MATE-7007 - Análise Funcional - Verão 2022

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 5

Exercício 1 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Banach. Mostre que $\mathbb{X}$ é reflexivo se, e somente se, $\mathbb{X}^*$ é reflexivo. Seja Z um subespaço fechado do espaço normado $\mathbb{X}$ e $x_0 \in \mathbb{X} \setminus Z$. Mostre que existe $f \in \mathbb{X}^*$ tal que*

$$\|f\| = \frac{1}{d(x_0, Z)}, \quad f\big|_Z \equiv 0, \quad f(x_0) = 1.$$

Exercício 2 *Seja M um subconjunto do espaço normado $\mathbb{X}$. Mostre que*

(a) *$x_0 \in \overline{Ger(M)}$ se, e somente se, $f(x_0) = 0$ para todo $f \in \mathbb{X}^*$ tal que $f\big|_M \equiv 0$.*

(b) *Mostre que M é total se, e somente se, para todo $f \in \mathbb{X}^*$ tal que $f\big|_M \equiv 0$ tem-se que $f \equiv 0$.*

Exercício 3 *Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços normados isometricamente isomorfos. Mostre que, se $\mathbb{X}$ é reflexivo então $\mathbb{Y}$ é reflexivo.*

Exercício 4 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado e $M \subseteq \mathbb{X}$, $N \subseteq \mathbb{X}^*$, considere os conjuntos anuladores:*

$$M^a = \{f \in \mathbb{X}^* : f(x) = 0, \quad \forall x \in M\}, \quad {}^aN = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = 0, \quad \forall f \in N\}.$$

(a) *Mostre que $(\overline{Ger(M)})^a = M^a$ e ${}^a\Big(\overline{Ger(N)}\Big) = {}^aN$.*

(b) *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T \in B(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$. Mostre que $Im(T)^a = Nu(T')$ e $Im(T) \subseteq {}^aNu(T')$.*

Exercício 5 *Um subconjunto U do espaço normado $\mathbb{X}$ é dito aberto fraco sequencial se tem a seguinte propriedade: Se $x \in U$ e $\{x_n\}$ é uma sequencia em $\mathbb{X}$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$ então existe n_0 tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Mostre que todo subconjunto aberto fraco sequencial é um conjunto aberto.*

Exercício 6 *Seja $\mathbb{X}$ m espaço de Banach considere $\{T_n\}$, T, $\{S_n\}$ e S elementos de $B(\mathbb{X}; \mathbb{X})$. Mostre que*

(a) *Se $T_n \to T$ forte e $S_n \to S$ fraco então $S_nT_n \to ST$ fraco.*

(b) *Se $T_n toT$ fraco e $S_n \to S$ forte então $S_nT_n \to ST$ fraco.*

Exercício 7 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados. Se $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é um operador linear que leva sequências fortemente convergentes para 0 em sequências fracamente convergentes para 0, mostre que T é contínuo.*

Exercício 8 *Se $\phi_n \xrightarrow{w} \phi$ em $C[a, b]$, mostre que $\phi_n(t) \to \phi(t)$ para cada $t \in [a, b]$.*

Exercício 9 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços métricos e $h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função bijetiva. Mostre que h é uma aplicação aberta se, e somente se, h^{-1} é contínua.*

Exercício 10 *Considere $\mathbb{X}$ o subespaço de ℓ^∞ cujos elementos são as sequências que tem no máximo um numero finito de entradas não nulas. Mostre que o operador linear $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ dado por*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots),$$

é uma aplicação aberta. T^{-1} é uma aplicação aberta?

Exercício 11 *Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado onde $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ são espaços de Banach. Se T é bijetivo, mostre que existem constantes positivas $c_1,\ c_2$ tal que*

$$c_1\|x\| \leq \|Tx\| \leq c_2\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Exercício 12 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados. Mostre que a projeção $P : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, $P(x, y) = x$ é uma aplicação aberta.*

Exercício 13 *Consideremos o espaço vetorial $C^1[0,1]$ com a norma $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Mostre que o operador diferenciação $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ dada por $Tf = f'$ é uma aplicação aberta.*

Exercício 14 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Banach e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado e injetivo. Mostre que sua inversa: $T^{-1} : Im(T) \subseteq \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é um operador linear limitado, se e somente se, $Im(T)$ é fechado.*

Exercício 15 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear fechado. Mostre que*

(a) Se $A \subseteq \mathbb{X}$ é compacto, então $T(A)$ é fechado.

(b) Se $B \subseteq \mathbb{Y}$ é compacto, então $T^{-1}(B) := \{x \in \mathbb{X} : Tx \in B\}$ é fechado.

Exercício 16 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é um operador linear fechado injetivo. Mostre que*

1. *T^{-1} é um operador fechado.*
2. *Se T^{-1} é limitado e $\mathbb{X}$ é completo, então $Im(T)$ é fechado.*
3. *Se $Im(T)$ é fechado e $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ são completos, então T^{-1} é limitado.*

Exercício 17 *Considere o operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ dado por*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$$

Mostre que

(a) T é limitado e calcule sua norma.

(b) $Im(T)$ não é fechado.

(c) T é injetiva, porém $T^{-1} : Im(T) \subseteq \ell^2 \to \ell^2$ não é limitado.

(d) Se trocamos ℓ^2 por ℓ^p com $1 \leq p \leq \infty$ valem os resultados anteriores?

Exercício 18

Exercício 19 *Uma sequência $\{x_n\} \subset \mathcal{N}$ é dita **fracamente de Cauchy** se paraq todo $f \in \mathcal{N}^*$ a sequência $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy.*

(i) Mostre que uma sequência fracamente de Cauchy é limitada.

(ii) Considere $A \subset \mathcal{N}$ tal que todo subconjutno de A possui uma sequência fracamente de Cauchy. Mostre que A é limitado.

Exercício 20 *Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = x$ é aberta.*

Exercício 21 *Sejam X e Y dois espaços de Banach e $T : X \to Y$ linear, contínuo e injetivo. Mostre que $T^{-1} : T(X) \to X$ é limtiado se, e somente se, $T(X)$ éf echado em Y.*

Exercício 22 *Considere $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal. Considere o operador $P_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por*

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} < e_j, x > e_j.$$

Mostre que $P_n \xrightarrow{s} I$.

Exercício 23 *Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dois espaços normados e $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ linear e fechado.*

(i) Se T^{-1} existe, então é fechado.

(ii) Se $S \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, então $T + S$ é fechado.

(iii) Se $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}$, então para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ temos que $Ker(T - \lambda I)$ é fechado.