geometricamente?

Exercício 3 *Sejam (M_1, d_1), (M_2, d_2) espaços métricos.*

(a) *Mostre que a função*
$$d(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2},$$
para $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, é uma métrica em $M = M_1 \times M_2$.

(b) *Identificando $\mathbb{C}$ como produto cartesiano do conjunto de números reais e mostre que $d(z,w) = |z - w|$ (módulo de uma diferença de números complexos) é uma métrica em $\mathbb{C}$.*

Exercício 4 *Seja $\mathcal{R}[a,b]$ o conjunto das funções reais Rieamann integráveis definidas no intervalo $[a,b]$. Dadas $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ponha*

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \tag{1}$$

(a) *Mostre que (4) não define uma métrica.*

(b) *Qual hipótese poderia ser adicionada as funções de $\mathcal{R}[a,b]$ para tornar (4) uma métrica?*

(c) *Mostre que a relação*

$$f \sim g \doteq d(f,g) = 0. \tag{2}$$

é uma relação de equivalência.

(d) *Com respeito a relação definida em (3) considere o espaço quociente $N = \mathcal{R}[a,b]/\sim$. Os elementos de N são as classes de equivalências*

$$[f] = \{h \in \mathcal{R}[a,b];\ d(f,h) = 0\}.$$

Mostre que a relação $D : N \times N \to \mathbb{R}$ dada por

$$D([f],[g]) = d(f,g),\ \ f \in [f] \ \ e \ \ g \in [g], \tag{3}$$

define uma métrica no espaço quociente $N = M/\sim$. (Não esqueça de provar que, de fato, D é uma função!)

Exercício 5 *Uma função $f : M \to N$ entre espaços métricos é dita uma imersão isométrica se*

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x,y),\ \forall x,y \in M.$$

Uma isometria é uma imersão sobrejetiva.

(a) *Mostre que uma imersão isométrica é necessariamente injetiva;*

(b) *Mostre que qualquer imersão isométrica define uma isometria $f : M \to f(M)$;*

(c) *Sejam (M, d_M) um espaço métrico, X um conjunto e $f : X \to M$ uma função injetiva. Mostre que a expressão*

$$d_f(x,y) \doteq d_M(f(x), f(y))$$

define uma métrica em X.

(d) *Fixados $a, u \in \mathbb{R}^n$, com $||u|| = 1$, mostre que a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = a + tu$ é uma imersão isométrica. (Considere uma métrica no espaço $\mathbb{R}^n$ induzido por uma norma qualquer).*

(e) *Seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial formado pelas sequências $x = (x_1, x_2, \ldots)$ com apenas um número finito de termos $x_k \neq 0$. Defina em $\mathbb{R}^\infty$ o produto itnerno $< x, y >= \sum_j x_j y_j$. Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ dada por*

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

é uma imersão isométrica mas não é uma isometria;

Exercício 6 *Seja $\Delta = \{(x,x);\ x \in M\}$ a diagonal do produto $M \times M$, onde M é um espaço métrico. Mostre que, se $z = (x,y) \notin \Delta$, então $\delta(z, \Delta) > 0$.*

Exercício 7 *Seja $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ |x| = 1\}$ a esfera unitária n-dimensional. O espaço projetivo de dimensão n é o conjunto $\mathbb{P}^n$ cujos elementos são os pares não-ordenados $[x] = \{x, -x\}$, com $x \in \mathbb{S}^n$.*

(i) *Mostre que $[x] = [y]$ se, e somente se, $y = -x$.*

(ii) *Mostre que*

$$d([x],[y]) = \min\{|x-y|, |x+y|\}$$

define uma métrica sobre $\mathbb{P}^n$;

(iii) Mostre que a aplicação natural $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, dada por $\pi(x) = [x]$, cumpre a condição

$$d(\pi(x), \pi(y)) \leqslant d(x, y).$$

Exercício 8 *Uma pseudométrica num conjunto M é uma função real $p : M \times M \to \mathbb{R}$ tal que*

$$p(x,x) = 0,\ \ p(x,y) = p(y,x) \geqslant 0 \quad e \quad p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z),$$

para quaisquer $x, y, z \in M$.

