Notas de Aula

(ainda em preparação!)

Análise Funcional

Higidio Portillo Oquendo

http://www.ufpr.br/∼higidio

Última atualização: 4 de janeiro de 2022

Sumário

Capítulo 1

Resumo de Métricas, Normas e Produtos Internos

1.1 Métricas

Uma métrica é uma forma de medir a distância entre dois pontos de um conjunto. Por exemplo a distância entre dois números reais x e y é comummente denotada por $d(x,y) := |x-y|$ onde $|\cdot|$ denota o valor absoluto. Verifica-se facilmente que esta distância satisfaz as seguintes propriedades: (i) $d(x,y) > 0$ se, e somente se, $x \neq y$, (ii) $d(x,y) = d(y,x)$, e (iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Esta última pode ser verificada da seguinte forma:

$$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y).$$

Esta noção de distância pode ser generalizada para espaços abstratos quaisquer com a condição de que estas 3 propriedades sejam preservadas.

Definição: Seja $\mathbb{X}$ um conjunto. Uma métrica (ou distância) em $\mathbb{X}$ é uma função $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes axiomas

(D1) $d(x,y) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq y$. (Positividade)

(D2) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$. (Simetria)

(D3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{X}$. (Desigualdade Triangular)

Um conjunto $\mathbb{X}$ munido de uma métrica d é chamado de *Espaço Métrico* e quando seja necessário este será denotado por $(\mathbb{X}, d)$.

Observação. Dos axiomas acima podemos inferir que

$$d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

De fato, se $d(x,y) = 0$, por (D1) x não pode ser distinto de y, logo $x = y$. Reciprocamente, se temos que $y = x$, considerando $z = x$ em (D3) segue que

$d(x,x) \leq d(x,x) + d(x,x)$. Esta desigualdade implica que $d(x,x) \geq 0$. Agora por (D1) temos que $d(x,x) \not> 0$, logo $d(x,x) = 0$.

Exemplo: Seja $\mathbb{X}$ um conjunto qualquer não vazio. A função $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x,y) = 1, \text{ para } x \neq y, \quad \text{e} \quad d(x,x) = 0,$$

é uma métrica em $\mathbb{X}$. Provemos (D3), os restantes ficam como exercício para o leitor. De fato quando $x = y$ a desigualdade triangular é imediata. Se $x \neq y$ temos que para qualquer $z \in \mathbb{X}$ fixado, este será diferente de pelo menos um dos elementos x, y, assim um dos valores de $d(x,z)$, $d(z,y)$ é 1. Consequentemente

$$d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Exemplo: Consideremos o conjunto de sequências reais,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}); = \{x = (x_n) : (x_n) \text{ é uma sequência em } \mathbb{R}\}. \tag{1.1}$$

A função $d : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)}, \quad \text{onde} \quad x = (x_n),\ y = (y_n),$$

é uma métrica em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. De fato, o leitor pode verificar facilmente as propriedades (D1) e (D2). A propriedade (D3) pode ser obtida da seguinte forma: consideremos a função $f(t) = t/(1+t)$ definida em $[0, \infty[$. Como $f'(t) = 1/(1+t)^2 > 0$, f é uma função crescente, portanto $f(|x_n - y_n|) \leq f(|x_n - z_n| + |z_n - y_n|)$, isto é,

$$\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq \frac{|x_n - z_n| + |z_n - y_n|}{1 + |x_n - z_n| + |z_n - y_n|} \leq \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|}.$$

Usando esta desigualdade obtemos que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

1.2 Normas

Lembremos que um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é um conjunto $\mathbb{X}$ que tem duas operações binárias definidas

$$+ : \underset{(x,y)\ \mapsto\ x+y}{\mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}} \quad \text{e} \quad \cdot : \underset{(\alpha,x)\ \mapsto\ \alpha x}{\mathbb{K} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}},$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

1. Elemento neutro aditivo: Existe $0 \in \mathbb{X}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{X}$.

2. Elemento inverso: Para cada $x \in \mathbb{X}$ existe $-x \in \mathbb{X}$ tal que $x + (-x) = 0$.

3. Comutatividade: $x + y = y + x$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$.

4. $1x = x$ para todo $x \in \mathbb{X}$ (1 é o elemento neutro multiplicativo de $\mathbb{K}$)

5. Associatividade:
$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{X},\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

6. Distributividade:
$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x, y \in \mathbb{X},\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

O espaço $\mathbb{X}$ é dito espaço vetorial real se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e é um espaço vetorial complexo se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exemplo: O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$ de funções reais definidas num conjunto $\mathbb{X}$ com as operações
$$(f + g)(t) := f(t) + g(t), \quad (\alpha f)(t) := \alpha f(t), \quad t \in \mathbb{X}$$
é um espaço vetorial real. Um caso particular é o espaço de sequências reais que na verdade são funções definidas em $\mathbb{N}$, isto é, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(\mathbb{N}; \mathbb{R})$.

No que segue introduzimos a noção de norma, que a grosso modo é um conceito que generaliza a noção de módulo ou comprimento de um vetor.

Definição: Uma norma no espaço vetorial $\mathbb{X}$ é uma função $\|\cdot\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes axiomas

(N1) $\|x\| > 0$ para todo $x \neq 0$, (Positividade)

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, (Homogeneidade)

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$. (Desigualdade Triangular)

Um espaço vetorial $\mathbb{X}$ munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado de *Espaço Normado* e quando necessário denotaremos por $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$.

Observações:

1. Dos axiomas acima podemos obter que
$$\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$
De fato, se $\|x\| = 0$, por (N1) temos que x não pode ser não nulo, logo $x = 0$. Reciprocamente, se $x = \vec{0}$ (neste caso usamos a setinha para diferenciar do escalar nulo), então temos que $\|x\| = \|\vec{0}\| = \|0\vec{0}\| = 0\|\vec{0}\| = 0$.

2. Em vários exemplos encontraremos funções $\|\cdot\|$ que satisfazem os axiomas (N2) e (N3) porém não necessariamente satisfazem (N1), não entanto satisfazem a condição menos restritiva:
$$(\text{N1})' \quad \|x\| \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{X}.$$

Funções $\|\cdot\|$ que satisfazem (N1)$'$, (N2) e (N3) são chamadas de seminormas. Um exemplo é a função $\|(x,y)\| := |x|$ no espaço $\mathbb{R}^2$, pois satisfaz (N1)$'$ porém não satisfaz (N1). Também, deixamos para o leitor verificar que toda norma é uma seminorma.

Exemplo: Seja $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ um espaço normado. A função definida por

$$d(x,y) := \|x-y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{X},$$

é uma métrica em $\mathbb{X}$ chamada de *métrica induzida pela norma* $\|\cdot\|$. A prova desta afirmação é deixada para o leitor.

Exemplo: No espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), Consideremos as funções

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \; p \geq 1, \qquad \|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\},$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Verifica-se facilmente que (N1) é válida. verifiquemos (N2):

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda|^p |x_i|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p \\ \|\lambda x\|_\infty &= \max\{|\lambda||x_i| : i = 1, \ldots, n\} = |\lambda| \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\} = |\lambda| \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Pode-se verificar rapidamente que (N3) é satisfeita para $p = 1$ e $p = \infty$. Nos outros casos a verificação não é imediata, na verdade veremos que (N3) é consequência da desigualdade de Minkowski que será estudada posteriormente.

Exemplo: No espaço vetorial das funções contínuas $C[a,b]$ a função

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [a,b]} |f(t)|,$$

é uma norma. Deixaremos que o leitor verifique (N1)-(N2). Provemos (N3): desde que

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \quad \forall t \in [a,b],$$

o resultado segue aplicando o máximo no intervalo $[a,b]$ nesta desigualdade..

Exemplo: Consideremos $\mathcal{R}(a,b)$ o espaço das funções reais Riemann integráveis definidas no intervalo $[a,b]$. Neste espaço definimos a função

$$\|f\| := \int_a^b |f(t)| \, dt, \quad f \in \mathcal{R}(a,b). \tag{2.2}$$

Pode-verificar que esta função satisfaz as condições de seminorma, porém não é uma norma. De fato, se consideramos a função f definida por $f(a) = 1$ e $f(t) = 0$, $t \in]a,b]$ temos que $f \in \mathcal{R}(a,b)$, $f \not\equiv 0$ porém $\|f\| = 0$, isto é o axioma (N1) não é satisfeito.

Exemplo: Consideremos o subespaço do espaço vetorial das sequências $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{R}) := \{x = (x_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : (x_n) \text{ é limitada}\}.$$

A função dada por

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

é uma norma em ℓ^∞. Os detalhes são deixados pro leitor.

Exemplo: Para cada $p \geq 1$, consideremos o subconjunto de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{R}) := \left\{ x = (x_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$

e nele definamos a função dada por

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Nestas condições veremos que ℓ^p é um subespaço vetorial de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\|\cdot\|_p$ é uma norma neste subespaço. A prova de ℓ^p ser fechado em relação a soma de vetores (condição necessária para ser subespaço vetorial de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) e a desigualdade triangular de $\|\cdot\|_p$, são consequências da desigualdade de Minkowski que será estudada posteriormente. Verifiquemos (N1) e (N2). Se $x = (x_n) \neq 0$ então pelo menos uma das suas componentes é diferente de zero portanto $\|x\|_p > 0$. Agora, se $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda x = (\lambda x_n)$ logo

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p.$$

1.3 Desigualdades de Young, Holder e Minkowski

Definição: Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa se

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

Theorem 1.3.1 *Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$. f é convexa se e somente se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Proof: E. Lima, *Curso de Análise Vol. 1*, Projeto Euclides, Impa, 1992. (Pag 227). □

Exemplo: A função $f(x) = \exp(x)$ é convexa, pois $f''(x) = \exp(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Theorem 1.3.2 (Desigualdade de Young) *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ tal que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (p \text{ e } q \text{ são ditos conjugados})$$

então,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proof: Se $a = 0$ ou $b = 0$ a desigualdade vale. Consideremos $a > 0$ e $b > 0$ e observe que

$$ab = \exp(\ln(ab)) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp\left(\frac{\ln(a^p)}{p} + \frac{\ln(b^q)}{q}\right)$$

desde que a função exp é convexa temos que

$$ab \leq \frac{\exp(\ln(a^p))}{p} + \frac{\exp(\ln(b^q))}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

$\square$

Theorem 1.3.3 (Desigualdade de Hölder) *Sejam (a_n) (b_n) sequências de números reais não negativos tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^q < \infty,$$

onde $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{1/q}.$$

Proof: Denotemos com

$$A = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p}, \quad B = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{1/q}.$$

Se A ou B se anulam então a desigualdade é imediata pois uma das sequências seria nula. Suponhamos então que A e B não se anulam. Em vista da desigualdade de Young temos que

$$\frac{a_n b_n}{AB} \leq \frac{a_n^p}{pA^p} + \frac{b_n^q}{qB^q}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

assim,

$$\frac{1}{AB}\sum_{n=1}^{m} a_n b_n \leq \frac{1}{pA^p}\sum_{n=1}^{m} a_n^p + \frac{1}{qB^q}\sum_{n=1}^{m} b_n^q \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Portanto a serie do lado esquerdo converge e

$$\frac{1}{AB}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq 1,$$

de onde segue o resultado desejado. □

Observação:

1. Se $x = (x_n) \in \ell^p$ e $y = (y_n) \in \ell^q$ onde $p, q > 1$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, então a sequência $z = (x_n y_n) \in \ell^1$, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}.$$

2. Identificando $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ podemos considerar que o espaço $\mathbb{R}^n$ é um subespaço de qualquer ℓ^p. Logo, se $p, q > 1$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, vale a desigualdade

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_n|^q\right)^{1/q}, \forall\ (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Theorem 1.3.4 (Desigualdade de Minkowski) *Seja $p \geq 1$. Se (a_n) (b_n) sequências de números reais não negativos tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^p < \infty,$$

então,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p\right)^{1/p}.$$

Proof: Se $p = 1$ a desigualdade se verifica. Consideremos $p > 1$. Fixando $m \in \mathbb{N}$, observe que

$$\sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)^p = \sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)(a_n + b_n)^{p-1} = \sum_{n=1}^{m} a_n (a_n + b_n)^{p-1} + \sum_{n=1}^{m} b_n (a_n + b_n)^{p-1}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, com p e $q = p/(p-1)$ às duas últimas somatórias temos que

$$\sum_{n=1}^{m}(a_n+b_n)^p \leq \left\{ \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{m} b_n^p\right)^{1/p} \right\} \left(\sum_{n=1}^{m}(a_n+b_n)^p\right)^{1-1/p},$$

de onde segue que

$$\left(\sum_{n=1}^{m}(a_n+b_n)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p\right)^{1/p}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Elevando à potência p segue que a série do lado esquerdo converge e temos a desigualdade desejada. $\square$

Desigualdade Triangular de $\|\cdot\|_p$ em ℓ^p e $\mathbb{R}^n$: Considere $x = (x_k)$ e $y = (y_k)$ dois elementos de ℓ^p, então de (3.3) temos que

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{m}(|x_n| + |y_n|)^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p}\right]^p, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

isto é, $x+y \in \ell^p$ e $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Logo, ℓ^p é um subespaço vetorial de $S(\mathbb{R})$ e $\|\cdot\|_p$ é uma norma definida nesse espaço. Agora para mostrar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$ basta identificar $\mathbb{R}^n$ como subespaço de ℓ^p, isto é, para $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$ consideramos os vetores o identificam em ℓ^p

$$\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots), \quad \hat{y} = (y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots),$$

assim temos que

$$\|x+y\|_p = \|\hat{x}+\hat{y}\|_p \leq \|\hat{x}\|_p + \|\hat{y}\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

1.4 Produtos Internos

Definição: Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um produto interno em $\mathbb{X}$ é uma função $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $\langle x, x \rangle > 0$, para todo $x \neq 0$,

(P2) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$,

(P3) $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, para todo $x, y, z \in \mathbb{X}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Um espaço vetorial $\mathbb{X}$ munido de um produto interno $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ é chamado de *Espaço com produto interno* e quando necessário usaremos a notação $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Observações: Segue dos axiomas acima que

1. Se $\langle x, x \rangle = 0$, então $x = 0$ (pois em caso contrário contradize(P1)).
2. $\langle 0, y \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$, para todo $y \in \mathbb{X}$. (Pois, $\langle 0, y \rangle = \langle 0 + 0, y \rangle = \langle 0, y \rangle + \langle 0, y \rangle$)
3. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, para todo $x, y, z \in \mathbb{X}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
4. $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$, para todo $x, y, z \in \mathbb{X}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Exemplo: Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$ vetores de $\mathbb{C}^n$. A função dada por

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i,$$

é um produto interno em $\mathbb{C}^n$. Os detalhes são deixados pro leitor.

Exemplo: Sejam $x = (x_k), y = (y_k)$ elementos de $\ell^2(\mathbb{C})$. A função dada por

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k, \tag{4.4}$$

é um produto interno em $\ell^2(\mathbb{C})$. Os detalhes são deixados pro leitor.

Exemplo: Sejam $f, g \in C([0,1]; \mathbb{C}) = \{h = h_1 + ih_2 : h_1, h_2 \in C[0,1]\}$. A função dada por

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

é um produto interno nesse espaço vetorial. Os detalhes são deixados pro leitor.

Exemplo: Seja $(\mathbb{X}, \langle \cdot\, , \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno, então a função

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{X}, \tag{4.5}$$

é uma norma em $\mathbb{X}$. O leitor pode verificar as propriedades (N1) e (N2). A propriedade (N3) será verificada após a desigualdade de Cauchy-Schwarz. A norma definida acima é chamada de *Norma induzida pelo produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Theorem 1.4.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *A função definida em (4.5) satisfaz a seguinte desigualdade*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Proof: Se $y = 0$ a desigualdade é obvia. Suponhamos então que $y \neq 0$. observe que para qualquer $t \in \mathbb{K}$ temos que

$$0 \leq \langle x - ty, x - ty \rangle = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, ty \rangle + |t|^2 \|y\|^2$$

em particular, tomando $t = \frac{\langle x,y \rangle}{\|y\|^2}$ tem-se que $\langle x, ty \rangle = |\langle x, y \rangle|^2 / \|y\|^2$, portanto

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2},$$

de onde segue o resultado desejado. $\square$

Prova da desigualdade triangular para a "norma induzida" definida em (4.5):

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

aplicando raiz quadrada segue o resultado desejado.

Exemplo: Do teorema anterior segue que a função

$$x \mapsto \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2},$$

é uma norma em $\ell^2(\mathbb{C})$ induzida pelo produto interno definido em (4.4).

1.5 Exercícios

1. Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico. Mostre as desigualdades

   (a) $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$.

   (b) $|d(x_1,y_1) - d(x_2,y_2)| \leq d(x_1,x_2) + d(y_1,y_2)$, $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{X}$.

2. Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico. Para $A, B \subseteq \mathbb{X}$ e $x \in \mathbb{X}$ consideremos as distâncias entre conjuntos

$$D(A,B) := \inf_{\substack{x \,\in\, A \\ y \,\in\, B}} d(x,y), \quad D(x,B) := \inf_{z \in B} d(x,z).$$

   (a) Mostre que D não é uma métrica no conjunto $\{A : A \subseteq \mathbb{X}\}$.

   (b) Mostre que $|D(x,B) - D(y,B)| \leq d(x,z)$, para todo $x, y \in \mathbb{X}$.

3. Sejam $(\mathbb{X}_1, d_1)$, $(\mathbb{X}_2, d_2)$ espaços métricos. Mostre que a função

$$d(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2},$$

   para $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, é uma métrica em $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$. Seguidamente, identifique o conjunto $\mathbb{C}$ como produto cartesiano do conjunto de números reais e mostre que $d(z,w) = |z - w|$ (módulo de uma diferença de números complexos) é uma métrica em $\mathbb{C}$.

4. Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial e d uma métrica em $\mathbb{X}$ satisfazendo as seguintes propriedades

   (a) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$, para todo $x, y \in \mathbb{X}$ e escalares α,

   (b) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{X}$.

   Mostre que d é uma métrica induzida por alguma norma em $\mathbb{X}$, isto é, existe uma norma, $\|\cdot\|$ em $\mathbb{X}$ tal que

$$d(x,y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

5. Seja $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ um espaço normado.

   (a) Mostre que a aplicação $d_0(x,y) := \sqrt{\|x-y\|}$ é uma métrica em $\mathbb{X}$. A aplicação $\|x\|_0 := \sqrt{\|x\|}$ é uma norma em $\mathbb{X}$?

   (b) A aplicação $d_2(x,y) = \|x-y\|^2$ é uma métrica em $\mathbb{X}$? Justifique sua resposta.

6. Se $\|\cdot\|$ é uma norma no espaco vetorial $\mathbb{X}$ mostre que

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

7. Seja $\|\cdot\|$ uma seminorma no espaço vetorial $\mathbb{X}$. Vejamos que podemos reformular o espaço $\mathbb{X}$ para que a seminorma se torne uma norma. Para $x, y \in \mathbb{X}$ escrevemos

$$x \sim y \quad \text{se} \quad \|x - y\| = 0.$$

   (a) Mostre que "$\sim$" é uma relação de equivalência.

   (b) Considere o conjunto $\widetilde{\mathbb{X}}$ de todas as classes de equivalência $[x]$, $x \in \mathbb{X}$. Mostre que as operações

$$[x] + [y] := [x + y], \quad \lambda[x] := [\lambda x], \ (\lambda \text{ escalar})$$

   estão bem definidas, isto é, o resultado independe dos representantes de cada classe, e com estas operações, mostre que $\widetilde{\mathbb{X}}$ é um espaço vetorial.

   (c) Se definimos $\|[x]\|_{\sim} := \|x\|$, $x \in \mathbb{X}$, mostre que esta função bem definida e é uma norma em $\widetilde{\mathbb{X}}$. Desta forma, por simplicidade denotamos $[x]$ por seu representante x (que equivale a denotar $\widetilde{\mathbb{X}}$ por $\mathbb{X}$), então podemos dizer que a seminorma se torna uma norma em $\mathbb{X}$.

   (d) Aplique os itens anteriores para que a seminorma

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

   se torne uma norma em $\mathcal{R}(a, b)$.

8. No espaço vetorial $C(]0, 1[)$ definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a função

$$N_n(f) = \max\{|f(x)| : x \in [1/n, 1 - 1/n]\}.$$

   (a) N_n é uma norma em $C(]0, 1[; \mathbb{R})$? Justifique sua resposta.

   (b) Mostre que

$$d(f, g) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{N_n(f - g)}{2^n(1 + N_n(f - g))},$$

   é uma métrica em $C(]0, 1[; \mathbb{R})$. Esta métrica é induzida por alguma norma? Justifique sua resposta.

9. para $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ considere

$$\|z\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}, \quad \|z\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}.$$

   (a) Faça um gráfico da bola unitária $B_p = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\|_p \leq 1\}$ quando $p = 1, 2, 4, \infty$, e $1/2$.

   (b) Mostre que $\|\cdot\|_p$ não é uma norma em $\mathbb{R}^2$ quando $0 < p < 1$.

10. Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial, um subconjunto M de $\mathbb{X}$ é dito convexo se para todo $x, y \in M$ tem-se que $tx + (1-t)y \in M$ com $0 \leq t \leq 1$.

    (a) Mostre que para toda norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{X}$ a bola unitária $\{x \in \mathbb{X} : \|x\| \leq 1\}$ é convexa.

    (b) Mostre que $\{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|z\|_{1/2} = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2 \leq 1\}$ não é um conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$.

11. Mostre que a desigualdade de Holder é satisfeita para $p = 1$ e $q = \infty$, isto é, se $x = (x_n) \in \ell^1$ e $y = (y_n) \in \ell^\infty$ então

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

12. Seja $1 < p < \infty$. Mostre que valem as seguintes desigualdades para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 \leq n^{(p-1)/p} \|x\|_p, \quad \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty.$$

13. Dizemos que duas normas $\|\cdot\|_0$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes num espaço vetorial $\mathbb{X}$ se existem constantes positivas c_1, c_2 tal que

$$c_1 \|x\|_0 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_0, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

    Para $1 \leq p < q \leq \infty$, mostre que as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_q$ são equivalentes no espaço $\mathbb{R}^n$.

14. Seja $s > 0$ mostre que existem constantes C_1, C_2 não negativas tal que $C_1(a^s + b^s) \leq (a+b)^s \leq C_2(a^s + b^s)$ para todo a, b não negativos.

15. Mostre a desigualdade de Young Generalizada: Se $a_1, \ldots, a_n$ são números não negativos e $p_1, \ldots, p_n$ são números maiores que um tal que $\sum_{i=1}^n 1/p_i = 1$ então

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{p_i}}{p_i}$$

16. Se $1 < p < q < \infty$, mostre que

$$\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^q \subseteq \ell^\infty,$$

    e que as inclusões são próprias.

17. Considere o conjunto $\ell_0^\infty = \{(x_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : x_n \to 0\}$.

    (a) Mostre que $\ell^p \subseteq \ell_0^\infty \subseteq \ell^\infty$, para todo $p \geq 1$.

(b) Mostre que existe um elemento em ℓ_0^∞ que não pertence a nenhum ℓ^p com $p \geq 1$.

18. No espaço vetorial $C[0,1]$ mostre que as normas

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx, \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

não são equivalentes.

19. No espaço vetorial $C^1[0,1]$ considere as normas

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad \|f\|_0 := \|f'\|_\infty + |f(0)|.$$

(a) Mostre que as normas $\|\cdot\|_{C^1}$ e $\|\cdot\|_0$ são equivalentes

(b) Mostre que a norma $\|\cdot\|_\infty$ não é equivalente com as anteriores.

20. Seja $f \in C[a,b]$, sabe-se que

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{\|P\|\to 0} s(f,P),$$

onde $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$, $\|P\| = \max\{t_i - t_{i-1} : 0 \leq i \leq n\}$ e

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \quad \text{com} \quad \tau_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

Sejam $p, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, mostre que:

(a) Vale a desigualdade de Holder: para todo par de funções não negativas $f, g \in C[a,b]$ tem-se que

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\, dt\right)^{1/q}.$$

(b) A função

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$$

é uma norma em $C[a,b]$.

21. Seja $(\mathbb{X}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial real ou complexo. Denotemos com $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto escalar.

(a) Mostre que $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$ se, e somente se, os vetores x e y são linearmente dependentes.

(b) Mostre que $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$ se, e somente se, um dos vetores é um múltiplo não negativo do outro.

22. Seja $(\mathbb{X}, \langle \cdot\,, \cdot\rangle)$ um espaço vetorial complexo com produto interno e seja $\|\cdot\|$ a norma induzida.

(a) Mostre a seguinte relação é satisfeita

$$\operatorname{Re}\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

(b) Mostre que vale a *identidade de polaridade*:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Dica: $\langle x, y\rangle = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle + i\operatorname{Im}\langle x, y\rangle = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle + i\operatorname{Re}(-i\langle x, y\rangle) = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle + i\operatorname{Re}(\langle x, iy\rangle)$.

23. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Mostre que a norma $\|\cdot\|_p$ no espaço vetorial ℓ^p é induzida por um produto interno se, e somente se, $p = 2$.

Capítulo 2

Noções Topológicas em Espaços Métricos

2.1 Abertos, Fechados e Funções Contínuas

Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico, então qualquer subconjunto $Z \subseteq \mathbb{X}$ também é um espaço métrico com a métrica d herdada de $\mathbb{X}$ a qual será chamada de *subespaço métrico.*

Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico, uma *bola aberta* com centro $x_0 \in \mathbb{X}$ e raio $r > 0$ é definido pelo conjunto

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{X} : d(x, x_0) < r\}.$$

Observação: Se $Z \subseteq \mathbb{X}$, para $x_0 \in Z$ a bola $B_r^Z(x_0)$ em Z não necessariamente coincide com a bola $B_r^{\mathbb{X}}(x_0)$ em $\mathbb{X}$. De fato, se em $\mathbb{R}$ consideramos o subconjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, temos que $B_1^{\mathbb{R}}(2) =]1, 3[$, enquanto que $B_1^{\mathbb{Z}}(2) = \{2\}$. O leitor pode provar que $B_r^Z(x_0) = B_r^{\mathbb{X}}(x_0) \cap Z$.

Definição: Dizemos que x_0 é um ponto interior do subconjunto $A \subseteq \mathbb{X}$ se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B_\epsilon(x_0) \subseteq A.$$

O conjunto de pontos interiores de A será denotado por $\mathrm{int}(A)$ ou $\overset{\circ}{A}$. Observamos da definição que $\mathrm{int}(A) \subseteq A$.

Exemplo: consideremos o conjunto $A = [0, 1[\times[0, 1[$ de $\mathbb{R}^2$, vejamos que $\mathrm{int}(A) =]0, 1[\times]0, 1[$. De fato, seja $(x_0, y_0) \in B :=]0, 1[\times]0, 1[$ então tomando $\epsilon = \min\{x_0, 1 - x_0, y_0, 1 - y_0\} > 0$ temos que $B_\epsilon(x_0, y_0) \subseteq A$ (verifique!), logo $B \subseteq \mathrm{int}(A)$. Por outro lado, o leitor pode verificar que para $(x_0, y_0) \in A \setminus B$, não existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0, y_0) \subseteq A$ (verifique!), oque mostra que $\mathrm{int}(A) \cap (A \setminus B) = \emptyset$. Como $\mathrm{int}(A) \subseteq A$ e $A = B \cup (A \setminus B)$ segue que $\mathrm{int}(A) \subseteq B$. Consequentemente $\mathrm{int}(A) = B$.

Definição: Dizemos que um subconjunto $A \subseteq \mathbb{X}$ é aberto se $A \subseteq \mathrm{int}(A)$.

Observação: Desde que a inclusão $\mathrm{int}(A) \subseteq A$ é sempre válida, o conjunto A será aberto se e somente se $A = \mathrm{int}(A)$.

Exemplo: toda bola aberta $B_r(x_0)$ de um espaço métrico $\mathbb{X}$ é um conjunto aberto (o que justifica o nome: *bola aberta*). De fato, seja $x_1 \in B_r(x_0)$, consideremos $\epsilon = r - d(x_1, x_0) > 0$ e verifiquemos que $B_\epsilon(x_1) \subseteq B_r(x_0)$: para $x \in B_\epsilon(x_1)$ temos que

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < \epsilon + d(x_1, x_0) = r \quad \Rightarrow \quad d(x, x_0) < r,$$

portanto $x \in B_r(x_0)$, logo $B_\epsilon(x_1) \subseteq B_r(x_0)$. Assim $x_1 \in \text{int}(B_r(x_0))$ e da arbitrariedade do ponto tomado temos que $B_r(x_0) \subseteq \text{int}(B_r(x_0))$, isto é, $B_r(x_0)$ é um conjunto é aberto.

Exemplo: Seja $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Se $A \subseteq \mathbb{X}$ é um conjunto aberto, mostremos que para qualquer $B \subseteq \mathbb{X}$, o conjunto

$$A + B := \{x + y : x \in A, \quad y \in B\}$$

também é aberto. De fato, seja $z_0 \in A + B$. Segundo a definição, existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tal que $z_0 = x_0 + y_0$. Como A é aberto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subseteq A$. Mostremos que $B_\epsilon(z_0) \subseteq A + B$: Seja $z \in B_\epsilon(z_0)$ então

$$\|z - (x_0 + y_0)\| < \epsilon.$$

Dai segue que o vetor $x := z - y_0$ pertence a $B_\epsilon(x_0) \subseteq A$, isto é, $z = x + y_0 \in A + B$. Assim $z_0 \in \text{int}(A + B)$ e consequentemente $A + B \subseteq \text{int}(A + B)$.

Theorem 2.1.1 *Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico, então*

1. *Os conjuntos $\mathbb{X}$ e $\emptyset$ são abertos.*
2. *A interseção de um número finito de conjuntos abertos é aberto.*
3. *A união de uma coleção arbitrária de conjuntos abertos é aberto.*

Proof: Desde que $\text{int}(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$ e $\text{int}(\emptyset) = \emptyset$ segue que estes conjuntos são abertos. Para mostrar o segundo item consideramos $A_1, \ldots A_n$ conjunto abertos e denotemos com $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Seja $x_0 \in A$ então $x_0 \in A_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e como cada um destes conjuntos é aberto, para cada um deles existe $\epsilon_i > 0$ tal que $B_{\epsilon_i}(x_0) \subseteq A_i$. Agora considerando $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\} > 0$ segue que $B_\epsilon(x_0) \subseteq A_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, portanto $B_\epsilon(x_0) \subseteq A$, de onde segue que $A \subseteq \text{int}(A)$. Para o terceiro item, consideremos a coleção de subconjuntos abertos $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ e mostremos que $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é um conjunto aberto. De fato, seja $x_0 \in A$, então existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_0 \in A_{\lambda_0}$ e portanto $B_\epsilon(x_0) \subseteq A_{\lambda_0} \subseteq A$ para algum $\epsilon > 0$, mostrando assim que $A \subseteq \text{int}(A)$. $\square$

Observação: Uma coleção τ de subconjuntos de $\mathbb{X}$ que contem $\mathbb{X}$, $\emptyset$, interseções finitas e uniões arbitrárias de seus elementos é chamada de *uma topologia em* $\mathbb{X}$ e o espaço $(\mathbb{X}, \tau)$ é chamado de espaço topológico. O teorema anterior mostra que a coleção de conjuntos abertos do espaço métrico $(\mathbb{X}, d)$ é uma topologia

Definição: Sejam $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ e $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ dois espaços métricos. Uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é contínua no ponto $x_0 \in \mathbb{X}$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, tal que

$$\forall x \in \mathbb{X} \text{ com } d_{\mathbb{X}}(x, x_0) < \delta, \text{ tem-se que } d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(x_0)) < \epsilon. \tag{1.1}$$

Dizemos também que, f é contínua, se for contínua em cada $x_0 \in \mathbb{X}$.

Observação: Se para $A \subseteq \mathbb{X}$ consideramos o conunto $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$, a continuidade de f em x_0 pode ser reformulado da seguinte forma: f será contínua em x_0, se para toda bolinha de raio ϵ centrada em $f(x_0)$ existe uma bolinha de raio δ centrada x_0, tal que

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\epsilon(f(x_0)). \tag{1.2}$$

Theorem 2.1.2 *Uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é contínua se, e somente se, o conjunto*

$$f^{-1}(V) := \{x \in \mathbb{X} : f(x) \in V\},$$

é aberto em $\mathbb{X}$ para todo conjunto aberto V em $\mathbb{Y}$.

Proof: ($\Rightarrow$): Seja $x_0 \in f^{-1}(V)$ então $f(x_0) \in V$. Como V é aberto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(x_0)) \subseteq V$. Da continuidade de f segue que existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\epsilon(f(x_0))$, logo $B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0))) \subseteq f^{-1}(V)$. Assim $x_0 \in \text{int} f^{-1}(V)$, e portanto $f^{-1}(V)$ é aberto.

($\Leftarrow$): Seja $x_0 \in \mathbb{X}$ e $\epsilon > 0$. Desde que $B_\epsilon(f(x_0))$ é aberto em $\mathbb{Y}$, temos que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$ é aberto em $\mathbb{X}$, e como este último contem x_0 segue que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$, isto é, $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\epsilon(f(x_0))$, logo f é contínua em x_0. □

Definição: Seja $A \subseteq \mathbb{X}$, dizemos que $x_0 \in \mathbb{X}$ é um ponto aderente de A se

$$A \cap B_\epsilon(x_0) \neq \emptyset, \quad \forall\, \epsilon > 0.$$

O conjunto de pontos aderentes de um conjunto A, tambem chamado de fecho de A, será denotado por $\bar{A}$. Desta definição, observe que $A \subseteq \bar{A}$, e que $x_0 \in \bar{A}$ se, somente se, existem pontos $x \in A$ suficientemente próximos de x_0, isto é, existem pontos $x \in A$ tal que $d(x, x_0)$ é tão pequena quanto você queira.

Definição: Dizemos que um conjunto A é fechado se $A^c := \mathbb{X} \setminus A$ é aberto.

Theorem 2.1.3 *Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{X}$ é fechado se, e somente se, $\bar{A} \subseteq A$.*

Proof: ($\Rightarrow$): Suponhamos que existe $x_0 \in \bar{A}$ tal que $x_0 \notin A$, logo $x_0 \in A^c$, assim existe $\epsilon > 0$ talque $B_\epsilon(x_0) \subseteq A^c$, portanto $A \cap B_\epsilon(x_0) = \emptyset$, isto é, $x_0 \notin \bar{A}$ o qual é absurdo. Portanto $\bar{A} \subseteq A$.

($\Leftarrow$): Seja $x_0 \in A^c$, logo $x_0 \notin A$ e como $\bar{A} \subseteq A$, $x_0 \notin \bar{A}$, assim existe $\epsilon > 0$ tal que $A \cap B_\epsilon(x_0) = \emptyset$, logo $B_\epsilon(x_0) \subseteq A^c$, isto é, $x_0 \in \text{int}(A^c)$ o que mostra que A^c é aberto e consequentemente A é fechado. $\square$

Definição: Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico.

