MATE-7007 - Análise Funcional - Verão 2022

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 4

Exercício 1 *Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado (não trivial) e $\mathcal{N}^*$ seu dual. Então:*

(i) *se $0 \neq \eta \in \mathcal{N}$, então existe $f \in \mathcal{N}^*$ com $f(\eta) = \|\eta\|$ e $\|f\| = 1$.*

(ii) *se $\eta \neq \xi$, então existe $f \in \mathcal{N}^*$ com $f(\eta) \neq f(\xi)$.*

(iii) *se $f(\eta) = 0$, para todo $f \in \mathcal{N}^*$, então $\eta = 0$.*

(iv) *se $\xi \in \mathcal{N}$, então*

$$\|\xi\| = \sup_{0 \neq f \in \mathcal{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{\|f\|}.$$

Exercício 2 *Mostre que se $\mathcal{N}^*$ então $\mathcal{N}$ é separável.*

Exercício 3 *Seja $\mathcal{Z}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{N}$. Mostre que todo funcional linear limitado em Z é restrição de algum elemento de $\mathcal{N}^*$. Mostre que $\mathcal{Z}^* = \{f|_{\mathcal{Z}} \, ; \, f \in \mathcal{N}^*\}$.*

Exercício 4 *Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dois espaços normados (não triviais). Use o teorema de H-B par mostrar que se qualquer operador linear e limitado e não nulo $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é sobrejetor, então $dim(\mathcal{N}_2) = 1$.*

Exercício 5 *Seja p como no teorema de H-B complexo. Mostre que*

$$|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y), \ \forall x, y \in V.$$

Exercício 6 *Mostre que se um funcional sublinear num espaço normado é contínuo em 0, então é contínuo no espaço todo.*

Exercício 7 *Se $\mathcal{N} \neq \{0\}$, então $\mathcal{N}^* \neq \{0\}$.*

Exercício 8 *No conjunto $M = C[0,1]$ considere a relação $f \leq g$ a qual significa que $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Esta relação é uma ordem parcial? M é totalmente ordenado? Subconjuntos de M totalmente ordenados tem uma cota superior? M tem um elemento maximal?*

Exercício 9 *Seja p é um funcional sublinear definido no espaço vetorial $\mathbb{X}$.*

(a) *Mostre que $p(0) = 0$ e que $p(-x) \geq -p(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$.*

(b) *Se p for contínuo em $x = 0$, mostre que p é contínuo em qualquer $x \in \mathbb{X}$.*

(c) *Seja $r > 0$, mostre que o conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : p(x) \leq r\}$ é convexo.*

(d) *Mostre que $q(x) = \max_{|\alpha|=1} p(\alpha x)$ define uma seminorma em $\mathbb{X}$.*

Exercício 10 *Se $\mathbb{X}$ é um espaço normado. Mostre que* *(a) Para cada* $x_0 \in \mathbb{X}$, $x_0 \neq 0$ *e* $\beta > 0$, *existe* $f \in \mathbb{X}'$ *tal que* $f(x_0) = \beta \|x_0\|$ *e* $\|f\| = \beta$.

(b) $x = y$ *se e somente se* $f(x) = f(y)$ *para todo* $f \in \mathbb{X}'$.

Exercício 11 *Mostre que a função* $p : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$p(x) = \limsup_{k \to \infty} x_k, \quad x = (x_k) \in \ell^\infty,$$

é um funcional sublinear