(a) Sejam p uma pseudométrica num conjunto M e dois pontos $x, y \in M$. Mostre que a seguinte relação é de equivalência:

$$x \sim y \doteq p(x,y) = 0. \tag{4}$$

(b) Com respeito a relação definida em (4) considere o espaço quociente $N = M/\sim$. Os elementos de N são os conjuntos $[x] \subset M$, com $x \in M$, definidos por

$$[x] = \{t \in M;\ p(x,t) = 0\}.$$

Mostre que a expessão

$$d([x],[y]) = p(x,y),\ \ x \in [x] \quad e \quad y \in [y],$$

define uma métrica no espaço quociente $N = M/\sim$. (Não esqueça de provar que, de fato, d é uma função $d : N \times N \to \mathbb{R}$.)

2 Espaços normados

Exercício 9 *Seja (V, d) um espaço métrico no qual V é um espaço vetorial satisfazendo as seguintes propriedades*

1. *$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$, para todo $x, y \in V$ e escalares α,*
2. *$d(x+z, y+z) = d(x,y)$, para todo $x, y, z \in V$.*

Mostre que d é uma métrica induzida por alguma norma em V, isto é, existe uma norma, $\|\cdot\|$ em V tal que

$$d(x,y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V.$$

Exercício 10 *Seja $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ um espaço normado.*

(a) Mostre que a aplicação $d_0(x,y) := \sqrt{\|x - y\|}$ é uma métrica em $\mathcal{N}$.

(b) A aplicação $\|x\|_0 := \sqrt{\|x\|}$ é uma norma em $\mathcal{N}$?

(c) A aplicação $d_2(x,y) = \|x - y\|^2$ é uma métrica em X? Justifique sua resposta.

Exercício 11 *Seja $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Mostre que vale a desigualdade*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{N}.$$

Exercício 12 *Seja $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ um espaço normado no qual $\mathcal{N}$ tem dimensão finita. Mostre que:*

(a) Todas as normas em $\mathcal{N}$ são equivalentes .

(b) $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ *é Banach.*

(c) *Um conjunto é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.*

Exercício 13 *Dizemos que duas normas* $\|\cdot\|_0$ *e* $\|\cdot\|_1$ *são equivalentes num espaço vetorial* $\mathbb{X}$ *se existem constantes positivas* c_1, c_2 *tal que*

$$c_1\|x\|_0 \leq \|x\|_1 \leq c_2\|x\|_0, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Para $1 \leq p < q \leq \infty$, *mostre que as normas* $\|\cdot\|_p$ *e* $\|\cdot\|_q$ *são equivalentes no espaço* $\mathbb{R}^n$.

3 Espaços com produto interno

Exercício 14 *Sejam* $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *um espaço com produto interno e* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *duas sequências em* $\mathcal{V}$ *que convergem para* x *e* y, *respectivamente. Mostre que*

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Exercício 15 *Seja* $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *um espaço com produto interno.*

(a) *Se* x *e* y *são ambos não nulos e* $x \perp y$, *então* $\{x, y\}$ *é l.i.*

(b) *Se* $x \perp y$, *para todo* $y \in \mathcal{V}$, *então* $x = 0$.

(c) *Se* $x \perp y$, *então* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(d) *Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência em* $\mathcal{V}$ *convergindo para* x *tal que* $x_n \perp y$, *para todo* n. *Mostre que* $x \perp y$.