1. Dizemos que um subconjunto $A \subseteq \mathbb{X}$ é denso em $\mathbb{X}$ se $\bar{A} = \mathbb{X}$, isto é, se cada elemento de $\mathbb{X}$ tem um elemento de A suficientemente próximo.

2. $\mathbb{X}$ é dito separável se admite um subconjunto denso contável (contável = finito ou enumerável).

Exemplo: $\mathbb{R}$ é separável, pois $\mathbb{Q}$ é um subconjunto denso enumerável em $\mathbb{R}$.

Exemplo: ℓ^p é separável para todo $p \geq 1$. De fato, consideremos os conjuntos

$$A_m = \{r = (r_1, r_2, \ldots, r_m, 0, 0, \ldots) : r_k \in \mathbb{Q} \text{ para } 1 \leq k \leq m\}.$$

Então o conjunto $A = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ é contável. Vejamos agora que A é denso em ℓ^p. Seja $x = (x_n) \in \ell^p$, fixemos $\epsilon > 0$. Desde que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\epsilon^p}{2}.$$

Por outro lado, para cada $n \leq N$ existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|x_n - r_n|^p < \frac{\epsilon^p}{2^{n+1}}$$

assim se consideramos $r = (r_1, \ldots, r_N, 0, 0, \ldots)$ temos que

$$\|x - r\|_p^p = \sum_{n=1}^{N} |x_n - r_n|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\epsilon^p}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} + \frac{\epsilon^p}{2} < \epsilon^p,$$

portanto $x \in \overline{A}$.

Exemplo: ℓ^∞ não é separável. Consideremos o subconjunto

$$L = \{x = (x_n) : x_n \in \{0, 1\},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

desde que a função $f : L \to [0,1]$ dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

é sobrejetora, portanto o conjunto L é não contável. Além disso, para $x, y \in L$, com $x \neq y$, temos que $\|x - y\|_\infty = 1$ e consequentemente $B_{1/2}(x) \cap B_{1/2}(y) = \emptyset$. Por outro lado, qualquer subconjunto denso $A \subseteq \ell^\infty$ deve ter um elemento em $B_{1/2}(x)$ para cada $x \in L$, logo A não é contável. Portanto, não existe subconjunto denso contável em ℓ^∞.

2.2 Sequências

Definição: Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico $\mathbb{X}$. Dizemos que a sequência é convergente se existe $x \in \mathbb{X}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

x é dito o limite de (x_n) e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \text{ ou simplesmente, } x_n \to x.$$

Observação: A sequência de números reais não negativos $(d(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite zero, se e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Theorem 2.2.1 *Sejam $(\mathbb{X}, d_\mathbb{X})$, $(\mathbb{Y}, d_\mathbb{Y})$ dois espaços métricos e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Então f é contínua em $x_0 \in \mathbb{X}$ se, e somente se, para toda sequência (x_n) em $\mathbb{X}$ tal que $x_n \to x_0$ tem-se que $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Proof: ($\Rightarrow$): Seja $\epsilon > 0$ e (x_n) uma sequência em $\mathbb{X}$ tal que $x_n \to x_0$. Como f é contínua em x_0, existe $\delta > 0$ tal que $d_\mathbb{Y}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{X}$ tal que $d(x, x_0) < \delta$. Desde que $x_n \to x_0$ temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \delta$ para todo $n \geq n_0$ e portanto $d_\mathbb{Y}(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, isto é $f(x_n) \to f(x_0)$.
($\Leftarrow$): Suponhamos que f não é contínua em x_0, então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathbb{X}$ satisfazendo

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad d_\mathbb{Y}(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon_0. \tag{2.3}$$

Assim para a sequência (x_n) temos que $x_n \to x_0$, logo por hipótese $f(x_n) \to f(x_0)$, logo $d_\mathbb{Y}(f(x_n), f(x_0)) \to 0$ o que entra em contradição com (2.3). $\square$

Theorem 2.2.2 *Sejam $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico e $F \subseteq \mathbb{X}$.*

1. *Seja $x_0 \in \mathbb{X}$. Então, $x_0 \in \bar{F}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em F tal que $x_n \to x_0$.*

2. *F é fechado se, e somente se, para toda sequência (x_n) em F tal que $x_n \to x_0 \in \mathbb{X}$ tem-se que $x_0 \in F$.*

Proof: Provemos o primeiro item, o segundo é consequência imediata deste.
($\Rightarrow$): Seja $x_0 \in \bar{F}$, basta tomar $x_n \in F \cap B_{1/n}(x_0) \neq \emptyset$, pois neste caso temos que $x_n \to x_0$.
($\Leftarrow$): Seja (x_n) uma sequência em F tal que $x_n \to x_0 \in \mathbb{X}$. Fixemos $\epsilon > 0$. Da convergência de (x_n), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in F \cap B_\epsilon(x_0), \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad F \cap B_\epsilon(x_0) \neq \emptyset,$$

logo $x_0 \in \bar{F}$. $\square$

2.3 Compacidade

Definição: Um subconjunto K do espaço métrico $\mathbb{X}$ é dito compacto, se toda sequência (x_n) em K possui uma subsequência convergente para algum elemento de K.

Theorem 2.3.1 *Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função contínua. Se $K \subseteq \mathbb{X}$ é compacto, então $f(K)$ é compacto.*

Proof: Seja $(f(x_n))$ uma sequência em $f(K)$, como (x_n) é uma sequência em K compacto, então possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente em K, isto é, existe $x_0 \in K$ tal que $x_{n_k} \to x_0$. Como f é contínua temos que $f(x_{n_k}) \to f(x_0) \in f(K)$, assim $(f(x_n))$ possui uma subsequencia convergente em $f(K)$. Logo $f(K)$ é compacto. $\square$

Corollary 2.3.2 *Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $K \subseteq \mathbb{X}$ é compacto, então existe $x_0 \in K$ tal que*

$$|f(x)| \leq |f(x_0)|, \quad \forall x \in K.$$

Proof: Isto é consequência de $f(K)$ ser compacto em $\mathbb{R}$, pois todo compacto em $\mathbb{R}$ tem uma valor máximo e mínimo. $\square$

Definição: Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico, dizemos que um subconjunto $A \subseteq \mathbb{X}$ é limitado se existe $C > 0$ tal que

$$d(x, y) \leq C, \quad \forall x, y \in A.$$

Uma sequência (x_n) em $\mathbb{X}$ é dita limitada se o conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ for limitado. Uma alternativa equivalente e útil para determinar que um conjunto A é limitado, é mostrar que existem $x_0 \in \mathbb{X}$ e $r > 0$ tal que

$$A \subseteq B_r(x_0).$$

Deixamos ao leitor verificar este resultado

Theorem 2.3.3 *Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico $(\mathbb{X}, d)$ é fechado e limitado.*

Proof: Seja (x_n) uma sequência em K tal que $x_n \to x_0 \in \mathbb{X}$, então por hipótese, (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente para algum $y_0 \in K$, então por unicidade do limite, $x_0 = y_0 \in K$. Assim, pelo teorema 2.2.2, K é fechado. Se K não for limitado, então fixando $z_0 \in \mathbb{X}$ temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $d(x_n, z_0) > n$, logo se consideramos (x_{n_k}) qualquer uma subsequencia arbitrária e x_0 qualquer ponto fixado de K temos que

$$d(x_{n_k}, x_0) \geq d(x_{n_k}, z_0) - d(x_0, z_0) > n_k - d(x_0, z_0) \xrightarrow{k \to \infty} \infty.$$

Desta forma nenhuma subsequência de K poderia convergir a algum ponto de K o que contradiz a hipótese. Portanto K é limitado. $\square$

2.4 Completitude

Definição: Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico $\mathbb{X}$. Dizemos que a sequência é de Cauchy, se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Theorem 2.4.1 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Proof: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy, então para $\epsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ para todo $n \geq n_0$. Tomando $M = \max\{1, d(x_n, x_{n_0}), n = 1, \ldots, n_0 - 1\}$, segue que $d(x_n, x_{n_0}) \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_m, x_{n_0}) \leq 2M$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. $\square$

Definição: Dizemos que um espaço métrico $(\mathbb{X}, d)$ é completo se toda sequência de Cauchy em $\mathbb{X}$ é convergente.

Exemplo: para todo $1 \leq p \leq \infty$, o espaço normado ℓ^p é completo. Seja (x_n) uma uma sequência de Cauchy em ℓ^p, onde $x_n = (x_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$. Fixemos $\epsilon > 0$, logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_p < \epsilon, \quad \forall n, m \geq n_0. \tag{4.4}$$

Desde que, para todo $i \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$|x_{n,i} - x_{m,i}| \leq \|x_n - x_m\|_p < \epsilon, \quad \forall n, m \geq n_0, \tag{4.5}$$

segue que, para cada $i \in \mathbb{N}$, as sequência $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$, é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e portanto é convergente, isto é, existe $z_i \in \mathbb{R}$ tal que $x_{n,i} \xrightarrow{n\to\infty} z_i$. Consideremos a sequência $z = (z_i)$ e mostremos que $z \in \ell^p$ e $x_n \to z$ em ℓ^p quando $n \to \infty$.

Caso $p = \infty$: Fixando $n \geq n_0$ e fazendo $m \to \infty$ em (4.5), temos que

$$|x_{n,i} - z_i| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0, \tag{4.6}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, assim

$$|z_i| \leq |x_{n,i}| + |z_i - x_{n,i}| \leq \|x_n\|_\infty + \epsilon \leq M + \epsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

de onde seque que a sequência z é limitada e portanto $z \in \ell^\infty$. De (4.6) temos que

$$\|x_n - z\|_\infty \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

logo $x_n \to z$ em ℓ^∞.

Caso $1 \leq p < \infty$: Fixemos $k \in \mathbb{N}$, então, de (4.4) temos que

$$\sum_{i=1}^{k} |x_{n,i} - x_{m,i}|^p \leq \|x_n - x_m\|_p^p < \epsilon^p, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Fixando $n \geq n_0$ e fazendo $m \to \infty$ temos que

$$\sum_{i=1}^{k} |x_{n,i} - z_i|^p \leq \epsilon^p, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{4.7}$$

de onde segue que $x_n - z \in \ell^p$ para todo $n \geq n_0$ e como $z = (z - x_n) + x_n$ segue que $z \in \ell^p$ pois ℓ^p é um espaço vetorial. Fazendo $k \to \infty$ em (4.7) temos que

$$\|x_n - z\|_p \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

e portanto $x_n \to z$ em ℓ^p.

Exemplo: O espaço vetorial $C[0, 1]$ não é completo com a norma

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

De fato, a sequência

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se} \quad x \in [0, 1/n^2[\\ 1/\sqrt{x} & \text{se} \quad x \in [1/n^2, 1] \end{cases} \tag{4.8}$$

é de Cauchy, pois

$$\|f_n - f_m\| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \quad \text{(verifique!)}$$

Por outro lado, se esta sequência convergíse para uma função $f \in C[0,1]$ teríamos que f seria limitada, assim existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \leq N$ para todo $x \in [0,1]$. Logo, para $n > N$ temos que

$$\|f_n - f\| \geq \int_0^{1/N^2} (|f_n| - |f|)\, dx \geq \int_0^{1/n^2} (n - N)\, dx + \int_{1/n^2}^{1/N^2} (\frac{1}{\sqrt{x}} - N)\, dx.$$

Calculando as integrais do lado direito temos que

$$\|f_n - f\| \geq \frac{1}{N} - \frac{1}{n}.$$

Fazendo $n \to \infty$ chegamos ao absurdo $0 \geq 1/N$ e portanto a sequência (f_n) não é convergente.

Theorem 2.4.2 *Todo subespaço de um espaço métrico* $(\mathbb{X}, d)$ *completo, é completo se, e somente se, é fechado.*

Proof: Seja $F \subseteq \mathbb{X}$. Suponhamos F completo. Seja (x_n) uma sequência em F convergindo para $z_0 \in \mathbb{X}$. Como a sequência é convergente em $\mathbb{X}$, então é de Cauchy em $\mathbb{X}$ e portanto é de Cauchy em F, logo converge em F para $z_1 \in F \subseteq \mathbb{X}$, por unicidade do limite segue que $z_0 = z_1 \in F$, assim F é fechado. Reciprocamente, suponhamos F fechado. Consideremos uma sequência de Cauchy (x_n) em F, (x_n) é de Cauchy em $\mathbb{X}$ e como $\mathbb{X}$ é completo $x_n \to z_0$ para algum $z_0 \in \mathbb{X}$. Pelo Teorema 2.2.2 segue que $z_0 \in F$ e portanto (x_n) é convergente em F. □

Theorem 2.4.3 (Ponto fixo de Banach) *Seja* $(\mathbb{X}, d)$ *um espaço métrico completo. Se* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *é uma contração, isto é, existe* $0 < \alpha < 1$ *tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{X},$$

então f tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $\hat{x} \in \mathbb{X}$ *tal que* $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Proof: Fixemos $x_0 \in \mathbb{X}$, consideremos a sequência recursiva $x_{n+1} = f(x_n)$ para $n \geq 0$. Assim

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}), \quad \forall n \geq 1,$$

de onde segue, pelo processo de indução, que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0).$$

Agora, para $n, p \in \mathbb{N}$ temos que

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} \alpha^{n+k} d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

Entao (x_n) é de Cauchy, e portanto existe $\hat{x} \in \mathbb{X}$ tal que $x_n \to \hat{x}$. Desde que $d(f(x_n), \hat{x}) = d(x_{n+1}, \hat{x})$ tomando limite quando $n \to \infty$ temos que $d(f(\hat{x}), \hat{x}) = 0$ e portanto $f(\hat{x}) = \hat{x}$. Provemos agora a unicidade, isto é, se $\tilde{x} \in \mathbb{X}$ é tal que $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$, então temos que

$$d(\tilde{x}, \hat{x}) = d(f(\tilde{x}), f(\hat{x})) \leq \alpha d(\tilde{x}, \hat{x})$$

dai segue que $d(\tilde{x}, \hat{x}) = 0$, logo $\tilde{x} = \hat{x}$. $\square$

Exemplo: Para $r > 0$ consideremos o intervalo $I_r(t_0) = [t_0 - r, t_0 + r]$ e o retângulo $R = I_a(t_0) \times I_b(x_0)$, $a, b > 0$. Seja $f : R \to \mathbb{R}$ uma função contínua em R e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe $K > 0$ tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in I_b(x_0),\ t \in I_a(t_0).$$

então o problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

tem uma única solução em algum subintervalo de $I_a(t_0)$. De fato, consideremos $0 < \alpha < \min\{a, b/M, 1/K\}$ onde $M = \sup\{|f(t, x)| : (t, x) \in R\}$, consideremos o espaço normado completo $C(I_\alpha(t_0), I_b(x_0))$ com sua norma usual

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in I_\alpha(t_0)} |x(t)|.$$

Consideremos o operador

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad x \in C(I_\alpha(t_0), I_b(x_0)).$$

Desde que

$$|(Tx)(t) - x_0| \leq M\alpha \leq b \quad \forall t \in I_\alpha(t_0)$$

temos que $T : C(I_\alpha(t_0), I_b(x_0)) \to C(I_\alpha(t_0), I_b(x_0))$. Por outro lado, desde que

$$|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| \leq K\alpha\|x_1 - x_2\|_\infty \quad \forall x_1, x_2 \in C(I_\alpha(t_0), I_b(x_0))$$

e $K\alpha < 1$ o operador T é uma contração, logo tem um único ponto fixo $x \in C(I_\alpha(t_0), I_b(x_0))$, isto é

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Esta função é solução do problema de valor inicial.

Definição: Sejam $(\mathbb{X}, d_\mathbb{X})$, $(\mathbb{Y}, d_\mathbb{Y})$. Uma isometria de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$ é uma aplicação $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ que preserva distâncias, isto é,

$$d_\mathbb{Y}(Tx_1, Tx_2) = d_\mathbb{X}(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}.$$

Caso, esta aplicação seja sobrejetora, dizemos que os espaços $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são isométricos.

A seguir veremos que todo espaço métrico não completo pode ser completado.

Theorem 2.4.4 (Completamento de Espaços Métricos) *Para todo espaço métrico $(\mathbb{X}, d)$ existe um espaço métrico completo $(\hat{\mathbb{X}}, \hat{d})$ tal que $\mathbb{X}$ é isométrico com um subespaço denso de $\hat{\mathbb{X}}$. O espaço $\hat{\mathbb{X}}$ é único exceto por isometrias, isto é, se existir outro espaço completo $\tilde{\mathbb{X}}$ que contem um subespaço denso e isométrico com $\mathbb{X}$, então $\hat{\mathbb{X}}$ e $\tilde{\mathbb{X}}$ são isométricos.*

Proof: Provaremos o teorema na seguinte ordem:

(A1) Construção de um espaço métrico $(\hat{\mathbb{X}}, \hat{d})$

(A2) Construção de uma isometria $T : \mathbb{X} \to \hat{\mathbb{X}}$, com $\overline{T(\mathbb{X})} = \hat{\mathbb{X}}$.

(A3) Prova da completitude de $\hat{\mathbb{X}}$.

(A4) Unicidade de $\hat{\mathbb{X}}$, exceto por isometrias.

