MATE-7007 - Análise Funcional - Verão 2022

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3

- Os símbolos $\mathcal{N}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{H}$ indicam um espaço normado, de Banach e de Hilbert, respectivamente.
- Considere $M \subset \mathcal{H}$ um conjunto. Utilizaremos a notação $M \leqslant \mathcal{H}$ para indicar que M é um subespaço vetorial fechado.
- Quando indicarmos o produto interno de $C[a, b]$ por

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt,$$

estaremos considerando apenas funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1 Operadores limitados

Exercício 1 *Seja M um subconjunto do espaço vetorial X, mostre que $Ger(M)$ é o menor subespaço de X que contem M.*

Exercício 2 *Se Z é um subespaço de X, mostre que $\overline{Z}$ também é um subespaço de X.*

Exercício 3 *Considere X o espaço normado formado pelas sequências reais que tem, no máximo, um número finito de termos não nulos com a norma*

$$\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, \quad x = \{x_n\} \in X.$$

Encontre uma sequência $\{x_n\}$ em X tal que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não convirja, porém seja absolutamente convergente.

Exercício 4 *Seja X um espaço normado. Se Z é um subespaço vetorial de dimensão finita de X, mostre que Z é fechado e completo.*

Exercício 5 *Considere o espaço vetorial*

$$C_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua e limitada}\}$$

com a norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Para $r > 0$ fixado, mostre que a aplicação $T : C_b(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ dado por $(Tf)(x) = f(x - r)$ é um operador linear limitado. Encontre $\|T\|$.

Exercício 6 *Seja $T : D(T) \subseteq X \to Y$ um operador linear. Se existe $\epsilon > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \epsilon\|x\|$ para todo $x \in D(T)$, mostre que T é injetivo e que seu inverso $T^{-1} : Im(T) \subseteq Y \to X$ é um operador linear limitado tal que $\|T^{-1}\| \leq 1/\epsilon$.*

Exercício 7 *Mostre que o operador $f : C[a, b] \to \mathbb{R}$ dado por $Tx = x(a)$ é um funcional linear limitado. Calcule $\|f\|$.*

Exercício 8 *Considere os espaços normados* $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ *e* $(C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1})$ *onde*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad e \quad \|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Considere o operador diferenciação $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ *definido por* $Tf = f'$. *Mostre que* T *é um operador linear limitado e que* $\|T\| = 1$.

Exercício 9 *Seja* k *uma função não negativa em* $C[0,1]$, *considere operador* $T : C[0,1] \to C[0,1]$ *dado por*

$$Tf(t) = \int_0^t k(t-s)f(s)\, ds.$$

Mostre que T *é um operador linear limitado é* $\|T\| = \int_0^1 k(\tau)\, d\tau$.

Exercício 10 *Seja* $\mathbb{X}$ *um espaço vetorial e* $f : X \to \mathbb{K}$ *um funcional linear. Se* $f(x_0) \neq 0$ *para* $x_0 \in \mathbb{X}$, *mostre que*

$$\mathbb{X} = Nu(f) \oplus Ger\{x_0\}.$$

Isto é, a codimensão do $Nu(f)$ *é 1.*

Exercício 11 *Seja* $\mathbb{X}$ *um espaço normado. Se* $f : X \to \mathbb{K}$ *é um funcional linear tal que para toda sequência* (x_n) *que converge para zero tem-se que* $(f(x_n))$ *é limitada, mostre que* f *é um funcional limitado.*

Exercício 12 *Mostre que* $\ell^2 = (\ell^2)^*$.

Exercício 13 *Considere a aplicação* $T : \ell^2 \to \ell^2$ *dada por*

$$T(\{x_n\}) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right).$$

Mostre que T *é contínuo mas sua imagem não é um conjunto fechado.*

2 Espaços de Hilbert

Exercício 14 *Considere* $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ *uma sequência ortogonal, isto é,* $\xi_j \perp \xi_k$, $\forall j \neq k$.

(a) Mostre a relação de Pitágoras:

$$\left\|\sum_{j=1}^n \xi_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|\xi_j\|^2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Seja $\xi = \sum_{j=1}^\infty a_j\xi_j$ *(convergência na norma), mostre que*

$$\|\xi\|^2 = \sum_{j=1}^\infty |a_j|^2 \|\xi_j\|^2.$$

Exercício 15 *Considere dois espaços* $(H_1, < \cdot, \cdot >_1)$ $(H_2, < \cdot, \cdot >_2)$ *e defina*

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >_{H_1\times H_2} = < x_1, x_2 >_1 + < y_1, y_2 >_2$$

(a) *Mostre que* $< \cdot, \cdot >_{H_1 \times H_2}$ *define um produto interno em* $H_1 \times H_2$.

(b) *Mostre que se* H_1 *e* H_2 *são espaços de Hilbert, então* $(H_1 \times H_2, < \cdot, \cdot >_{H_1 \times H_2})$ *é Hilbert.*

Exercício 16 *Seja* $a < b$, *mostre que as funções* $f_0, f_1, \ldots, f_p$ *dadas por* $f_i(t) = t^i$ *são linearmente independentes no espaço* $C[a,b]$.

