MATE-7007 - Análise Funcional - Verão 2022

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2

- O símbolo $\mathcal{N}$ indica um espaço normado.
- O símbolo $\mathcal{B}$ indica um espaço de Banach.

Exercício 1 *Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado e $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Mostre que se existe uma transformação linear $T : \mathcal{N} \to \mathcal{H}$ isométrica e sobrejetiva, então $\mathcal{N}$ é um espaço de Hilbert.*

Exercício 2 *Mostre que os seguintes conjuntos são abertos em $\mathbb{R}^2$*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2\|x\| < 3\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}.$$

Exercício 3 *Considere $C^1[a, b]$ o conjunto das funções de classe C^1 definidas em $[a, b]$. Defina*

$$\|\psi\|_{C^1} = \sup_{t\in[0,1]} |\psi(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |\psi'(t)|.$$

Mostre que $(C^1[a, b], \|\cdot\|_{C^1})$ é Banach. Como deveria ser a norma em $C^k[a, b]$?

Exercício 4 *O espaço $C^\infty[a, b]$ é Banach com a norma do sup?*

Exercício 5 *Considere o conjunto $Q = [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$ e $K : Q \to \mathbb{R}$ contínua de modo que*

$$|K(t, s, u) - K(t, s, v)| \leqslant L|u - v|, \ \forall (t, s, u), (t, s, v) \in Q,$$

com $L > 0$. Para $\varphi \in C[a, b]$ defina

$$T(\psi)(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(t, s, \psi(s))ds.$$

1. *Use indução para mostrar que*

$$|T^n(f)(t) - T^n(g)(t)| \leqslant \frac{L^n(t-a)^n}{n!}\|f - g\|_\infty.$$

2. *Para n grande temos que T^n é uma contração.*

Exercício 6 *Considere $\mathcal{N}_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ uma coleção de espaços normados. Mostre que todas as normas em*

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{j=1}^n \mathcal{N}_j$$

são equivalentes.

Exercício 7 *Seja $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ linear e contínuo com $\|T^n\| < 1$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostre que dado $\eta \in \mathcal{B}$, existe única solução do problema $\xi - T\xi = \eta$.*

Exercício 8 *Seja* $\psi : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ *um funcional linear contínuo tal que*

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y).$$

Mostre que $\psi(\alpha x) = \alpha\psi(x)$*, para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 9 *Seja* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável de forma que,* $|\psi'(t)| \leqslant \alpha < 1$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*. Mostre que* ψ *é uma contração. (Como generalizar para* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*?)*

Exercício 10 *Fixado* $a \in \mathbb{R}$ *defina em* $C[-1,1]$ *a aplicação*

$$f_a(\phi) = \int_{-1}^{1} \psi(t)dt + a\psi(0).$$

1. *Mostre que* $f_a \in C[-1,1]^*$.
2. *Calcule* $\|f\|$.

Exercício 11 *Seja* X *um subespaço fechado e próprio de* $\mathcal{N}$*. Se para* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$ *tem-se* $(I-T)(\mathcal{N}) \subset X$*, mostre que dado* $\alpha \in (0,1)$*, existe* $\eta \in \mathcal{N}$*, com* $\|\eta\| = 1$*, de modo que*

$$\inf_{x \in X} \|Tx - T\eta\| \geqslant \alpha.$$

Exercício 12 *Seja* f *uma aplicação linear* $f : \mathcal{N} \to \mathbb{K}$*. Mostre que* $f \in \mathcal{N}^*$ *se, e somente se,* $Ker(f)$ *é fechado.*

Exercício 13 *Verifique se o núcleo a aplicação* $f : (\ell^1, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{K}$ *dado por*

$$f(\{x_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$

é fechado.

Exercício 14 *Mostre que se* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ *então* $Ker(T)$ *é fechado.*

Exercício 15 *Sejam* $\mathcal{N}$ *um espaço normado (não trivial) e* $\mathcal{N}^*$ *seu dual. Então:*

(i) *se* $0 \neq \eta \in \mathcal{N}$*, então existe* $f \in \mathcal{N}^*$ *com* $f(\eta) = \|\eta\|$ *e* $\|f\| = 1$.

(ii) *se* $\eta \neq \xi$*, então existe* $f \in \mathcal{N}^*$ *com* $f(\eta) \neq f(\xi)$.

(iii) *se* $f(\eta) = 0$*, para todo* $f \in \mathcal{N}^*$*, então* $\eta = 0$.

(iv) *se* $\xi \in \mathcal{N}$*, então*

$$\|\xi\| = \sup_{0 \neq f \in \mathcal{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{\|f\|}.$$

Exercício 16 *Mostre que se* $\mathcal{N}^*$ *é separável, então* $\mathcal{N}$ *é separável.*

Exercício 17 *Seja* $\mathcal{Z}$ *um subespaço vetorial de* $\mathcal{N}$*. Mostre que todo funcional linear limitado em* $\mathcal{Z}$ *é restrição de algum elemento de* $\mathcal{N}^*$*. Mostre que* $\mathcal{Z}^* = \{f|_{\mathcal{Z}} \,;\, f \in \mathcal{N}^*\}$.

Exercício 18 *Sejam* X *e* Y *dois espaços de Banach e* $T : X \to Y$ *linear, contínuo e injetivo. Mostre que* $T^{-1} : T(X) \to X$ *é limtiado se, e somente se,* $T(X)$ *é fechado em* Y.