Antes de provar cada um destes itens, o leitor pode verificar que vale a seguinte desigualdade:

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2), \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{X}. \tag{4.9}$$

(A1): Dizemos que duas sequências de Cauchy em $\mathbb{X}$, (x_n) e (x'_n), são equivalentes e escrevemos $(x_n) \sim (x'_n)$ se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0.$$

Deixamos com o leitor a verificação de que esta é uma relação e equivalência. Consideremos o conjunto das classes de equivalência $\hat{\mathbb{X}} = \{\hat{x} = [(x_n)] : (x_n)$ é uma sequencia de C
e definamos

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n), \quad \hat{x} = [(x_n)],\ \hat{y} = [(y_n)].$$

Vejamos agora que este limite existe em $\mathbb{R}$ e que o limite é independente do representante escolhido. Usando (4.9) temos que

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n),$$

e portanto a sequência $(d(x_n, y_n))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo converge. Agora consideremos $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, então usando novamente a desigualdade (4.9) temos que

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n),$$

assim, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$ e portanto $\hat{d}$ está bem definida. Deixamos com o leitor a verificação de que $\hat{d}$ é uma métrica em $\hat{\mathbb{X}}$.

(A2): Definimos $T : \mathbb{X} \to \hat{\mathbb{X}}$ dado por

$$T(a) = [(a, a, \ldots)], \quad a \in \mathbb{X}.$$

Então T é uma isometria pois $\hat{d}(T(a), T(b)) = d(a, b)$. Provemos que $T(\mathbb{X})$ é denso em $\hat{\mathbb{X}}$. Seja $\hat{x} = [(x_n)] \in \hat{\mathbb{X}}$, então (x_n) é de Cauchy. Logo, fixando $\epsilon > 0$ temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_N) < \epsilon/2, \quad \forall n \geq N.$$

Tendo em conta que $T(x_N) = [(x_N, x_N, \ldots)]$, tomando limite na desigualdade anterior temos que

$$\hat{d}(\hat{x}, T(x_N)) \leq \epsilon/2,$$

logo $T(x_N) \in B_\epsilon(\hat{x})$, portanto $T(\mathbb{X})$ é denso em $\hat{\mathbb{X}}$.

(A3): Seja $(\hat{x}_n)$ uma sequencia de Cauchy em $\hat{\mathbb{X}}$. Como $T(\mathbb{X})$ é denso em $\hat{\mathbb{X}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $\hat{z}_n = T(z_n) \in T(\mathbb{X})$ tal que

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) < 1/n.$$

Usando (4.9) temos que

$$\hat{d}(\hat{z}_n, \hat{z}_m) - \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) \leq \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{z}_m, \hat{x}_m),$$

de onde segue que

$$d(z_n, z_m) = \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{z}_m) < \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

e consequentemente (z_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{X}$. Consideremos $\hat{x} := [(z_n)]$, então temos que

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) \leq \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}).$$

Por outro lado,

$$\hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}) = \hat{d}(T(z_n), \hat{x}) = \lim_{m\to\infty} d(z_n, z_m),$$

que substituindo na desigualdade anterior temos que

$$0 \leq \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} d(z_n, z_m).$$

Fazendo $n \to \infty$ seque que $\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) \to 0$. Logo $\hat{\mathbb{X}}$ é completo.

(A4): Sejam $(\mathbb{Y}_1, d_1)$, $(\mathbb{Y}_2, d_2)$ dois espaços métricos completos que admitem subconjuntos densos W_1, W_2 isométricos com $\mathbb{X}$, então logo W_1 e W_2 são isométricos e portanto existe uma isometria $L : W_1 \to W_2$ sobrejetiva. Seja $y \in \mathbb{Y}_1$, logo existe (z_n) em W_1 tal que $z_n \to y$, logo (z_n) é de Cauchy em $\mathbb{Y}_1$ e portanto $L(z_n)$ é de Cauchy em $\mathbb{Y}_2$, logo $L(z_n) \to \hat{y} \in \mathbb{Y}_2$. Definimos $\hat{L} : \mathbb{Y}_1 \to \mathbb{Y}_2$ por $L(y) = \hat{y}$. L está bem definida pois se houver outra sequência tal que $z'_n \to y$ temos que

$$d_2(L(z_n), L(z'_n)) = d(z_n, z'_n) \to 0,$$

e portanto as sequências $(L(z_n))$ e $(L(z'_n))$ tem o mesmo limite. L é sobrejetiva, pois dado $y_2 \in \mathbb{Y}_2$, existe $L(z_n) \to y_2$ onde (z_n) é um sequência em W_1, logo $(L(z_n))$ é de Cauchy em $\mathbb{Y}_2$ e portanto (z_n) é de Cauchy em $\mathbb{Y}_1$, assim $z_n \to y_1 \in \mathbb{Y}_1$ e portanto $L(y_1) = y_2$. Para terminar, vejamos que L é uma isometria. Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}_1$, consideremos (z_n) e (w_n) em W_1 tal que $z_n \to y_1$ e $w_n \to y_2$., então

$$d_2(L(y_1), L(y_2)) = \lim_{n\to\infty} d_2(L(z_n), L(w_n)) = \lim_{n\to\infty} d_1(z_n, w_n) = d_1(y_1, y_2).$$

□

No que seque, enunciamos resultados sobre o completamento em espaços normados e espaços com produto interno, cujas provas ficam como exercício para o leitor.

Definição: Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, espaços vetoriais, dizemos que a aplicação $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é um isomorfismo se T é uma bijeção linear, isto é, é uma função bijetiva tal que $T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Nestas condições os espaços $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são ditos isomorfos.

Definição: Dizemos que dois espaços normados $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ são isometricamente isomorfos se existe um isomorfismo isométrico entre estes espaços, isto é, se existe um isomorfismo $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ que preserva normas:

$$\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} = \|x\|_{\mathbb{X}}, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Theorem 2.4.5 (Completamento de Espaços Normados) *Para todo espaço normado $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ existe um espaço normado completo $(\hat{\mathbb{X}}, \|\cdot\|_{\hat{\mathbb{X}}})$ tal que $\mathbb{X}$ é isometricamente isomorfo com um subespaço denso de $\hat{\mathbb{X}}$. O espaço $\hat{\mathbb{X}}$ é único exceto por isomorfismos isométricos, isto é, se existir outro espaço completo $\tilde{\mathbb{X}}$ tal que possui um subespaço denso isometricamente isomorfo com $\mathbb{X}$, então $\tilde{\mathbb{X}}$ e $\hat{\mathbb{X}}$ são isometricamente isomorfos.*

Definição: Dos espaços com produto interno $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são ditos isometricamente isomorfos se existe um isomorfismo $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ que preserva produtos internos:

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Theorem 2.4.6 (Completamento de Espaços com Produto Interno) *Para todo espaço com produto interno $\mathbb{X}$ existe um espaço com produto interno completo $\hat{\mathbb{X}}$ tal que $\mathbb{X}$ é isometricamente isomorfo com um subespaço denso de $\hat{\mathbb{X}}$. O espaço $\hat{\mathbb{X}}$ é único exceto por isomorfismos isométricos, isto é, se existir outro espaço com produto interno completo $\tilde{\mathbb{X}}$ tal que possui um subespaço denso isometricamente isomorfo com $\mathbb{X}$, então $\hat{\mathbb{X}}$ e $\tilde{\mathbb{X}}$ são isometricamente isomorfos.*

Espaços $L^p(a, b)$: Completamento de $C[a, b]$

Pode-se mostrar que para $p \geq 1$, o espaço $C[a, b]$ não é completo com a norma

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad f \in C[a, b]. \tag{4.10}$$

Neste caso, podemos definir o espaço $L^p(a, b)$ como o completamento de $C[a, b]$ com esta norma, e neste caso $C[a, b]$ pode ser considerado um subespaço denso de $L^p(a, b)$. Como $C[a, b]$ é uma família de funções, $L^p(a, b)$ pode ser considerada uma família de funções num sentido mais amplo. Por construção, a norma em $L^p(a, b)$ que ainda denotada por $\| \cdot \|_p$, é definida por

$$\|f\|_p := \lim_{n \to \infty} \|f_n\|_p = \lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b |f_n(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

onde (f_n) é uma sequência em $C[a, b]$ tal que $f_n \to f$ em $L^p(a, b)$. Nesse sentido, para $f \in L^p(a, b)$ podemos introduzir a noção de integral:

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx := \lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(x)|^p \, dx,$$

de onde segue que fórmula de integral em (4.10) se estende para elementos de $L^p(a, b)$.

Espaço $L^2(a, b)$: O espaço $L^2(a, b)$ é o completamento $C[a, b]$ com a norma $\| \cdot \|_2$, porém esta norma é induzida pelo produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx, \quad f, g \in C[a, b],$$

Assim, o produto interno para $f, g \in L^2(a, b)$ é calculado pelo limite

$$\langle f, g \rangle_{L^2(a,b)} := \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) g_n(x) \, dx, \quad f, g \in L^2(a, b),$$

onde (f_n) e (g_n) são sequências em $C[a,b]$ tais que $f_n \to f$ e $g_n \to g$ em $L^2(a,b)$. Abusando a da notação, ainda escrevemos

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx := \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g_n(x)\,dx, \quad f,g \in L^2(a,b).$$

Completamento de $\mathcal{R}(a,b)$: Vimos que a função

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

é uma seminorma em $\mathcal{R}(a,b)$ porém não é uma norma. Para tornar $\|\cdot\|_1$ uma norma redefinimos $\mathcal{R}(a,b)$ como o conjunto de classes de equivalência $[f] = \{g : g \sim f\}$, onde a relação de equivalência é definida por

$$f \sim g \quad \text{se} \quad \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = 0.$$

Desta forma, com o intuito de economizar notação os elementos de $\mathcal{R}(a,b)$, embora sejam classes de equivalência $[f]$, eles são denotados simplesmente pelo seu representante f. Assim $\|\cdot\|_1$ pode ser considerado uma norma $\mathcal{R}(a,b)$. Infelizmente este espaço é incompleto com esta norma, para verificar este fato pode-se usar exatamente a sequencia de Cauchy considerada em (4.8).

Temos então que $\mathcal{R}(a,b)$ é um espaço incompleto que contém $C[a,b]$, alem disso pode-se mostrar que $C[a,b]$ é denso em $\mathcal{R}(a,b)$ (este resultado será admitido sem prova), consequentemente $C[a,b]$ também será denso no completamento de $\mathcal{R}(a,b)$ e por unicidade do completamento (salvo isomorfismos isométricos) temos que

$$C[a,b] \subseteq \mathcal{R}(a,b) \subseteq L^1(a,b).$$

Lembrando que os elementos de $\mathcal{R}(a,b)$ são classes de equivalência, então os elementos de $L^1(a,b)$ podem ser enxergadas como classes de equivalência de funções num contexto mais abrangente. Na pratica, neste conjuntos somente trabalharemos com representantes (apropriados se necessário) destas classes.

2.5 Exercícios

1. Mostre que os seguintes conjuntos são abertos em $\mathbb{R}^2$

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2 < \|x\| < 3\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}.$$

2. Seja $C[a,b]$ com a norma padrão $\|f\|_\infty$. Fixado $f \in C[a,b]$, esboce o gráfico desta função e desenhe a região que contém os elementos de $B_r(f)$. Depois, considerando $f \in C[0,2\pi]$ dado por $f(x) = \sin(x)$, encontre o menor $r > 0$ tal que $g \in \overline{B_r(f)}$ onde $g(x) = \cos(x)$.

3. Seja A um subconjunto do espaço métrico $\mathbb{X}$. Um ponto $x_0 \in \mathbb{X}$ é dito ponto de acumulação de A se para todo $\epsilon > 0$, temos que

$$A \cap (B_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Neste caso, mostre que $B_\epsilon(x_0)$ tem infinitos elementos de A.

4. Sejam A um subconjunto do espaço métrico $(\mathbb{X}, d)$. mostre que A é aberto, se e somente se, para toda sequência (x_n) em $\mathbb{X}$ que converge a algum ponto de A existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq n_0$.

5. Mostre que toda métrica $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ e toda norma $\|\cdot\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

6. Mostre que a imagem de um conjunto aberto de uma função contínua não é necessariamente aberto.

7. Mostre que a função $f : (\mathbb{X}, d_X) \to (\mathbb{Y}, d_\mathbb{Y})$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(F) := \{x \in \mathbb{X} : f(x) \in F\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{X}$ para todo conjunto fechado F de $\mathbb{Y}$.

8. Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico e $A \subseteq \mathbb{X}$. Mostre que $x \in \bar{A}$ se e somente se

$$D(x, A) := \inf_{y \in A} d(x,y) = 0.$$

9. Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico. Um ponto x_0 se diz um ponto de fronteira de $A \subseteq \mathbb{X}$ se

$$A \cap B_\epsilon(x_0) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad A^c \cap B_\epsilon(x_0) \neq \emptyset, \quad \forall \epsilon > 0$$

O conjunto de pontos de fronteira de um conjunto A é denotado por ∂A.

   (a) Mostre que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

   (b) Encontre a fronteira dos subconjuntos $]0,1]$, $\mathbb{Q}$, $[0,\infty[$ e $\mathbb{R}$ no espaço $\mathbb{R}$.

   (c) Encontre a fronteira do subconjunto $\{\rho e^{i\theta} : 0 < \rho < 1,\ \theta \in \mathbb{R}\}$ no espaço $\mathbb{C}$.

10. Mostre que os espaços $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$ e $\ell^p(\mathbb{C})$ com $1 \leq p < \infty$, são separáveis.

11. Mostre que toda sequência convergente é de Cauchy.

12. Mostre que $\mathbb{R}$ com a métrica

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

não é um espaço completo.

13. Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico e $A \subseteq \mathbb{X}$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

 (a) A é limitado.

 (b) Existem $x_0 \in \mathbb{X}$ e $r > 0$ tal que $A \subseteq B_r(x_0)$.

 (c) Para cada $x_0 \in \mathbb{X}$ existe $r > 0$ tal que $A \subseteq B_r(x_0)$.

14. Seja $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $A \subseteq \mathbb{X}$. Mostre que A é limitado, se e somente se, existe uma constante positiva C tal que $\|x\| \leq C$ para todo $x \in A$.

15. Seja $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico e $K, F \subseteq \mathbb{X}$. Se K é compacto e F é fechado com $K \cap F = \emptyset$, mostre que

$$D(K, F) := \inf\{d(a, b) : a \in K,\ b \in F\} > 0.$$

16. Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico. O diâmetro de um subconjunto Z é definido como $\operatorname{diam}(Z) = \sup\{d(y_1, y_2) : y_1, y_2 \in Z\}$. Se K é um subconjunto compacto de $\mathbb{X}$, mostre que existem $z_1, z_2 \in K$ tal que

$$\operatorname{diam}(K) = d(x_1, x_2).$$

17. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços métricos. Dada $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, o gráfico de f é o subconjunto de $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ definido como $\operatorname{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{X}\}$.

 (a) Se f é contínua mostre que $\operatorname{Graf}(f)$ é fechado.

 (b) Se $\operatorname{Graf}(f)$ é fechado e $\mathbb{Y}$ é compacto, mostre que f é contínua.

18. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços métricos e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função contínua.

 (a) Se $\mathbb{X}$ é compacto, mostre que f é uniformemente contínua, isto é, para cada $\epsilon > 0$ é possível encontrar $\delta > 0$ tal que $d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ tal que $d(x_1, x_2) < \delta$.

 (b) Se $\mathbb{X}$ é compacto e f bijetiva, mostre que f^{-1} é contínua.

19. Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico e $Z \subseteq \mathbb{X}$.

 (a) Se $\mathbb{X}$ é compacto, mostre que Z é compacto se, e somente se, é fechado.

(b) Se $\mathbb{X}$ é completo, mostre que Z é completo se, e somente se, é fechado.

20. Considere os seguintes subespaços vetoriais de ℓ^∞: $\ell_0^\infty = \{(x_n) : x_n \to 0\}$, e

$$W = \{(x_n) : \text{tem somente um número finito de coordenadas não nulas}\}.$$

Mostre que ℓ_0^∞ é completo enquanto W não é.

21. Considere o espaço métrico $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definido em (1.1).

(a) Sejam $x_n = (\alpha_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$, $x = (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Mostre que $x_n \to x$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se, e somente se, $\alpha_{n,j} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é completo.

22. Considere a função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, onde $\mathbb{X}$ é um espaço métrico completo. Defina $f^n := f(f^{n-1})$ e mostre que, se f^n é uma contração para algum $n \in \mathbb{N}$, então f tem um único ponto fixo. Use este fato para mostrar que o problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b, \quad x(t_0) = x_0$$

onde A é uma matriz real $n \times n$, $b, x_0 \in \mathbb{R}^n$, tem uma única solução contínua $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

23. Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ é limitada em $[a,b] \times \mathbb{R}^p$. Para $t_0 \in [a,b]$ e $x_0 \in \mathbb{R}^p$ mostre que o problema de valor inicial

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0,$$

tem uma única solução definida no intervalo $[a,b]$.

24. Sejam $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$, espaços isométricos. Mostre que $\mathbb{X}_1$ é completo se, e somente se, $\mathbb{X}_2$ é completo.

25. Mostre que o espaço $C[a,b]$ é completo com sua norma usual

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

O subespaço $Z = \{f \in C[a,b] : f(a) = f(b)\}$ é completo? Justifique sua resposta.

26. Considere o espaço vetorial $C[0,1]$ com a norma

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

Seja $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, considere a sequência e funções $(f_n)_{n\geq 3}$ em $C[0,1]$ dada por $f_n = 0$ em $[0,1/2]$, $f_n = 1$ em $[a_n,1]$ e f_n linear em $[1/2,a_n]$.

(a) Mostre que (f_n) é de Cauchy.

(b) Use a sequência anterior para mostrar que $C[0,1]$ não é completo.

(c) Mostre que o espaço $C[0,1]$ também não é completo com a norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

27. Seja $a < b$. Mostre que $C[a,b]$ e $C[0,1]$ são espaços isometricamente isomorfos com suas normas usuais. Mostre que estes espaços continuam sendo isometricamente isomorfos com as normas

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx, \ f \in C[a,b] \quad \text{e} \quad \|F\|_1 = \int_0^1 |F(t)| \, dt, \ F \in C[0,1],$$

respectivamente.