(e) *Temos* $x \perp y$ *se, e somente se,*
$$\|x + ty\| \geq \|x\|, \ \forall t \in \mathbb{K}.$$

Exercício 16 *Seja* $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *um espaço com produto interno. Mostre a validade da identidade de polarização:*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \quad se \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right), \quad se \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Exercício 17 *Um semi-produto interno num espaço vetorial* V *é uma função* $f: V \times V \to \mathbb{K}$ *tal que*

(i) $f(u+v, w) = f(u, w) + f(v, w)$;

(ii) $f(\lambda u, w) = \lambda f(u, v)$;

(iii) $f(u, w) = \overline{f(v, u)}$;

(v) $f(u, u) \geqslant 0$;

(a) *Mostre que* $\mathcal{N} = \{x \in V;\ f(x, x) = 0\}$ *é um subespaço vetorial;*

(b) *Mostre que*
$$p([x], [y]) = f(x, y), \ x \in [x], \ y \in [y],$$
define um produto interno no quociente $V/\mathcal{N}$;

Exercício 18 *Considere* $T: (V, < \cdot, \cdot >) \to (V, < \cdot, \cdot >)$ *uma transformação linear.*

(a) *Mostre que* T *é contínua sem* $x \in V$ *se, e somente se é contínua em* $x = 0$.

(b) *Se* $< Tx, x >= 0$, *para todo* $x \in V$ *então podemos garantir* $T = 0$*? Em caso de resposta negativa, adicione suponha* T *contínua e faça a mesma pertunga. (Neste caso vai fazer diferneção a escolha* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*).*

Exercício 19 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno. Mostre que se* $< x, z >=< y, z >$, *para todo* z, *então o* $x = y$.

Exercício 20 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno. Mostre que*

$$\|x\| = \max_{\|y\|=1} | < x, y > |.$$

Exercício 21 *Mostre que, num espaço com produto interno, a condição* $\|x\| = \|y\|$ *implica que os vetores* $x + y$ *e* $x - y$ *são ortogonais.*

Exercício 22 *Considere a seguinte função definida em* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$*:*

$$(z, w) \mapsto < z, w >_1 \doteq z\overline{w}.$$

(a) *Mostre que* $< z, w >_1$ *define um produto interno em* $\mathbb{C}$. *Mais ainda, obtemos a métrica usual.*

(b) *Para quais condições obtemos ortogonalidade?*

Exercício 23 *Considere o espaço* $C[-1, 1]$ *com o produto interno* $\langle f, g \rangle == \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. *Considere os subespaços de funções pares e ímpares respectivamente*

$$A = \{f \in C[-1, 1] : f(-x) = f(x)\} \quad e \quad B = \{f \in C[-1, 1] : f(-x) = -f(x)\}.$$

Mostre que $A \perp B$ *e que* $C[-1, 1] = A \oplus B$.

4 Topologia

Exercício 24 *Mostre que normas equivalentes num espaço vetorial induzem a mesma topologia, isto é, se um conjunto é aberto com uma norma também será aberto com uma norma equivalente.*

Exercício 25 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno. Considere um vetor* $y \in V$ *e* $\{x_n\}$ *uma sequência em* V. *Mostre que se* $x_n \perp y$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *e* $x_n \to x \in V$, *então* $x \perp y$.

Exercício 26 *Sejam* V *um* $\mathbb{C}$ *espaço vetorial com produto interno e* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sequências convergentes em* V *(com respeito a norma induzida). Mostre que a sequência* $\{< x_n, y_n >\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente em* $\mathbb{C}$. *(o mesmo vale para* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*)*

Exercício 27 *Seja* A *um subconjunto do espaço métrico* $\mathbb{X}$. *Um ponto* $x_0 \in \mathbb{X}$ *é dito ponto de acumulação de* A *se para todo* $\epsilon > 0$, *temos que*

$$A \cap (B_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Neste caso, mostre que $B_\epsilon(x_0)$ *tem infinitos elementos de* A.

Exercício 28 *Sejam* A *um subconjunto do espaço métrico* $(\mathbb{X}, d)$. *Mostre que* A *é aberto, se e somente se, para toda sequência* (x_n) *em* $\mathbb{X}$ *que converge a algum ponto de* A *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \in A$ *para todo* $n \geq n_0$.

Exercício 29 *Considere M um espaço métrico e A, F subconjuntos de M. Mostre que:*

(a) $p \in \overline{A}$ *se, e somente se, existe* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ *tal que* $x_n \to p$*;*

(b) $F \subset M$ *é fechado se, e somente se,* $\overline{F} = F$*;*

(c) $p \in A'$ *se, e somente se, existe* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ *tal que* $x_n \neq p$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *e* $x_n \to p$.