Exercício 17 *Sejam* $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *a base canônica de* ℓ^2 *e* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de escalares em* $\mathbb{K}$. *Mostre que existe um operador* $A \in B(\ell^2)$ *satisfazendo*

$$Ae_j = \alpha_j e_j, \ \forall j \in \mathbb{N},$$

se, e somente se, $\sup|\alpha_j| < \infty$. *Em particular,* $\|A\| = \sup|\alpha_j|$.

Exercício 18 *Seja* $\{\alpha_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ *uma* ***matrix infinita*** *tal que* $\alpha_{i,j} \geqslant 0$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$. *Suponha ainda que existam escalares* $p_i > 0$ *e* $\alpha, \beta > 0$ *tais que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i,j} p_i \leqslant \beta p_j, \quad e \quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{i,j} p_j \leqslant \gamma p_i,$$

para todo $i,j \in \mathbb{N}$. *Mostre que existe um operador* $A \in B(\ell^2)$ *satisfazendo*

$$< Ae_j, e_i >= \alpha_{i,j}, \ \forall j \in \mathbb{N},$$

e que $\|A\| \leqslant \beta\gamma$.

Exercício 19 *Mostre que se* $\{e_j\}_{j=1}^n$ *é ortonormal em* $\mathcal{H}$ *e* $T \in B(\mathcal{H})$ *é definido por*

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j < x, e_j > e_j,$$

com $|\lambda_j| < 1$, *então* $(I - T)^{-1} = I + S$, *sendo*

$$Sx = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_j} < x, e_j > e_j.$$

Exercício 20 *Se* A *é um subconjunto de* $\mathcal{H}$, *então* $A^\perp$ *é subespaço fechado.*

Exercício 21 *Mostre que se* A *é um subespaço de* $\mathcal{H}$, *então* $\overline{A} = \mathcal{H}$ *se, e somente se,* $A^\perp = \{0\}$. *É necessária a hipótese* ***subespaço****?*

Exercício 22 *Considere* $X = \{\{x_j\} \in \ell^2;\ x_{2j} = 0\}$.

(i) *Mostre que* X *é subespaço fechado de* ℓ^2.

(ii) *Dtermine* $X^\perp$.

Exercício 23 *Sejam* Y *e* Z *subespaços vetoriais de* $\mathbb{X}$. *Mostre que* $\mathbb{X} = Y \oplus Z$, *se e somente se, para cada* $x \in X$ *existem* $y \in Y$ *e* $z \in Z$ *únicos tal que* $x = y + z$.

Exercício 24 *Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert*

1. *Mostre que* Z *é um subespaço fechado de* $\mathcal{H}$ *se, e somente se,* $Z = Z^{\perp\perp}$.

2. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{X}$. Mostre que $A^{\perp\perp}$ é o menor subespaço fechado que contem A.*

Exercício 25 *Sejam $\{e_k : k \in I\}$ um subconjunto ortonormal em $\mathcal{H}$ e $Z = \overline{Ger\{e_k : k \in I\}}$. Mostre que o operador projeção ortogonal $P : \mathcal{H} \to Z$ é dado por*

$$Px = \sum_{k \in I} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Exercício 26 *Considere o espaço $C[-1,1]$ com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$. Considere os subespaços de funções pares e ímpares respectivamente*

$$A = \{f \in C[-1,1] : f(-x) = f(x)\}, \quad B = \{f \in C[-1,1] : f(-x) = -f(x)\}.$$

Mostre que $A \perp B$ e que $C[-1,1] = A \oplus B$.

Exercício 27 *Seja $\{e_k : k \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço com produto interno X, mostre que*

$$\sum_{k \in I} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad x, y \in \mathbb{X}.$$

Exercício 28 *Seja M um subconjunto de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$.*

1. *Suponha que M é um subconjunto denso ou um conjunto total. Se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in M$, mostre que $x = y$.*

2. *Suponha que $\mathbb{X}$ é Hilbert. Se a igualdade $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in M$ implica que $x = y$, mostre que M é um conjunto total.*

Exercício 29 *Considere $\mathcal{B} = \{e_k : k \in I\}$ um subconjunto ortonormal em $\mathcal{H}$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes*

(a) *$\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert.*

(b) *para cada $x \in \mathcal{H}$ tem-se que $x = \sum_{k \in I} \langle x, e_k \rangle e_k$.*

(c) *para cada $x, y \in \mathcal{H}$ tem-se que $\langle x, y \rangle = \sum_{k \in I} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}$.*

Exercício 30 *Sejam $B = \{e_k : k \in I\}$ um subconjunto ortonormal em $\mathcal{H}$ e $x \in \mathcal{H}$. Mostre que*

$$x \in \overline{Ger(B)} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sum_{k \in I} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Exercício 31 *Um funcional antilinear limitado em $\mathcal{H}$ é uma função $g : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ que satisfaz:*

$$g(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} g(x) + \overline{\beta} g(y) \quad e \quad \|g\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|g(x)|}{\|x\|} < \infty.$$

Mostre que existe um único vetor $y \in \mathcal{H}$ tal que $g(x) = \langle y, x \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$ e que $\|g\| = \|y\|$.