28. Seja Z um subespaço denso do espaço métrico $\mathbb{X}$. Se Z for separável, mostre que $\mathbb{X}$ é separável.

29. Mostre que $C[a,b]$ é denso em $\mathcal{R}(a,b)$ com a norma $\|\cdot\|_1$. Dica: sabe-se que, se $f \in \mathcal{R}(a,b)$ então f é uma função limitada cujos conjunto de pontos de descontinuidade, D, tem medida nula, isto significa que para cada $\epsilon > 0$ existe uma sequência de intervalos abertos $]a_n, b_n[$ disjuntos tal que

$$D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \epsilon.$$

30. Considere o espaço $L^p(a,b)$ como completamento de $C[a,b]$ com a norma $\|\cdot\|_p$. Mostre que vale a desigualdade de Holder em L^p, isto é, para $p, q > 1$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e para $f \in L^p(a,b)$ e $g \in L^q(a,b)$, tem-se que $fg \in L^1(a,b)$ e

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx \right)^{1/q}.$$

Capítulo 3

Espaços Normados

3.1 Dimensão e Bases

Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$. Lembremos que, um subconjunto $S \subseteq \mathbb{X}$ é um subespaço de $\mathbb{X}$ se, e somente se. for fechado em relação as operações $+$ e $\cdot$, isto é, se

$$x + y \in S \quad \text{e} \quad \alpha x \in S, \quad \forall x, y \in S, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Definição: Um vetor $x \in \mathbb{X}$ é dito uma combinação linear de elementos de $A \subseteq \mathbb{X}$ se existem $x_1, \ldots, x_n \in A$ e escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

Exemplo: Se A é um subconjunto de $\mathbb{X}$, o subconjunto

$$\text{Ger}(A) := \{x \in \mathbb{X} : x \text{ é combinação linear finita de elementos de } A\},$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{X}$, chamado de subespaço gerado por A.

Definição: Dizemos que os vetores $x_1, x_2, \ldots, x_m$ em $\mathbb{X}$ são linearmente dependentes (L.D.), se existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ não simultaneamente nulos tal que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0.$$

Caso contrário dizemos que são linearmente independentes (L.I.). Isto é, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ são L.I. se escrever

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0 \quad \text{implica que} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

Definição: Um subconjunto A de $\mathbb{X}$ é dito linearmente independente, se qualquer coleção finita de elementos de A é linearmente independente.

Definição: Uma base de Hamel do espaço vetorial $\mathbb{X}$ é um subconjunto linearmente independente $\mathcal{B}$ tal que

$$\text{Ger}(\mathcal{B}) = \mathbb{X}.$$

Esta base também é chamada de *base algébrica* ou simplesmente de *base*. Posteriormente serão definidas outros tipos de bases.

Theorem 3.1.1 *Seja $\mathbb{X} \neq \{0\}$ um espaço vetorial, então*

1. *$\mathbb{X}$ tem uma base.*
2. *Todas as bases de $\mathbb{X}$ tem a mesma cardinalidade.*
3. *Todo conjunto linearmente independente em $\mathbb{X}$ pode ser completada para formar uma base.*

Este teorema é consequência do Lema de Zorn que veremos posteriormente.

Definição: Dizemos que o espaço vetorial $\mathbb{X}$ tem dimensão finita se tem uma base finita, caso contrário dizemos que o espaço tem dimensão infinita. A dimensão de um espaço vetorial é definida como a cardinalidade de uma de suas bases.

Exemplo: O espaço vetorial $\mathcal{P}$ de todos os polinômios tem dimensão infinita, pois o conjunto $\mathcal{B} = \{p_i(t) = t^i : i \in \mathbb{Z}_0^+\}$ é uma base deste espaço. Decorre desta afirmação que o espaço vetorial $C[a,b]$ tem dimensão infinita, pois contém o subconjunto infinito linearmente independente $\mathcal{B}$.

Exemplo: Consideremos o subconjunto $\mathcal{B} = \{e_n = (\delta_{ni})_{i\in\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\}$ de ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$, onde δ_{ni} é o *Delta de Kronecker*,

$$\delta_{ni} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = n, \\ 0 & \text{se} \quad i \neq n. \end{cases}$$

Como $\mathcal{B}$ é um subconjunto infinito linearmente independente segue que ℓ^p tem dimensão infinita.

Definição: Dizemos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente no espaço normado $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ se, a sequência de somas parciais $s_m = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} x_n$ for convergente, isto é, $s_m \xrightarrow{m\to\infty} s$ para algum $s \in \mathbb{X}$. Neste caso atribuimos o valor s à série, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s.$$

Definição: uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é dita absolutamente convergente se, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ for convergente.

Definição: Um espaço normado completo é chamado de *espaço de Banach.*

Theorem 3.1.2 *Um espaço normado $\mathbb{X}$ é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente em $\mathbb{X}$ é convergente.*

Proof: ($\Rightarrow$): Suponhamos que $\mathbb{X}$ é um espaço de Banach, tomemos uma série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ absolutamente convergente. Denotemos com $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $t_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$, então para $n \geq m$ temos que

$$\|s_n - s_m\| \leq |t_n - t_m|.$$

Portanto, como (t_n) converge, temos que é de Cauchy e portanto (s_n) é de Cauchy a qual converge, pois $\mathbb{X}$ é completo.
($\Leftarrow$): Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{X}$, logo para $\epsilon = 1/2$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_{n_1}\| < 1/2, \quad \forall n \geq n_1.$$

De forma recursiva, para cada $\epsilon_k = 1/2^k$, $k \geq 2$, podemos encontrar $n_k > n_{k-1}$ tal que

$$\|x_n - x_{n_k}\| < 1/2^k, \quad \forall n \geq n_k.$$

Desta forma obtemos uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < 1/2^{k-1}, \quad \forall k \geq 2,$$

de onde concluimos que a série $\sum_{i=2}^{\infty}(x_{n_i} - x_{n_{i-1}})$ é absolutamente convergente, pois

$$\sum_{i=2}^{\infty} \|x_{n_i} - x_{n_{i-1}}\| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} < \infty.$$

Por outro lado, observe que

$$x_{n_k} = x_{n_1} + \sum_{i=2}^{k}(x_{n_i} - x_{n_{i-1}})$$

portanto $x_{n_k} \to y$ quando $k \to \infty$, onde $y = x_{n_1} + \sum_{i=2}^{\infty}(x_{n_i} - x_{n_{i-1}}) \in \mathbb{X}$. Pra finalizar, vejamos que $x_n \to y$. Seja $\epsilon > 0$, desde que (x_n) é de cauchy e $x_{n_k} \to y$ segue que, existem $N_0, n_{k_0} \in \mathbb{N}$ talque

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon/2, \quad n, m \geq N_0,$$
$$\|x_{n_k} - y\| < \epsilon/2, \quad n_k \geq n_{k_0}.$$

Assim, para $n \geq N_0$ consideramos $n_k > \max\{N_0, n_{k_0}\}$ para concluir

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y\| < \epsilon.$$

Então $x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ e consequentemente $\mathbb{X}$ é completo. $\square$

Definição: Seja $\mathbb{X}$ um espaço de dimensão infinita. Um subconjunto $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{X}$ é dito uma base de Schauder, se para cada $x \in \mathbb{X}$ existe uma única sequência (α_n) de escalares tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha_n e_n.$$

Exemplo: Para $1 \leq p < \infty$ o conjunto $\{e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\}$, onde

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k = n, \\ 0 & \text{se} \quad k \neq n, \end{cases}$$

é uma base de Schauder do espaço ℓ^p. De fato dado $x = (x_n) \in \ell^p$ intuitivamente teremos que

$$\text{“}x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\text{”}$$

se $\alpha_n = x_n$. Verifiquemos agora que sequência de somas parciais $s_m = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n e_n$ com $\alpha_n = x_n$ converge para x. De fato

$$\|x - s_m\|_p^p = \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p \to 0, \text{ quando } m \to \infty,$$

de onde segue que $s_m \to x$ em ℓ^p. A prova da unicidade da sequência (α_n) encontrada é deixada como exercício para o leitor.

3.2 Dimensão finita versus dimensão infinita

Uma característica que diferencia espaços de dimensão finita e infinita é a equivalência de normas segundo a seguinte definição

Definição: Duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ são equivalentes no espaço vetorial $\mathbb{X}$ se existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tal que

$$c_1\|x\|_0 \leq \|x\| \leq c_2\|x\|_0, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$, consideremos $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ uma base deste espaço. Para $x \in \mathbb{X}$ denotemos por $[x]_B$ o vetor de coordenadas de x na base B, isto é, se $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, então $[x]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Então temos que a aplicação

$$\Lambda : \mathbb{X} \to \mathbb{K}^n, \quad \Lambda x = [x]_B$$

é uma bijeção linear. Se $\|\cdot\|$ denota uma norma em $\mathbb{X}$ temos que a função

$$N(y) := \|\Lambda^{-1}y\|, \quad y \in \mathbb{K}^n$$

é uma norma em $\mathbb{K}^n$. Desde que $\|x\| = N(\Lambda x)$ pra todo $x \in \mathbb{X}$, temos que os espaços $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ e $(\mathbb{K}^n, N(\cdot))$ são isometricamente isomorfos. Como consequência desta aplicação, podemos afirmar.

Theorem 3.2.1 *Se $\mathbb{X}$ um espaço de dimensão finita, então:*

1. *Todas as normas definidas em $\mathbb{X}$ são equivalentes.*

2. *$\mathbb{X}$ é completo com qualquer norma.*

3. *Qualquer subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{X}$ é compacto.*

Proof: Provaremos o primeiro item, os itens restantes ficam como exercício para o leitor. Com as notações anteriores, consideremos duas normas $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$ em $\mathbb{X}$, logo temos que $N_i(y) := \|\Lambda^{-1}y\|_i$ são normas em $\mathbb{K}^n$ e portanto são equivalentes, logo as normas $\|x\|_i = N_i(\Lambda x)$, $i = 1, 2$ são equivalentes. □

Lemma 3.2.2 (Lema de Riesz) *Sejam Z um subespaço próprio fechado do espaço normado $\mathbb{X}$. Então para cada $\theta \in]0, 1[$ existe $x_\theta \in \mathbb{X}$ com $\|x_\theta\| = 1$ tal que*

$$\|x_\theta - y\| \geq \theta, \quad \forall y \in Z.$$

Proof: Fixemos $x_0 \in Z^c$, então, como Z é fechado, temos que

$$d_0 := \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Z\} > 0$$

logo, para $\theta \in]0, 1[$ existe $y_0 \in Z$, tal que

$$d_0 \leq \|x_0 - y_0\| < \frac{d_0}{\theta}$$

Consideremos $x_\theta = \|x_0 - y_0\|^{-1}(x_0 - y_0)$, então $\|x_\theta\| = 1$ e para cada $y \in Z$, temos que

$$x_\theta - y = \|x_0 - y_0\|^{-1}(x_0 - y_0) - y = \|x_0 - y_0\|^{-1}(x_0 - y_1),$$

onde $y_1 = y_0 + \|x_0 - y_0\|y \in Z$. Assim

$$\|x_\theta - y\| = \|x_0 - y_0\|^{-1}\|x_0 - y_1\| \geq \|x_0 - y_0\|^{-1}d_0 > \theta.$$

□

Theorem 3.2.3 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Se $B = \{x \in \mathbb{X} : \|x\| \leq 1\}$ é compacto, então $\mathbb{X}$ tem dimensão finita.*

Proof: Procedamos por contradição, isto é, suponhamos que $\mathbb{X}$ tem dimensão infinita. Seja $x_1 \in \mathbb{X}$ tal que $\|x_1\| = 1$, então $\mathrm{Ger}\{x_1\}$ é um subespaço fechado próprio de $\mathbb{X}$. Pelo Lema de Riesz para $\theta = 1/2$ existe $x_2 \in \mathbb{X}$, com $\|x_2\| = 1$, tal que

$$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Como $\mathrm{Ger}\{x_1, x_2\}$ é um subespaço fechado próprio de $\mathbb{X}$, novamente pelo Lema de Riesz existe $x_3 \in \mathbb{X}$, com $\|x_3\| = 1$, tal que

$$\|x_3 - x_i\| \geq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2$$

Seguindo o mesmo processo, construimos uma sequência (x_n) em B tal que para todo $n \geq 2$ temos que

$$\|x_n - x_i\| \geq \frac{1}{2}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

assim

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n \neq m.$$

Desta forma nenhuma subsequência de (x_n) pode convergir pois não seria de Cauchy o que contradiz a compacidade de B. $\square$

Corollary 3.2.4 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Então, $\mathbb{X}$ tem dimensão finita se, e somente se, todo subconjunto fechado e limitado deste espaço é compacto*

Proof: Deixamos a prova como exercício para o leitor. $\square$

3.3 Operadores Lineares

Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços normados, uma aplicação T definida num subespaço $D(T)$ de $\mathbb{X}$ assumindo valores em $\mathbb{Y}$ tal que

$$T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in D(T), \alpha \text{ escalar}.$$

é chamado de operador linear. Note que desta definição segue que $T(0) = 0$ e a igualdade acima pode ser substituída por

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in D(T), \alpha, \beta \text{ escalares}.$$

Operadores lineares também são chamados de transformações lineares ou aplicações lineares. Também, com o intuito de diminuir o excesso de notação, denotaremos Tx em lugar de $T(x)$

Definição: Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços normados, dizemos que o operador linear $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é limitado se existe $C \geq 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in D(T). \tag{3.1}$$

Observação: Observe que a definição de um operador ser limitado depende das normas consideradas em $D(T)$ e em $\mathbb{Y}$. Neste caso a norma considerada em $D(T)$ é a norma herdada do espaço $\mathbb{X}$ a menos que se mencione alguma outra norma em $D(T)$.

Observação: Se T um operador limitado temos que o conjunto $\{\|Tx\|/\|x\| : x \in D(T),\ x \neq 0\}$ é limitado, desta forma definimos a *norma do operador* T como sendo

$$\|T\| := \sup_{0 \neq x \in D(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Sendo assim, temos que $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in D(T)$ e $C = \|T\|$ é a menor constante que satisfaz (3.1).

Exemplo: O operador integral $T : C[0,1] \to C[0,1]$ dado por

$$(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\, ds,$$

é um operador limitado, pois

$$|(Tx)(t)| = \left| \int_0^t x(s)\, ds \right| \leq |t|\|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty, \quad \forall t \in [0,1],$$

de onde segue que $\|Tx\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ para todo $x \in C[0,1]$ e $\|T\| \leq 1$. Observe que se consideramos $x_n(t) = \sqrt[n]{t}$ com $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{\|Tx_n\|_\infty}{\|x_n\|_\infty} = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

de onde segue que $\|T\| = 1$.

Exemplo: O operador diferenciação $Tx = x'$ infelizmente não pode ser considerado um operador de $C[0,1]$ em $C[0,1]$. Para que este operador faça sentido o definimos em $D(T) = C^1[0,1]$, neste caso, $T : D(T) \subseteq C[0,1] \to C[0,1]$ é linear porém não é um operador limitado (note que a norma considerada em $D(T) = C^1[0,1]$ é a norma induzida de $C[0,1]$). De fato, se fosse limitado existiria $C > 0$ tal que $\|Tx\|_\infty \leq C\|x\|_\infty$ para todo $x \in C^1[0,1]$, assim para a sequência $x_n(t) = t^n$ teríamos que $\|x_n'\|_\infty \leq C\|x_n\|_\infty$, isto é, $n \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o qual é absurdo. Por outro lado, se em $D(T) = C^1[0,1]$ considerarmos a norma

$$\|x\|_{C^1} := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty,$$

o operador diferenciação $T : D(T) \to C[0,1]$ é limitado, pois $\|Tx\|_\infty \leq \|x\|_{C^1}$ para todo $x \in C^1[0,1]$, neste caso deixamos para o leitor o cálculo de $\|T\|$.