Exercício 30 *Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que:*

(a) Os conjuntos M e $\emptyset$ são fechados.

(b) A interseção de uma coleção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

(c) A união de um número finito de conjuntos fechados é fechado.

Exercício 31 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico e $Z \subseteq \mathbb{X}$.*

(a) Se $\mathbb{X}$ é compacto, mostre que Z é compacto se, e somente se, é fechado.

(b) Se $\mathbb{X}$ é completo, mostre que Z é completo se, e somente se, é fechado.

Exercício 32 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de ℓ^∞: $\ell_0^\infty = \{(x_n) : x_n \to 0\}$, e*

$$W = \{(x_n) : \textit{tem somente um número finito de coordenadas não nulas}\}.$$

Mostre que ℓ_0^∞ é completo enquanto W não é.

Exercício 33 *Considere a função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, onde $\mathbb{X}$ é um espaço métrico completo. Defina $f^n := f(f^{n-1})$ e mostre que, se f^n é uma contração para algum $n \in \mathbb{N}$, então f tem um único ponto fixo. Use este fato para mostrar que o problema de valor inicial*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b, \quad x(t_0) = x_0$$

onde A é uma matriz real $n \times n$, $b, x_0 \in \mathbb{R}^n$, tem uma única solução contínua $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Exercício 34 *Sejam $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$, espaços isométricos. Mostre que $\mathbb{X}_1$ é completo se, e somente se, $\mathbb{X}_2$ é completo.*

Exercício 35 *Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico e $A \subseteq \mathbb{X}$. Mostre que $x \in \bar{A}$ se e somente se*

$$\inf_{y\in A} d(x, y) = 0.$$

Exercício 36 *Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico. Um ponto x_0 se diz um ponto de fronteira de $A \subseteq \mathbb{X}$ se*

$$A \cap B_\epsilon(x_0) \neq \emptyset \quad e \quad A^c \cap B_\epsilon(x_0) \neq \emptyset, \quad \forall \epsilon > 0$$

O conjunto de pontos de fronteira de um conjunto A é denotado por ∂A.

(a) Mostre que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

(b) Encontre a fronteira dos subconjuntos $]0, 1]$, $\mathbb{Q}$, $[0, \infty[$ e $\mathbb{R}$ no espaço $\mathbb{R}$.

(c) Encontre a fronteira do subconjunto $\{\rho e^{i\theta} : 0 < \rho < 1,\ \theta \in \mathbb{R}\}$ no espaço $\mathbb{C}$.

Exercício 37 *Seja $\|\cdot\|$ uma seminorma no espaço vetorial $\mathbb{X}$ (isto é, $\|x\| = 0$ não implica necessariamente em $x = 0$). Vejamos que podemos reformular o espaço $\mathbb{X}$ para que a seminorma se torne uma norma. Para $x, y \in \mathbb{X}$ escrevemos*

$$x \sim y \quad \text{se} \quad \|x - y\| = 0.$$

1. *Mostre que "$\sim$" é uma relação de equivalência.*
2. *Considere o conjunto $\widetilde{\mathbb{X}}$ de todas as classes de equivalência $[x]$, $x \in \mathbb{X}$. Mostre que as operações*

   $$[x] + [y] := [x + y], \quad \lambda[x] := [\lambda x], \; (\lambda \text{ escalar})$$

   estão bem definidas, isto é, o resultado independe dos representantes de cada classe, e com estas operações, mostre que $\widetilde{\mathbb{X}}$ é um espaço vetorial.
3. *Se definimos $\|[x]\| := \|x\|$, $x \in \mathbb{X}$, mostre que esta função bem definida e é uma norma em $\widetilde{\mathbb{X}}$. Desta forma, por simplicidade denotamos $[x]$ por seu representante x (que equivale a denotar $\widetilde{\mathbb{X}}$ por $\mathbb{X}$), então podemos dizer que a seminorma se torna uma norma em $\mathbb{X}$.*
4. *Aplique os itens anteriores para que a seminorma*

   $$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

   se torne uma norma em $\mathcal{R}(a, b)$.