Exercício 32 *Considere $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear limitado bijetivo com inverso limitado. Mostre que T^* é bijetivo e que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Exercício 33 *Considere os operadores lineares limitados* $T, L : \ell^2 \to \ell^2$ *cujas regras de correspondência para* $x = (x_k)$ *são dadas por*

$$Tx = (x_2, x_4, x_6, \ldots), \quad Lx = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \ldots).$$

Encontre a regra de correspondência dos adjuntos T^* *e* L^*.

Exercício 34 *Considere o espaço vetorial* $C[0,1]$ *com o produto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt.$$

Para o operador linear limitado $T : C[0,1] \to C[0,1]$ *dado por* $T(f)(t) = \int_0^t f(s)\, ds$, *encontre um operador linear limitado* $L : C[0,1] \to C[0,1]$ *tal que*

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle, \quad \forall f, g \in C[0,1].$$

Exercício 35 *Se* T *e* S *são operadores normais tal que* $TS^* = S^*T$ *e* $ST^* = T^*S$, *mostre que* $T + S$ *e* TS *são normais.*

Exercício 36 *Considere* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *um operador linear limitado. Se* T *é normal, mostre que* $\|T^2\| = \|T\|^2$.

Exercício 37 *Seja* $T_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *uma sequência de operadores lineares limitados normais tal que* $T_n \to T$. *Mostre que* T *é uma operador linear normal.*

Exercício 38 *Sejam* $T, S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *operadores lineares limitados autoadjuntos, mostre que* ST *é autoadjunto se, e somente se,* $ST = TS$.

Exercício 39 *Sejam* U, V *operadores unitários em* $\mathcal{H}$. *Mostre que*

(a) Se $\mathcal{H} \neq \{0\}$ *então* $\|U\| = 1$.

(b) U^{-1} *é unitário.*

(c) UV *é unitário.*

Exercício 40 *Mostre que um subespaço* Z *é denso em* $\mathcal{H}$ *se, e somente se,* $Z^\perp = \{0\}$.

Exercício 41 *Sejam* $M \leqslant \mathcal{H}$ *e* P_W *a projeção ortogonal de* $\mathcal{H}$ *sobre* M.

(i) Mostre que

$$\sup_{x \in \mathcal{H};\ \|x\|=1} \|P_W x\| = 1.$$

(ii) Mostre que $W^\perp$ *é é um subespaço vetorial fechado de* $\mathcal{H}$.

(iii) Qual deve ser a projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ *sobre* $W^\perp$*?*

(iv) Mostre que $(W^\perp)^\perp = W$.

(v) Mostre que $P_W \circ P_{W^\perp} = P_{W^\perp} \circ P_W = 0$;

Exercício 42 *Sejam* $E \leqslant \mathcal{H}$ *e* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *um operador linear contínuo. Dizemos que* T *é* E*-invariante se* $T(E) \subset E$. *Mostre que* T *é* E*-invariante se, e somente se,* $T \circ P_E = P_E \circ T$.

Exercício 43 *Sejam $E, F \subset \mathcal{H}$.*

(i) *Se $E \subset F$, então $F^{\perp} \subset E^{\perp}$ e $E^{\perp\perp\perp} = E^{\perp}$.*

(ii) *$E^{\perp\perp}$ é o menor subespaço vetorial fechado que contém o conjunto E. Se $E \leqslant \mathcal{H}$, então $\overline{E} = E^{\perp\perp}$.*

(iii) *$E \leqslant \mathcal{H} \Leftrightarrow E = E^{\perp\perp}$.*

Exercício 44 *Dado $A \subset \mathcal{H}$ defina os contjuntos*

$$\mathbb{A} = \bigcap_{\mathcal{A} \subset \mathcal{H}} \mathcal{A};\ \mathcal{A} \leqslant \mathcal{H} \quad e \quad A \subset \mathcal{A}.$$

e

$$Lin(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k;\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_k \in \mathbb{K},\ v_k \in A \right\}$$

(i) *Mostre que $\mathbb{A} \leqslant \mathcal{H}$.*

(ii) *Mostre que $\mathbb{A}$ é o menor subespaço fechado de $\mathcal{H}$ que contém A.*

(iii) *Mostre que $\mathbb{A} = \overline{Lin(A)}$.*

Exercício 45 *Se $f, g \in \mathcal{H}^*$ são tais que $Kern(f) = Kern(g)$, então existe $a \neq 0$ tal que $f = ag$.*

Exercício 46 *Considere $\ell^2 = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}};\ \sum_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |x_n|^2 < \infty\}$, o qual é Hilbert considerando o produto itnerno usual de ℓ^2.*

(i) *Se $\{\alpha_n\} \subset \ell^2$, então $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ converge para $|z| \leqslant 1$;*

(ii) *Mostre que se $|\lambda| < 1$ e $L : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ é definida por*

$$L(\{\alpha_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$$

obtenha $h_0 \in \mathcal{H}$ tal que $f(h) = < h, h_0 >$.

(iii) $||h_0|| =?$