Theorem 3.3.1 *Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear. Se dim$(\mathbb{X}) < \infty$, então T é limitado.*

Proof: Seja $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de $\mathbb{X}$, então para $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, temos que

$$\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|Te_i\| \leq c_0 \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|,$$

onde $c_0 = \max\{\|Te_i\| : i = 1, \dots, n\}$. Como $\|x\|_B := \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$ é uma norma em $\mathbb{X}$, da equivalência de normas segue que $\|Tx\| \leq c_0 \|x\|_B \leq C\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Portanto, T é limitado. □

Theorem 3.3.2 *Seja $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear. Então T é limitado se, e somente se, é contínuo.*

Proof: ($\Rightarrow$): Seja (x_n) uma sequência em $D(T)$ tal que $x_n \to x_0 \in D(T)$. Desde que

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\| \|x_n - x_0\|,$$

Temos que $Tx_n \to Tx_0$, logo T é um operador contínuo.
($\Leftarrow$): Como T é contínuo em $x = 0$ temos que, para $\epsilon = 1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } y \in D(T) \text{ com } \|y\| < \delta \text{ então } \|Ty\| < 1.$$

Seja $x \in D(T)$, $x \neq 0$, tomamos $y = \delta x / (2\|x\|)$, logo $\|y\| < \delta$ e portanto

$$\left\| T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right) \right\| = \frac{\delta \|Tx\|}{2\|x\|} < 1,$$

Assim, $\|Tx\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$, de onde segue que T é um operador limitado □

Theorem 3.3.3 *Seja $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado. Se $\mathbb{Y}$ é um espaço de Banach, então existe uma única extensão linear limitada $\tilde{T} : \overline{D(T)} \to \mathbb{Y}$ tal que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Proof: Existência. Seja $x \in \overline{D(T)}$, então existe uma sequência (x_n) em $D(T)$ tal que $x_n \to x$. Desde que

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\|\|x_n - x_m\|, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

seque que a sequência (Tx_n) é de Cauchy em $\mathbb{Y}$ e portanto é convergente. Definimos

$$\tilde{T}(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n).$$

Este limite e independe da sequência que aproxime x, pois se houver alguma outra sequência (y_n) em $D(T)$ tal que $y_n \to x$, de

$$\|Tx_n - Ty_n\| \leq \|T\|\|x_n - y_n\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

segue que (Tx_n) e (Ty_n) tem o mesmo limite. O leitor pode verificar a linearidade de $\tilde{T}$ que é consequência da linearidade de T e dos limites de sequências. Vejamos que $\tilde{T}$ é limitado. Seja $x \in \overline{D(T)}$, então existe (x_n) em $D(T)$ tal que $x_n \to x$. Por outro lado, desde que T é limitado temos que $\|Tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\|$ e pasando ao limite temos que $\|\tilde{T}x\| \leq \|T\|\|x\|$, mostrando assim $\tilde{T}$ é limitado e $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Por outro lado, como para todo $x \in D(T)$ temos que

$$\|Tx\| = \|\tilde{T}x\| \leq \|\tilde{T}\|\|x\|,$$

segue que $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$, mostrando assim que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.
Unicidade. Se houver outro operador linear limitado que extende T a $\overline{D(T)}$, para $x \in \overline{D(T)}$ considerando (x_n) em $D(T)$ tal que $x_n \to x$ temos que

$$Lx = \lim_{n\to\infty} Lx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \tilde{T}x.$$

portanto $L = \tilde{T}$ em $\overline{D(T)}$. □

Observação: Os operadores lineares de grande interesse em grande parte das aplicações são aqueles que são densamente definidos, isto é, aqueles operadores lineares $T : D(T) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ onde $D(T)$ de um subespaço denso de $\mathbb{X}$. Segundo o teorema anterior, operadores lineares limitados densamente definidos se estendem de forma única a operadores lineares limitados definidos em todo o espaço $\mathbb{X}$ preservando sua norma. Diante deste observação, quando se trate de operadores limitados, restringiremos nosso estudo a aqueles globalmente definidos, isto é, quando definidos em todo $\mathbb{X}$.

Espaço de operadores lineares limitados

Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados, o conjunto de operadores lineares limitados

$$B(\mathbb{X}; \mathbb{Y}) := \{T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} : T \text{ é linear e limitado}\}$$

com as operações de soma de vetores e produto por um escalar dados por

$$(T_1 + T_2)(x) := T_1(x) + T_2(x), \quad (\alpha T)(x) := \alpha T(x),$$

é um espaço vetorial. Neste espaço, deixamos pro leitor verificar que a aplicação

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

é uma norma em $B(\mathbb{X};\mathbb{Y})$. Em particular, quando $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ adotaremos a notação $B(\mathbb{X}) := B(\mathbb{X};\mathbb{X})$.

Theorem 3.3.4 *Se $\mathbb{Y}$ é um espaço de Banach, então $B(\mathbb{X};\mathbb{Y})$ é é um espaço de Banach.*

Proof: Seja (T_n) uma sequência de Cauchy em $B(\mathbb{X};\mathbb{Y})$, logo para $\epsilon > 0$ fixado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Em vista que

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \epsilon\|x\|, \quad \forall n, m \geq n_0, \tag{3.2}$$

segue que, para cada $x \in \mathbb{X}$, a sequência $(T_n x)$ de Cauchy no espaço de Banach $\mathbb{Y}$, logo $T_n x \to y_x \in \mathbb{Y}$ de onde definimos o operador $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ dado por $Tx = y_x$. Deixamos ao leitor verificar que T é linear restando provar que é um operador limitado e que $T_n \to T$. De fato, desde que a sequência (T_n) é de cauchy então é limitada, logo existe $C > 0$ tal que $\|T_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desque que $\|T_n x\| \leq \|T_n\|\|x\| \leq C\|x\|$ segue que $\|Tx\| \leq C\|x\|$, portanto T é limitado. Agora, fazendo $m \to \infty$ em (3.2) temos que

$$\|T_n x - Tx\| \leq \epsilon\|x\|, \quad \forall n \geq n_0,$$

de onde seque que

$$\|T_n - T\| \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

isto é, $T_n \to T$. $\square$

Espaço Dual

Se $\mathbb{X}$ é um espaço normado sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$. Uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ é chamado de *funcional*. Se f é linear é chamado de *funcional linear*, e se também for limitado é chamado de *funcional linear limitado*. O espaço dual de $\mathbb{X}$, denotado por $\mathbb{X}'$, é definido como o espaço de todos os funcionais lineares limitados definidos em $\mathbb{X}$, isto é

$$\mathbb{X}' := B(\mathbb{X}; \mathbb{K}).$$

Como $\mathbb{K}$ é um espaço de Banach, pelo teorema anterior $\mathbb{X}'$ é um espaço de Banach, mesmo que $\mathbb{X}$ não seja.

Exemplo: Consideremos o operador $f : C[a, b] \to \mathbb{R}$ dados por

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, dt.$$

Então f é um funcional linear limitado, pois é linear e

$$|f(x)| \leq (b - a)\|x\|_\infty, \quad x \in C[a, b].$$

Observe que a desigualdade anterior implica que $\|f\| \leq b - a$. Considerando $x \equiv 1$ temos que $\frac{|f(x)|}{\|x\|_\infty} = b - a$ de onde seque $\|f\| = b - a$.

Exemplo: Seja $1 \leq p < \infty$, consideremos $y = (y_n)$ um elemento de ℓ^q fixado, onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Então a aplicação $f_y : \ell^p \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad \forall x = (x_n) \in \ell^p,$$

é um funcional linear bem definido (garantido pela desigualdade de Hölder), e desde que $|f_y(x)| \leq \|y\|_q \|x\|_p$, ele é limitado. Deixamos para o leitor o cálculo de $\|f_y\|$.

Theorem 3.3.5

Se $\mathbb{X}$ é um espaço normado de dimensão n, então seu espaço dual $\mathbb{X}'$ também tem dimensão n.

Proof: Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $\mathbb{X}$, então para $x \in \mathbb{X}$, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Para cada $j = 1, \ldots, n$ definimos os funcionais $\pi_j : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ dado por

$$\pi_j(x) = \alpha_j$$

Verifica-se facilmente que $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ é um conjunto de operadores lineares linearmente independente, e da equivalência de normas em $\mathbb{X}$ temos que

$$|\pi_j(x)| = |\alpha_j| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_j| \leq c\|x\|,$$

logo $\pi_j \in \mathbb{X}'$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Por outro lado, se tomamos qualquer $f \in \mathbb{X}'$, temos que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \pi_i(x), \text{ onde } \beta_i = f(e_i)$$

isto é $f = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \pi_i$, de onde segue que $\mathbb{X}' = \mathrm{Ger}\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$. □

Definição: (Abuso de linguagem) Seja $\mathbb{X}'$ o espaço dual de um espaço normado $\mathbb{X}$. Qualquer espaço de Banach $\mathbb{Y}$ que seja isometricamente isomorfo com $\mathbb{X}'$ ainda será chamado de *o espaço dual de* $\mathbb{X}$, e abusaremos da notação escrevendo $\mathbb{X}' = \mathbb{Y}$.

Exemplo: [Teorema de representação de Riesz em ℓ^1] O espaço dual de ℓ^1 é ℓ^∞. De fato, considere a base de Schauder $\{e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}\}$ de ℓ^1, definimos $\Lambda : (\ell^1)' \to \ell^\infty$ dado por

$$\Lambda f = (y_n^f) \quad \text{onde} \quad y_n^f := f(e_n) \text{ para } f \in (\ell^1)'.$$

Vejamos agora que Λ está bem definida e é um isomorfismo isométrico. Seja $f \in (\ell^1)'$ temos que

$$|y_n^f| = |f(e_n)| \le \|f\|\|e_n\|_1 \le \|f\| \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

isto é, $(y_n^f) \in \ell^\infty$ e portanto $\Lambda f \in \ell^\infty$, mostrando assim que Λ está bem definida.

Λ é linear: de fato, sejam $f, g \in (\ell^1)'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$\Lambda(\alpha f + g) = ([\alpha f + g](e_n)) = \alpha(f(e_n)) + (g(e_n)) = \alpha\Lambda f + \Lambda g.$$

Λ preserva normas: Seja $f \in (\ell^1)'$. De (3.3) temos que $\|\Lambda f\|_\infty \le \|f\|$. Por outro lado desde que

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n), \quad \forall x = (x_n) \in \ell^1,$$

segue da desigualdae de Holder que

$$|f(x)| = \|x\|_1\|\Lambda f\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \|f\| \le \|\Lambda f\|_\infty.$$

Portanto $\|\Lambda f\|_\infty = \|f\|$.

Λ é sobrejetivo: Seja $y = (y_n) \in \ell^\infty$, então consideremos $f : \ell^1 \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \text{para} \quad x = (x_n) \in \ell^1.$$

Da desigualdade de Holder segue que f esta bem definido e que $|f(x)| \le \|x\|_1\|y\|_\infty$. Facilmente se verifica que f é linear e portanto será um funcional linear limitado e portanto $f \in (\ell^1)'$. Por outro lado, observe que $f(e_m) = y_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, isto é $\Lambda f = y$.

Exemplo: [Teorema de representação de Riesz em ℓ^p] Seja $1 < p < \infty$. O espaço dual de ℓ^p é ℓ^q sendo que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De fato, consideremos a base de Schauder $\{e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}\}$ de ℓ^p, definamos $\Lambda : (\ell^p)' \to \ell^q$ por

$$\Lambda f = (y_n^f) \quad \text{onde} \quad y_n^f := f(e_n) \text{ para } f \in (\ell^p)'.$$

Vejamos que Λ esta bem definida. Seja $f \in (\ell^p)'$, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos a sequência $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \xi_3^n, \ldots)$ dada por

$$\xi_k^n = \begin{cases} \frac{|f(e_k)|^q}{f(e_k)} & \text{se} \quad k \leq n \text{ e } f(e_k) \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad k > n \text{ ou } f(e_k) = 0, \end{cases}$$

de onde segue que

$$\sum_{k=1}^n |y_k^f|^q = \sum_{k=1}^n |f(e_k)|^q = \sum_{k=1}^n \xi_k^n f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^n e_k\right) = f(x_n) = |f(x_n)| \leq \|f\| \|x_n\|_p,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, da definição de $x_n = (\xi_k^n)$ acima temos que

$$\|x_n\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^q\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n |y_k^f|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Substituindo esta última na desigualdade anterior temos que

$$\left(\sum_{k=1}^n |y_k^f|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e portanto $(y_k^f) \in \ell^q$ mostrando assim a boa definição de Λ. Deixamos ao leitor verificar, seguindo as mesmas ideias que o exemplo anterior, que Λ é um isomorfismo isométrico.

3.4 Exercícios

1. Seja $a < b$, mostre que as funções $f_0, f_1, \dots, f_p$ dadas por $f_i(t) = t^i$ são linearmente independentes no espaço $C[a, b]$.

2. Seja M um subconjunto do espaço vetorial $\mathbb{X}$, mostre que $\mathrm{Ger}(M)$ é o menor subespaço de $\mathbb{X}$ que contem M.

3. Seja $B = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ um subconjunto do espaço vetorial complexo $\mathbb{X}$. Considere $\mathbb{Y}$ o espaço vetorial $\mathbb{X}$ restrito ao corpo de escalares $\mathbb{R}$.

   (a) Se B é uma base de $\mathbb{X}$, Se B é uma base de $\mathbb{Y}$? Qual a dimensão de $\mathbb{Y}$?

   (b) Assumamos que $B \subseteq \mathbb{X}$ é linearmente dependente. B continua sendo linearmente dependente em $\mathbb{Y}$?

4. Se Z é um subespaço de $\mathbb{X}$, mostre que $\overline{Z}$ também é um subespaço de $\mathbb{X}$.

5. Considere $\mathbb{X}$ o espaço normado formado pelas sequências reais que tem, no máximo, um número finito de termos não nulos com a norma

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad x = (x_k) \in \mathbb{X}.$$

   Encontre uma sequência (x_n) em $\mathbb{X}$ tal que a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não convirja, porém seja absolutamente convergente.

6. Mostre que todo espaço normado (real ou complexo) de dimensão finita é separável e completo.

7. Considere o conjunto $\mathcal{B} = \{e_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\}$.

   (a) Mostre que $\mathcal{B}$ não é uma base de Hamel para ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$.

   (b) Mostre que $\mathcal{B}$ não é uma base de Schauder para ℓ^∞.

   (c) Mostre que $\mathrm{Ger}(\mathcal{B})$ não é fechado em ℓ^p, para $1 \leq p \leq \infty$.

8. Mostre que normas equivalentes num espaço vetorial induzem a mesma topologia, isto é, se um conjunto é aberto com uma norma também será aberto com uma norma equivalente.

9. Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Mostre que $C(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach com sua norma usual $\| \cdot \|_\infty$.

10. Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Se Z é um subespaço vetorial finito dimensional de $\mathbb{X}$, mostre que Z é fechado e completo.

11. Sejam $\mathbb{X}$ e Z como no Lemma de Riesz. Se Z tem dimensão finita, mostre que

(a) Para $x_0 \in \mathbb{X}$, existe $y_1 \in Z$ tal que $\|x_0 - y_1\| = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Z\}$.

(b) Mostre que existe $x_0 \in \mathbb{X}$ com $\|x_0\| = 1$ tal que $d(x_0, Z) = 1$.

12. Seja $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador Linear. Mostre que

    (a) $\mathrm{Nu}(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{X}$.

    (b) $\mathrm{Im}(T) = \{Tx : x \in D(T)\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{Y}$.

    (c) T é injetiva se e somente se $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$.

    (d) Se T é injetiva, então $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é linear.

13. Sejam $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $S : \mathbb{Y} \to Z$ operadores lineares bijetivos. Mostre que
$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

14. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear, suponha que $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ são de dimensão finita e que $\dim(\mathbb{X}) = \dim(\mathbb{Y})$. Mostre que T é injetiva se, e somente se, for sobrejetiva.

15. Considere o operador “shift à direita” $S : \ell^p \to \ell^p$ dado por
$$S(x) = (0, x_1, x_2, \ldots) \quad \text{para} \quad x = (x_1, x_2, \ldots).$$
S define um isomorfismo isométrico de ℓ^p em ℓ^p?

16. Considere duas normas equivalentes $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_1$ num espaço vetorial $\mathbb{X}$. Mostre que $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach se, e somente se, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_2)$ é um espaço de Banach.

17. Considere $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$, onde para cada inteiro não negativo n, p_n é um polinômio de grau n. Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de Hamel do espaço de polinômios $\mathcal{P}$.

18. Considere o espaço vetorial
$$C_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua e limitada}\}$$
com a norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Para $r > 0$ fixado, mostre que a aplicação $T : C_b(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ dado por $(Tf)(x) = f(x-r)$ é um operador linear limitado. Encontre $\|T\|$.

19. Seja $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear. Se existe $\epsilon > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \epsilon\|x\|$ para todo $x \in D(T)$, mostre que T é injetivo e que seu inverso $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é um operador linear limitado tal que $\|T^{-1}\| \leq 1/\epsilon$.

20. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado. Mostre que
$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

21. Mostre que a aplicação

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

é uma norma no espaço vetorial $B(\mathbb{X};\mathbb{Y}) = \{T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} : \ T \text{ é linear limitado } \}$.

22. Mostre que o operador $f : C[a,b] \to \mathbb{R}$ dado por $Tx = x(a)$ é um funcional linear limitado. Calcule $\|f\|$.

23. Considere os espaços normados $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ e $(C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1})$ onde

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{e} \quad \|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Considere o operador diferenciação $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ definido por $Tf = f'$. Mostre que T é um operador linear limitado e que $\|T\| = 1$.

24. Seja k uma função não negativa em $C[0,1]$, considere operador $T : C[0,1] \to C[0,1]$ dado por

$$Tf(t) = \int_0^t k(t-s) f(s)\, ds.$$

Mostre que T é um operador linear limitado é $\|T\| = \displaystyle\int_0^1 k(\tau)\, d\tau$.

25. Seja $a = (a_k) \in \ell^\infty$, considere o operador de multiplicação $T_a : \ell^p \to \ell^p$ dado por $T(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)$.

    (a) Mostre que T_a é um operador linear limitado e encontre $\|T_a\|$.

    (b) Estabeleça condições sobre a sequencia a para que T_a seja injetivo e limitado. Com as condições encontradas T_a é sobrejetivo?.

26. Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ um funcional linear. Se $f(x_0) \neq 0$ para $x_0 \in \mathbb{X}$, mostre que

$$\mathbb{X} = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Ger}\{x_0\}.$$

Isto é, a codimensão do $\mathrm{Nu}(f)$ é 1.

27. Encontre as normas dos seguintes funcionais lineares:

    (a) $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dados por $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ para $x = (x_k)$.

    (b) $f : \ell_0^\infty \to \mathbb{R}$ dados por $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$ para $x = (x_k)$. Aqui ℓ_0^∞ é o subespaço de ℓ^∞ das sequências reais que convergem para zero.

28. Considere o subespaco $Z = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0\}$ de $C[0,1]$. Analise para que valores de $r > 0$ o funcional linear

$$f_r(x) = \int_0^1 \frac{x(t)}{t^r}\, dt,$$

pertence a Z' e nesses casos encontre $\|f_r\|$.

29. Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Se $f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que para toda sequência (x_n) que converge para zero tem-se que $(f(x_n))$ é limitada, mostre que f é um funcional limitado.