5 Continuidade

Exercício 38 *Sejam M e N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Mostre que f é contínua em $p \in M$ se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\}$ em M que converge para p tem-se que $\{f(x_n)\}$ converge para $f(p)$ em N.*

Exercício 39 *Mostre que toda métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$ e toda norma $\|\cdot\| : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.*

Exercício 40 *Mostre que a imagem de um conjunto aberto de uma função contínua não é necessariamente aberto.*

Exercício 41 *Mostre que a função (entre espaços métricos) $f : (\mathbb{X}, d_X) \to (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(F) := \{x \in \mathbb{X} : f(x) \in F\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{X}$ para todo conjunto fechado F de $\mathbb{Y}$.*

Exercício 42 *Mostre que o gráfico de uma função contínua $f : M \to N$, entre espaços métricos, é homeomorfo ao domínio de f. (Siga os passos abaixo)*

(a) *pondo $G(f) = \{(x, f(x));\; x \in M\} \subset M \times N$ considere a função $\widehat{f}(x) = (x, f(x))$;*

(b) *obtenha a inversa de $\widehat{f}$;*

Como aplicação, mostre que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é homeomorfo à hipérbole $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\; xy = 1\}$.

Exercício 43 *Sejam X e Y dois espaços topológicos. Mostre que as projeções $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ são abertas;*

Exercício 44 *Sejam M, N espaços métricos e $f, g : M \to N$ duas funções.*

(a) *Se ambas são contínuas num ponto $a \in M$ e $f(a) \neq g(a)$. Mostre que existe uma bola aberta B, de centro a, tal que $f(B) \cap g(B) = \emptyset$. Em particular, se $x \in B$ então $f(x) \neq g(x)$.*

(b) *Suponha que f e g são contínuas em M. Dado $a \in M$ suponha que toda bola de cetnro a contenha um ponto x tal que $f(x) = g(x)$. Mostre que $f(a) = g(a)$. Usando este fato, mostre que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e $f(x) = g(x)$ para todo x racional, então $f = g$.*

Exercício 45 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços métricos e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função contínua.*

1. *Se $\mathbb{X}$ é compacto, mostre que f é uniformemente contínua, isto é, para cada $\epsilon > 0$ é possível encontrar $\delta > 0$ tal que $d_{\mathbb{Y}}(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ tal que $d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2) < \delta$.*

2. *Se $\mathbb{X}$ é compacto e f bijetiva, mostre que f^{-1} é contínua.*

Exercício 46 *Um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ é um espaço topológico V com uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ tal que $\{0\}$ é um conjunto fechado (na topologia) tal que as operações*

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad e \quad (x, y) \mapsto x + y$$

são contínuas como funções

$$\mathbb{K} \times V \to V \ \ e \quad e \ \ V \times V \to V.$$

(a) *Mostre que todo espaço vetorial topológico é Hausdorff.*

(b) *Seja V um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{C}$. Mostre que uma aplicação linear $f : \mathbb{C}^n \to V$ é necessariamente contínua.*

Exercício 47 *Um grupo metrizável é um espaço métrico G munido de uma estrutura de grupo tal que as operações*

$$m : G \times G \to G, \ m(x, y) = x \cdot y \quad e \quad f : G \to G, \ f(x) = x^{-1}$$

são contínuas. Prove as seguintes afirmações:

(a) *Seja G um espaço métrico com estrutura de grupo. G é um grupo metrizável se, e somente se, a aplicação*

$$q : G \times G \to G, \ q(x, y) = x \cdot y^{-1}$$

é contínua.

(b) *São grupos metrizáveis: o grupo aditivo de um espaço vetorial normado (em particular $\mathbb{R}^n$), o grupo aditivo $\mathbb{S}^1$ dos complexos de módulo 1 e o grupo das matrizes reais $n \times n$ invertíveis.*

(c) *Sejam G e H grupos metrizáveis. Um homomorfismo $f : G \to H$ é contínuo se, e somente se, é contínuo no elementro neutro $e \in G$.*