Exercício 19 *Mostre que toda métrica* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *e toda norma* $\|\cdot\| : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas.*

Exercício 20 *Mostre que a imagem de um conjunto aberto por uma função contínua não é necessariamente aberto.*

Exercício 21 *Mostre que o espaço* $C[a,b]$ *é completo com sua norma usual*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

O subespaço $Z = \{f \in C[a,b] : f(a) = f(b)\}$ *é completo? Justifique sua resposta.*

Exercício 22 *Considere o espaço vetorial* $C[0,1]$ *com a norma*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

Seja $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, *considere a sequência e funções* $(f_n)_{n\geq 3}$ *em* $C[0,1]$ *dada por* $f_n = 0$ *em* $[0,1/2]$, $f_n = 1$ *em* $[a_n, 1]$ *e* f_n *linear em* $[1/2, a_n]$.

1. *Mostre que* (f_n) *é de Cauchy.*
2. *Use a sequência anterior para mostrar que* $C[0,1]$ *não é completo.*
3. *Mostre que o espaço* $C[0,1]$ *também não é completo com a norma*

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Exercício 23 *Mostre que todo espaço normado (real ou complexo) de dimensão finita é separável e completo.*

Exercício 24 *Considere o conjunto* $\mathcal{B} = \{e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) *Mostre que* $\mathcal{B}$ *não é uma base de Hamel para* ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$.

(b) *Mostre que* $\mathcal{B}$ *não é uma base de Schauder para* ℓ^∞.

(c) *Mostre que* $Ger(\mathcal{B})$ *não é fechado em* ℓ^p, *para* $1 \leq p \leq \infty$.

Exercício 25 *Mostre que normas equivalentes num espaço vetorial induzem a mesma topologia, isto é, se um conjunto é aberto com uma norma também será aberto com uma norma equivalente.*

Exercício 26 *Seja* Ω *um aberto limitado de* $\mathbb{R}^n$. *Mostre que* $C(\overline{\Omega})$ *é um espaço de Banach com sua norma usual* $\|\cdot\|_\infty$.

Exercício 27 *Seja* X *um espaço normado. Mostre que se* Z *é um subespaço vetorial de dimensão finita de* X, *então ele é fechado e completo.*

Exercício 28 *Seja* $T : D(T) \subseteq X \to Y$ *um operador Linear. Mostre que*

1. $Nu(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0\}$ *é um subespaço vetorial de* X.
2. $Im(T) = \{Tx : x \in D(T)\}$ *é um subespaço vetorial de* Y.

3. T *é injetiva se e somente se* $Nu(T) = \{0\}$.

4. *Se* T *é injetiva, então* $T^{-1} : Im(T) \subseteq Y \to X$ *é linear.*

Exercício 29 *Sejam* $T : X \to Y$ *e* $S : Y \to Z$ *operadores lineares bijetivos. Mostre que*

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

Exercício 30 *Seja* $T : X \to Y$ *um operador linear em que* X *e* Y *são de dimensão finita e* $dim(X) = dim(Y)$. *Mostre que* T *é injetiva se, e somente se, for sobrejetiva.*

Exercício 31 *Considere o operador "shift à direita"* $S : \ell^p \to \ell^p$ *dado por*

$$S(x) = (0, x_1, x_2, \ldots) \quad para \quad x = (x_1, x_2, \ldots).$$

S *define um isomorfismo isométrico de* ℓ^p *em* ℓ^p*?*

Exercício 32 *Considere duas normas equivalentes* $\|\cdot\|_1$ *e* $\|\cdot\|_2$ *num espaço vetorial* X. *Mostre que* $(X, \|\cdot\|_1)$ *é um espaço de Banach se, e somente se,* $(X, \|\cdot\|_2)$ *é um espaço de Banach.*

Exercício 33 *Considere o espaço vetorial*

$$C_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua e limitada}\}$$

com a norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. *Para* $r > 0$ *fixado, mostre que a aplicação* $T : C_b(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ *dado por* $(Tf)(x) = f(x - r)$ *é um operador linear limitado. Encontre* $\|T\|$.

Exercício 34 *Seja* $T : D(T) \subseteq X \to Y$ *um operador linear. Se existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $\|Tx\| \geq \epsilon\|x\|$ *para todo* $x \in D(T)$, *mostre que* T *é injetivo e que seu inverso* $T^{-1} : Im(T) \subseteq Y \to X$ *é um operador linear limitado tal que* $\|T^{-1}\| \leq 1/\epsilon$.

Exercício 35 *Seja* $T : X \to Y$ *um operador linear limitado. Mostre que*

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|.$$

Exercício 36 *Mostre que a aplicação*

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

é uma norma no espaço vetorial $B(X; Y) = \{T : X \to \mathbb{Y} : \ T \text{ é linear limitado } \}$. *É verdade que* $B(X; Y)$ *é Banach?*

Exercício 37 *Mostre que o operador* $f : C[a, b] \to \mathbb{R}$ *dado por* $Tx = x(a)$ *é um funcional linear limitado. Calcule* $\|f\|$.

Exercício 38 *Seja* f *um funcional linear definido em* $\mathbb{R}^2$.

(a) *Mostre que existem* $a, b \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x, y) = ax + by$ *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) *Para* $1 \leq p \leq \infty$ *considere* $\mathbb{R}^2$ *com a norma* $\|\cdot\|_p$. *Calcule* $\|f\|$.

Exercício 39 *Considere o operador linear* $T : C[0,1] \to C[0,1]$ *dado por*

$$T(x)(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

(a) Mostre que T *é injetivo e encontre* $Im(T)$*.*

(b) Mostre que o operador linear $T^{-1} : Im(T) \subseteq C[0,1] \to C[0,1]$ *não é limitado.*

Exercício 40 *Sejam* $\mathcal{N}$ *um espaço de Banach e* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{N};\mathcal{N})$*, com* $\|T\| < 1$*.*

1. *Mostre que o operador* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ *é o inverso de* $I - T$*.*

2. *Mostre que* $(I-T)^{-1}$ *é um operador limitado e que*

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$