30. Seja f um funcional linear definido em $\mathbb{R}^2$.

    (a) Mostre que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = ax + by$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (b) Para $1 \leq p \leq \infty$ considere $\mathbb{R}^2$ com a norma $\|\cdot\|_p$. Calcule $\|f\|$.

31. Considere o operador linear $T : C[0,1] \to C[0,1]$ dado por

$$T(x)(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

    (a) Mostre que T é injetivo e encontre $\mathrm{Im}(T)$.

    (b) Mostre que o operador linear $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \subseteq C[0,1] \to C[0,1]$ não é limitado.

32. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $T_n = S^n$, onde o operador $S : \ell^2 \to \ell^2$ é definido por $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) \mapsto (\xi_3, \xi_4, \xi_5, \ldots)$.

    (a) Para cada $x \in \ell^2$, mostre que a sequência $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

    (b) Mostre que $\|T_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porém sequência (T_n) não converge em $B(\ell^2, \ell^2)$.

33. Sejam $\mathbb{X}$ um espaço de Banach e $T \in B(\mathbb{X}; \mathbb{X})$, com $\|T\| < 1$.

    (a) Mostre que o operador $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ é o inverso de $I - T$.

    (b) Mostre que $(I - T)^{-1}$ é um operador limitado e que $\|(I - T)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|T\|}$.

34. Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços normados. Se dim $(\mathbb{X}) = \infty$ e $\mathbb{Y} \neq \{0\}$. Prove que existem operadores lineares não limitados definidos sobre $\mathbb{X}$ assumindo valores em $\mathbb{Y}$.

35. Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado real, $f \in \mathbb{X}'$ com $f \neq 0$ e $H = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = c\}$ um hiperplano que divide o espaço $\mathbb{X}$ em dois conjuntos

$$X_1 = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \leq c\}, \quad X_2 = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \geq c\}.$$

(a) Se $c = \|f\|$, mostre que $B_1(0) \subseteq X_1$

(b) Se $0 \leq c < \|f\|$, mostre que $B_1(0) \nsubseteq X_1$

36. Considere o espaço de Banach $\ell_0^\infty = \{x = (\xi_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \text{tal que} \quad \xi_n \to 0\}$ com a norma $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|$. Mostre que o espaço dual (topológico) de ℓ_0^∞ é ℓ^1.

37. Se $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são espaços normados isometricamente isomorfos, mostre que $\mathbb{X}'$ e $\mathbb{Y}'$ também são isometricamente isomorfos.

Capítulo 4

Espaços com produto interno

Vejamos primeiro que produtos escalares são funções contínuas.

Theorem 4.0.1 *Todo produto interno de um espaço vetorial é uma aplicação contínua.*

Proof: Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja (x_n, y_n) uma sequência em $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ tal que $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, logo

$$\|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\| = \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{0.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| &= |\langle x_n - x_0, y_n \rangle + \langle x_0, y_n - y_0 \rangle| \\ &\leq \|x_n - x_0\| \|y_n\| + \|x_0\| \|y_n - y_0\|. \end{aligned}$$

O lado direito desta desigualdade converge para zero por causa da convergência em (0.1) e o fato de $(\|y_n\|)$ ser uma sequência limitada (por ser convergente). Logo $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$ de onde segue a continuidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\square$

Definição: Dizemos que um espaço com produto interno $\mathbb{X}$ é um espaço de Hilbert se for completo.
Exemplo: Os espaços ℓ^2 e $L^2(a, b)$ são espaços de Hilbert.

4.1 Ortogonalidade

Definição: Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Dizemos que dois vetores x, y de $\mathbb{X}$ são ortogonais e escrevemos $x \perp y$, se $\langle x, y \rangle = 0$.

2. Um vetor x é ortogonal a um subconjunto A de $\mathbb{X}$, se $x \perp y$ para todo $y \in A$. Dois subconjuntos A, B e $\mathbb{X}$ são ortogonais entre si, se $x \perp y$ para todo $x \in A$, $y \in B$.

3. Dizemos que um subconjunto A de $\mathbb{X}$ é um conjunto ortogonal, se quaisquer dos vetores distintos de A são ortogonais entre si. Se adicionalmente os elementos deste conjunto tem norma unitária ($\|x\| = 1\ \forall x \in A$), A é dito um conjunto ortonormal.

Exemplo: No espaço ℓ^2 com seu produto interno usual

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad x = (x_k),\ y = (y_k),$$

o conjunto $A = \{e_i = (\delta_{ik})_{k\in\mathbb{N}} : i \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal.

Observação: Se A é um subconjunto ortogonal de vetores não nulos, temos que $B = \{x/\|x\| : x \in A\}$ é um subconjunto ortonormal e $\mathrm{Ger}(B) = \mathrm{Ger}(A)$.

Exemplo: Consideremos o espaço $C[-\pi, \pi]$ com o produto interno

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)\, dt.$$

Então o conjunto $A = \{x_n(t) = \sin(nt) : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortogonal, pois para $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle x_n, x_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)t) - \cos((n+m)t)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)t)}{n-m} - \frac{\sin((n+m)t)}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\|x_n\|^2 = \langle x_n, x_n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2nt)\, dt = \pi,$$

Assim o conjunto $B = \{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal.

Theorem 4.1.1 *Todo subconjunto ortogonal A de vetores não nulos de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$ é linearmente independente.*

Proof: Sejam $e_1, \ldots, e_m \in A$. Se escrevemos

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i = 0,$$

para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ fixado, temos que

$$0 = \langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle e_i, e_j\rangle = \alpha_j \|e_j\|^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0.$$

Portanto, os vetores $e_1, \ldots, e_m$ são L.I. Consequentemente A é um conjunto linearmente independente. $\square$

Theorem 4.1.2 (Teorema de Pitágoras) *Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno. Se $\{x_1, \ldots, x_m\}$ é um conjunto ortogonal tem-se*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} x_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2.$$

Proof: De fato,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} x_i \Big\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{m} x_i, \sum_{i=j}^{m} x_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2.$$

$\square$

Definição: Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial. Um subconjunto $M \subseteq \mathbb{X}$ é dito convexo, se para $x, y \in M$ tem-se que $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$ para todo $\alpha \in]0,1[$.

Theorem 4.1.3 (Projeção Ortogonal) *Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno e $M \neq \emptyset$ um subconjunto convexo e completo (com a métrica induzida pelo produto interno). Então, para cada $x \in \mathbb{X}$ existe um único $y_x \in M$ tal que*

$$\|x - y_x\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

Proof: **Existência:** Consideremos $\delta = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$, então existe uma sequência (y_n) em M tal que

$$\|x - y_n\| \to \delta.$$

Por outro lado, aplicando a lei do paralelogramo temos que

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 = 2(\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2) - \|y_n + y_m - 2x\|^2.$$

Observe que

$$\|y_n + y_m - 2x\|^2 = 4 \left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x \right\|^2 \geq 4\delta^2,$$

pois $\frac{y_n + y_m}{2} \in M$ ja que M é convexo. Usando esta desigualdade na equação anterior temos que

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\delta^2, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, o lado direito torna-se pequeno quando n, m são suficientemente grandes e portanto (y_n) é uma sequência de cauchy em M. Por M ser completo, existe $y_x \in M$ tal que $y_n \to y_x$. Da continuidade da norma segue que $\|x - y_n\| \to \|x - y_x\|$, e por unicidade do limite temos que $\|x - y_x\| = \delta$, isto é $\|x - y_x\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$.
Unicidade: Suponhamos que existem $y_1, y_2 \in M$ tal que

$$\|x - y_1\| = \delta = \|x - y_2\|,$$

então, aplicando novamente a lei do paralelogramo temos

$$\|y_1 - y_2\|^2 = \|(y_1 - x) + (x - y_2)\|^2 = 2(\|y_1 - x\|^2 + \|x - y_2\|^2) - \|y_1 + y_2 - 2x\|^2.$$

Como

$$\|y_1 + y_2 - 2x\|^2 = 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 \geq 4\delta^2,$$

pois $\frac{y_1+y_2}{2} \in M$. Usando esta desigualdade na equação anterior temos

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq 2(\|y_1 - x\|^2 + \|x - y_2\|^2) - 4\delta^2 = 2(\delta^2 + \delta^2) - 4\delta^2 = 0,$$

Portanto $\|y_1 - y_2\| = 0$, consequentemente $y_1 = y_2$. □

Definição: Seja M um subconjunto convexo, completo e não vazio do espaço com produto interno $\mathbb{X}$. Definimos o *Operador Projeção Ortogonal de* $\mathbb{X}$ *sobre* M, à aplicação $P = P_M : \mathbb{X} \to M$ definida por $Px = y_x$ onde y_x é do teorema anterior. Isto é, para cada $x \in \mathbb{X}$, Px é o único elemento em M tal que

$$\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

Alem disso, note que $Px = x$ para todo $x \in M$.

Theorem 4.1.4 *Seja Z é um subespaço vetorial completo de $\mathbb{X}$ consideremos $P = P_Z$ o operador projeção ortogonal sobre Z. Então, para cada $x \in \mathbb{X}$ temos que Px é o único elemento de Z tal que $x - Px \perp Z$.*

Proof: Seja $x \in \mathbb{X}$, suponhamos que $z_x = x - Px$ não é ortogonal a Z, logo existe $y \in Z$ tal que

$$\langle z_x, y\rangle \neq 0.$$

Então, evidentemente $y \neq 0$, e para qualquer escalar α temos que

$$\|z_x - \alpha y\|^2 = \|z_x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle z_x, \alpha y\rangle + \|\alpha y\|^2.$$

Em particular, tomamos $\alpha = \langle z_x, y\rangle/\|y\|^2$, assim

$$\mathrm{Re}\langle z_x, \alpha y\rangle = \frac{|\langle z_x, y\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

de onde seque que

$$\|z_x - \alpha y\|^2 = \|z_x\|^2 - \frac{|\langle z_x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} < \|z_x\|^2,$$

ou equivalentemente $\|x - y_\alpha\| < \|x - Px\|$ onde $y_\alpha = Px + \alpha y \in Z$. Esta desigualdade contradiz a definição de Px, logo devemos ter que $x - Px \perp Z$.

Unicidade: Seja $y_0 \in Z$ tal que $x - y_0 \perp Z$. Aplicando o teorema de Pitágoras temos

$$\|x - Px\|^2 = \|\underbrace{x - y_0}_{\perp Z} + \underbrace{y_0 - Px}_{\in Z}\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - Px\|^2.$$

Isto é, $\|x - y_0\| \leq \|x - Px\| = \inf\{\|x - y\| : y \in Z\}$ com $y_0 \in Z$. Portanto $y_0 = Px$.
□

Theorem 4.1.5 *Seja Z um subespaço de dimensão finita do espaço com produto interno $\mathbb{X}$, consideremos o operador projeção ortogonal $P : \mathbb{X} \to Z$. Se $\{e_1, \ldots, e_m\}$ um base ortonormal de Z, então*

$$Px = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Proof: Seja $x \in \mathbb{X}$, como $Px \in Z$ temos que existem escalares $c_1, \ldots, c_m$ tal que

$$Px = \sum_{i=1}^{m} c_i e_i.$$

Por outro lado, do teorema anterior temos que $x - Px \perp Z$, isto é,

$$\langle x - Px, y\rangle = 0, \quad \forall y \in Z.$$

Em particular, para cada $j = 1, \ldots, m$ fixado, temos que

$$0 = \langle x - \sum_{i=1}^{m} c_i e_i, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - c_j\langle e_j, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - c_j,$$

logo $c_j = \langle x, e_j\rangle$ de onde temos o resultado desejado. □

Observação: Se no teorema anterior consideramos simplesmente ortogonalidade em lugar de ortonormalidade, isto é, se $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é uma base ortogonal de Z, teremos que

$$Px = \sum_{i=1}^{m} \left\langle x, \frac{e_i}{\|e_i\|} \right\rangle \frac{e_i}{\|e_i\|} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i.$$

Definição: O coeficiente $\frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$ é chamado de *coeficiente de Fourier do vetor x em relação ao vetor e_i.*

Exemplo: Consideremos $Z = \text{Ger}\{e_1, \ldots, e_m\}$ onde $e_i = (\delta_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$, então a projeção ortogonal $P : \ell^2 \to Z$ é dado por

$$Px = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots), \quad \text{onde } x = (x_n) \in \ell^2.$$

De fato, $\langle x, e_i \rangle = x_i$, logo

$$Px = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots).$$

Definição: Seja M um subconjunto não vazio do espaço com produto interno $\mathbb{X}$, definimos o *complemento ortogonal de M* como

$$M^\perp = \{x \in \mathbb{X} : \langle x, y \rangle = 0, \text{ para todo } y \in M\}.$$

Theorem 4.1.6 *Seja M, N subconjuntos de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$. Então, as seguintes afirmações são válidas*

1. *$M^\perp$ sempre é um subespaço vetorial fechado de $\mathbb{X}$.*
2. *Se $M \subseteq N$, então $M^\perp \supseteq N^\perp$.*
3. *$M \subseteq M^{\perp\perp}$ onde $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$.*
4. *$M^\perp = \big[Ger(M)\big]^\perp = \Big[\overline{Ger(M)}\Big]^\perp$.*

Proof: Verifiquemos o último item, os anteriores ficam como exercício para o leitor. Em vista do item 2, basta mostrar que $M^\perp \subseteq \Big[\overline{\text{Ger}(M)}\Big]^\perp$. Assim, seja $y \in M^\perp$, logo $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in M$, e da linearidade do produto interno segue que $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in \text{Ger}(M)$. Seja agora $x_0 \in \overline{\text{Ger}(M)}$, logo existe uma sequência (x_n) em $\text{Ger}(M)$ tal que $x_n \to x_0$ e como $\langle x_n, y \rangle = 0$ segue da continuidade do produto interno que $\langle x_0, y \rangle = 0$, isto é $y \in \Big[\overline{\text{Ger}(M)}\Big]^\perp$. $\square$

Definição: Dizemos que um espaço vetorial $\mathbb{X}$ é soma direta dos subespaços vetoriais Y e Z, e escrevemos $\mathbb{X} = Y \oplus Z$, se $\mathbb{X} = Y + Z$ e $Y \cap Z = \{0\}$, onde

$$Y + Z := \{y + z : y \in Y, \ z \in Z\}.$$

Theorem 4.1.7 *Se Z é um subespaço vetorial completo de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$, então*

$$\mathbb{X} = Z \oplus Z^{\perp}$$

Proof: Seja $x \in \mathbb{X}$, então pelo teorema 4.1.4 tem-se que $x - Px \in Z^{\perp}$, logo existe $z \in Z^{\perp}$ tal que $x - Px = z$, portanto $x = Px + z \in Z + Z^{\perp}$. Agora, seja $y \in Z \cap Z^{\perp}$, então $\langle y, y\rangle = 0$ e portanto $y = 0$. Logo $Z \cap Z^{\perp} = \{0\}$. $\square$

Theorem 4.1.8 *Se Z é um subespaço vetorial completo de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$, então*

$$Z = Z^{\perp\perp}$$

Proof: Do teorema 4.1.6 temos que $Z \subseteq Z^{\perp\perp}$, logo basta mostrar que $Z^{\perp\perp} \subseteq Z$. De fato, seja $x \in Z^{\perp\perp}$, do teorema 4.1.7 temos que $x = y + z$ onde $y \in Z$ e $z \in Z^{\perp}$, assim $z = x - y \in Z^{\perp\perp}$ oqual implica que $z \perp Z^{\perp}$. Desta forma, como $z \in Z^{\perp}$ e $z \perp Z^{\perp}$ temos que $\langle z, z\rangle = 0$, logo $z = 0$ e consequentemente $x = y \in Z$. $\square$

Theorem 4.1.9 (Desigualdade de Bessel) *Seja (e_n) uma sequência ortonormal de $\mathbb{X}$, então para cada $x \in \mathbb{X}$ temos que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Proof: Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos a projeção ortogonal $P_m : \mathbb{X} \to M_m$ onde $M_m = \text{Ger}\{e_1, \ldots, e_m\}$. Seja $x \in \mathbb{X}$, pelo teorema 4.1.4 $z := x - P_m x \in M_m^{\perp}$ e portanto $z \perp P_m x$. Dai temos que $\|x\|^2 = \|P_m x\|^2 + \|z\|^2$ de onde concluímos que $\|P_m x\|^2 \leq \|x\|^2$. Por outro lado, do teorema 4.1.5 e do teorema de Pitágoras temos que

$$\|P_m x\|^2 = \|\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

de onde segue que

$$\sum_{i=1}^{m} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2,\ \forall m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

$\square$

Observações:

1. Decorre do teorema anterior que $\langle x, e_n\rangle \to 0$ quando $n \to \infty$. Este fato é conhecido como o Lema de Riemann-Lebesgue.

2. Se $\mathbb{X}$ é um espaço de Hilbert, então a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_i\rangle e_i$ é convergente, pois se $s_m = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\langle x, e_i\rangle e_i$ temos que, para $n < m$ o teorema de Pitágoras implica que

$$\|s_m - s_n\|^2 = \Big\| \sum_{i=n+1}^{m} \langle x, e_i\rangle e_i \Big\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |\langle x, e_i\rangle|^2,$$

de onde segue que (s_m) é de Cauchy e portanto converge.

Theorem 4.1.10 *Seja $\{e_k : k \in I\}$ um conjunto ortonormal de $\mathbb{X}$. Então para cada $x \in \mathbb{X}$, o conjunto $J = \{k \in I : \langle x, e_k\rangle \neq 0\}$ é contável.*

Proof: Asumamos que I é infinito. Para cada $m \in \mathbb{N}$ o conjunto $J_m = \{k \in I : |\langle x, e_k\rangle| \geq 1/m\}$ é finito, pois caso contrário existiria uma sequência (e_{k_n}) tal que $|\langle x, e_{k_n}\rangle| \geq 1/m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo assim a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_{k_n}\rangle|^2$ diverge o qual contradiz a desigualdade de Bessel. Portanto $J = \displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} J_m$ é contável. $\square$

Observação: Se I é um conjunto infinito não enumerável, a série $\displaystyle\sum_{k\in I} |\langle x, e_k\rangle|^2$ faz sentido e ainda continua valendo a desigualdade de Bessel

$$\sum_{k\in I} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

4.2 Bases de Hilbert

Definição: Um subconjunto M de um espaço normado $\mathbb{X}$ é dito um conjunto total se $\mathrm{Ger}(M)$ é denso em $\mathbb{X}$.

Theorem 4.2.1 *Seja M um subconjunto do espaço com produto interno $\mathbb{X}$.*

1. *Se M é total então $M^{\perp} = \{0\}$.*

2. *Se $M^{\perp} = \{0\}$ e $\mathbb{X}$ é Hilbert, então M é total.*

Proof: **Item1.** Se M é total então $\mathrm{Ger}(M)$ é denso em $\mathbb{X}$ assim, aplicando o Teorema 4.1.6 temos

$$M^{\perp} = \left[\overline{\mathrm{Ger}(M)}\right]^{\perp} = \mathbb{X}^{\perp} = \{0\}.$$

Item 2. Como $\mathbb{X}$ é Hilbert todo subconjunto fechado é completo. Em particular, o subespaço $\overline{\mathrm{Ger}(M)}$ é completo. Dos Teoremas 4.1.7 e 4.1.6 concluímos que

$$\mathbb{X} = \overline{\mathrm{Ger}(M)} \oplus \left[\overline{\mathrm{Ger}(M)}\right]^{\perp} = \overline{\mathrm{Ger}(M)} \oplus M^{\perp} = \overline{\mathrm{Ger}(M)}.$$

Istoé, M é total. □

Definição: Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno. Um subconjunto $B \subseteq \mathbb{X}$ é dito uma *base de Hilbert* se for um conjunto ortonormal total. Um conjunto ortonormal total também é chamado de conjunto ortonormal completo.

Theorem 4.2.2 *Seja $\mathbb{X} \neq \{0\}$ um espaço de Hilbert.*

1. *$\mathbb{X}$ tem uma base de Hilbert.*

2. *Todas as bases de Hilbert em $\mathbb{X}$ tem a mesma cardinalidade.*

3. *Todo subconjunto ortonormal pode ser estendido a uma base de Hilbert.*

Definição: A *dimensão de Hilbert* (ou dimensão ortogonal) do espaço de Hilbert $\mathbb{X}$ é definida como a cardinalidade de uma de suas bases de Hilbert.

Theorem 4.2.3 (Identidade de Parseval) *Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $B = \{e_k : k \in I\}$ um subconjunto ortonormal. Então, B é uma base de Hilbert de $\mathbb{X}$, se e somente se, para cada $x \in \mathbb{X}$ tem-se*

$$\|x\|^2 = \sum_{k \in I} |\langle x, e_k \rangle|^2. \tag{2.2}$$

Proof: **(⇒):** Como B é uma base de Hilbert, temos que B é total. Consideremos os coeficientes de Fourier x em relação aos elementos de B que não se anulam, os quais uma vez ordenados, são denotados por $\langle x, e_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$ e definamos

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

A boa definição desta série é consequência da convergência das somas parciais $s_m = \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n \rangle e_n$, pois ela é de Cauchy:

$$\|s_{m+p} - s_m\|^2 = \Big\| \sum_{n=m+1}^{m+p} \langle x, e_n \rangle e_n \Big\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+p} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \xrightarrow{m \to \infty} 0.$$

Mostremos que $x - y \in B^{\perp} = \{0\}$, e desta forma conlcuir que $x = y$, o que implica

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \sum_{k\in I} |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

De fato, observe que para $i \in \mathbb{N}$ tem-se que

$$\langle x - y, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle = 0.$$

Por outro lado, para $k \in I$ tal que $\langle x, e_k\rangle = 0$ temos que

$$\langle x - y, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, e_k\rangle = 0 - 0 = 0.$$

($\Leftarrow$): Seja $x \in B^{\perp}$, então $\langle x, e_k\rangle = 0$ para todo $k \in I$, logo

$$\|x\|^2 = \sum_{k\in I} |\langle x, e_k\rangle|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Portanto $B^{\perp} = \{0\}$, logo B é um conjunto total e portanto é uma base de Hilbert
$\square$

Exemplo: Vejamos que o conjunto ortonormal $\mathcal{B} = \{e_n(t) = \sqrt{2/L}\sin(n\pi t/L) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Hilbert de $L^2(0, L)$. De fato, segundo o teorema de Stone-Weierstrass, toda função $\phi \in C[0, L]$ pode ser aproximada uniformemente no intervalo $[0, L]$ por polinômios, de onde segue que $C^1[0, L]$ é denso em $C[0, L]$ com a norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Alem disso, usando a desigualdade

$$\int_0^L |\phi(t)|^2\, dt \le L\|\phi\|_{\infty}^2, \quad \forall \phi \in C[0, L],$$

prova-se que $C^1[0, L]$ é denso em $C[0, L]$ com a norma de $L^2(0, L)$. Consequentemente $C^1[0, L]$ é denso em $L^2(0, L)$. Por outro lado, da teoria das séries de Fourier, sabe-se que para $\phi \in C^1[0, L]$, vale a identidade

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle \phi, e_n\rangle e_n(t), \quad \forall t \in]0, L[, \quad \langle \phi, e_n\rangle = \int_0^L \phi(t)e_n(t)\, dt$$

onde a convergência da série é pontual. Note que, se denotamos com $s_m = \sum_{n=1}^{m}\langle \phi, e_n\rangle e_n$, temos que

$$\|s_{m+p} - s_m\|_2^2 = \Big\| \sum_{n=m+1}^{m+p} \langle x, e_n\rangle e_n \Big\|_2^2 = \sum_{n=m+1}^{m+p} |\langle x, e_n\rangle|_2^2 \le \sum_{n=m+1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Logo (s_m) é de Cauchy e portanto a convergência da série é na norma de $L^2(0,L)$. Agora, usando o teorema de Pitágoras na identidade anterior, temos

$$\|\phi\|_2^2 = \langle \phi, \phi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \phi, e_n \rangle|^2. \tag{2.3}$$

Note também que, para quaisquer $x, y \in L^2(0,L)$ os coeficientes de Fourier $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$, $\beta_n = \langle y, e_n \rangle$, satisfazem

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 - |\beta_n|^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n)\alpha_n + \beta_n(\alpha_n - \beta_n),$$

de onde, por aplicação da desigualdade de Holder temos a desigualdade

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 - |\beta_n|^2)\Big| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n|^2\right)^{1/2} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2\right)^{1/2} \right\}.$$

Como $\alpha_n - \beta_n = \langle x - y, e_n \rangle$, desta desigualdade e a desigualdade de Bessel concluímos que

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} (|\langle x, e_n \rangle|^2 - |\langle y, e_n \rangle|^2)\Big| \leq \|x - y\|_2 (\|x\|_2 + \|y\|_2). \tag{2.4}$$

Finalmente, seja $x \in L^2(0,L)$, consideremos (ϕ_m) uma sequência em $C^1[0,L]$ tal que $\phi_m \to x$ em $L^2(0,L)$. Usando (2.3) temos

$$\|\phi_m\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \phi_m, e_n \rangle|^2.$$

Observe o lado esquerdo converge para $\|x\|_2$ quando $m \to \infty$. Para a convergência do lado direito usamos (2.4). Isto é

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} (|\langle x, e_n \rangle|^2 - |\langle \phi_m, e_n \rangle|^2)\Big| \leq \|x - \phi_m\|_2 (\|x\|_2 + \|\phi_m\|_2) \xrightarrow{m \to \infty} 0$$

Consequentemente, tomando o limite na identidade anterior temos que

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Pelo teorema anterior, $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert.

Theorem 4.2.4 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert. Então, $\mathbb{X}$ é separável, se e somente se, tem uma base de Hilbert contável.*

Proof: **($\Rightarrow$):** Seja $\mathcal{B}$ uma base de Hilbert de $\mathbb{X}$. Como $\mathcal{B}$ é um conjunto ortonormal temos que que para $x, y \in \mathcal{B}$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2,$$

Portanto $B_{\sqrt{2}/2}(x) \cap B_{\sqrt{2}/2}(y) = \emptyset$. Por outro lado, como $\mathbb{X}$ é separável, admite um subconjunto denso contável A. Logo, para cada $x \in \mathcal{B}$ existe $z_x \in A$ tal que $z_x \in B_{\sqrt{2}/2}(x)$, consequentemente esta relação estabelece uma bijeção entre $\mathcal{B}$ e o subconjunto $\{z_x : x \in \mathcal{B}\}$ de A, portanto $\mathcal{B}$ é contável.

($\Leftarrow$): Considere $\mathcal{B} = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de $\mathbb{X}$ e D um subconjunto denso enumerável no corpo de escalares $\mathbb{K}$ onde $\mathbb{X}$ esta definido. Tomemos

$$A_m = \{r_1 e_1 + \cdots + r_m e_m : \text{ onde } r_1, \ldots, r_m \in D\},$$

logo $A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ é enumerável. Alem disso, para $x \in \mathbb{X}$ temos que

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Observe que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\left\langle x, \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2,$$

e como

$$\mathrm{Re}\left\langle x, \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2,$$

segue que

$$\|x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = 0,$$

isto é

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Agora, para $\epsilon > 0$ fixado, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 < \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Por outro lado, da densidade de D em $\mathbb{K}$ temos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ existe $r_i \in D$ tal que

$$|\langle x, e_i \rangle - r_i|^2 < \frac{\epsilon^2}{2^{i+1}}.$$

Assim, as duas estimativas anteriores implicam que

$$\begin{aligned}\|x-\sum_{i=1}^{m} r_i e_i\|^2 &\leq \sum_{i=1}^{m} |\langle x, e_i\rangle - r_i|^2 + \sum_{i=m+1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \\ &< \frac{\epsilon^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\right) + \frac{\epsilon^2}{2} \leq \epsilon^2,\end{aligned}$$

lde onde segue que A é denso em $\mathbb{X}$. $\square$

Theorem 4.2.5 *Se $\mathbb{X}$ é um espaço de Hilbert de dimensão infinita e separável, então ele é isometricamente isomorfo com $\ell^2(\mathbb{K})$ onde $\mathbb{K}$ é o corpo de escalares sobre o qual $\mathbb{X}$ esta definido.*

Proof: Seja $B = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de $\mathbb{X}$. Definimos $T : \mathbb{X} \to \ell^2(\mathbb{K})$ dada por

$$T(x) = \big(\langle x, e_k\rangle\big)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{onde} \quad x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k.$$

A desigualdade de Bessel garante que $\big(\langle x, e_k\rangle\big)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{K})$, portanto o operador T esta bem definido. Verifica-se facilmente que que este operador é linear e pela identidade de Parseval temos que $\|Tx\|^2_{\ell^2} = \|x\|^2$, logo T é uma isometria. Mostremos que T é sobrejetivo. Seja $z = (\alpha_k) \in \ell^2(\mathbb{K})$, definimos

$$x := \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k = \lim_{n\to\infty} s_n, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k.$$

A convergência desta série é consequência de (s_n) ser de Cauchy, pois para $m > n$ temos que

$$\|s_m - s_n\|^2 = \Big\|\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k e_k\Big\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m}|\alpha_k|^2.$$

Também, fixado $j \in \mathbb{N}$ ao calcular $\langle x, e_j\rangle$ encontramos que este valor coincide com α_j. Assim $Tx = \big(\langle x, e_k\rangle\big) = \big(\alpha_k\big)$ de onde segue a sobrejetividade de T e a conclusão deste teorema. $\square$

Exemplo: $L^2(0, L)$ é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, logo é isometricamente isomorfo a ℓ^2.

4.3 Representação de Funcionais

Theorem 4.3.1 (Teorema de representação de Riesz) *Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert. Então, para cada $f \in \mathbb{X}'$ existe um único $x_f \in \mathbb{X}$ tal que*

$$f(x) = \langle x, x_f\rangle \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Alem disso, $\|f\| = \|x_f\|$.

Proof: Existência: Se $f \equiv 0$, então tomamos $x_f = 0$. Se $f \not\equiv 0$ então $N(f) \neq \mathbb{X}$ e como $N(f)$ é fechado (verificar!), temos que $\mathbb{X} = N(f) \oplus N(f)^{\perp}$, logo $N(f)^{\perp} \neq \{0\}$. Fixemos $0 \neq y \in N(f)^{\perp}$ e para cada $x \in \mathbb{X}$ consideremos o vetor $z = f(x)y - f(y)x$, então

$$f(z) = f(x)f(y) - f(y)f(x) = 0,$$

logo $z \in N(f)$, assim

$$0 = \langle z, y\rangle = f(x)\langle y, y\rangle - f(y)\langle x, y\rangle,$$

isto é

$$f(x) = \langle x, x_f\rangle, \quad \text{onde} \quad x_f = \frac{\overline{f(y)}}{\langle y, y\rangle} y.$$

Unicidade: Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ tal que

$$f(x) = \langle x, x_1\rangle = \langle x, x_2\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

então $\langle x, x_1 - x_2\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Tomando $x = x_1 - x_2$ segue que $x_1 - x_2 = 0$.

Finalmente vejamos que $\|f\| = \|x_f\|$. Desde que

$$|f(x)| = |\langle x, x_f\rangle| \leq \|x\|\|x_f\|$$

segue que $\|f\| \leq \|x_f\|$. Por outro lado

$$\|x_f\|^2 = |\langle x_f, x_f\rangle| = |f(x_f)| \leq \|f\|\|x_f\|,$$

de onde segue que $\|x_f\| \leq \|f\|$. Portanto $\|f\| = \|x_f\|$. $\square$

Operador de Riesz. O teorema anterior nos permite definir um operador $R : \mathbb{X}' \to \mathbb{X}$ dado por $Rf := x_f$ a qual chamaremos de *Operador de Representação de Riesz.* logo R é uma isometria bijetiva, e é um operador antilinear, isto é

$$R(\alpha f + g) = \bar{\alpha} Rf + Rg.$$

De fato, se $x \in \mathbb{X}$ temos que

$$\langle x, R(\alpha f + g)\rangle = \big(\alpha f + g\big)(x) = \alpha f(x) + g(x) = \alpha\langle x, Rf\rangle + \langle x, Rg\rangle = \langle x, \overline{\alpha} Rf + Rg\rangle.$$

Theorem 4.3.2 *Se $\mathbb{X}$ é um espaço de Hilbert, então a norma em $\mathbb{X}'$ é induzida por um produto interno. Alem disso, o produto interno em $\mathbb{X}'$ pode ser calculado por*

$$\langle f, g\rangle = \overline{\langle Rf, Rg\rangle}, \quad \forall f, g \in \mathbb{X}'.$$

Proof: Vejamos que a norma em $\mathbb{X}'$ satisfaz a Lei do paralelogramo. De fato, Tendo em conta que a norma em $\mathbb{X}$ satisfaz a Lei do paralelogramo temos que

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = \|Rf+Rg\|^2 + \|Rf-Rg\|^2 = 2(\|Rf\|^2 + \|Rg\|^2) = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Sejam $f, g \in \mathbb{X}'$ calculemos seu produto escalar. Usando a Identidade de polaridade temos que

$$\begin{aligned}
4\langle f, g\rangle &= \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i(\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2) \\
&= \|Rf+Rg\|^2 - \|Rf-Rg\|^2 + i(\|Rf-iRg\|^2 - \|Rf+iRg\|^2) \\
&= \|Rf+Rg\|^2 - \|Rf-Rg\|^2 - i(\|Rf+iRg\|^2 - \|Rf-iRg\|^2) \\
&= 4\overline{\langle Rf, Rg\rangle}.
\end{aligned}$$

□

Definição: Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços normados sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$, uma forma sesquilinear sobre $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ é uma aplicação $h : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{K}$ tal que, para todo $x, x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, $y, y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, tem-se

1. $h(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha h(x_1, y) + h(x_2, y)$, (Linear na primeira componente)
2. $h(x, \alpha y_1 + y_2) = \bar{\alpha} h(x, y_1) + h(x, y_2)$. (Antilinear na segunda componente)

Dizemos que a forma sesquilinear é limitada se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|h(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \text{ para todo } x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}. \tag{3.5}$$

Neste caso definimos

$$\|h\| := \sup_{x,y\neq 0} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|\|y\|},$$

a qual é chamada de norma de h. Note que $|h(x,y)| \leq \|h\|\|x\|\|y\|$ e $C = \|h\|$ é a menor constante que satisfaz (3.5).

Theorem 4.3.3 (Teorema de representação de Riesz para Formas Sesquilineares *Sejam $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ dois espaços de Hilbert e $h : \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear limitada. Então existe um único operador linear limitado $S_h : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ tal que*

$$h(x,y) = \langle S_h x, y\rangle, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2.$$

Alem disso, $\|h\| = \|S_h\|$.

Proof: Para cada $x \in \mathbb{X}_1$, consideremos a aplicação $y \mapsto \overline{h(x,y)}$ o qual é um funcional linear limitado de $\mathbb{X}_2$, logo pelo teorema de representação de Riesz, existe um único $y_x \in \mathbb{X}_2$ tal que

$$\overline{h(x,y)} = \langle y, y_x\rangle,$$

e portanto $h(x,y) = \langle y_x, y\rangle$ para todo $y \in \mathbb{X}_2$. Definimos $S_h : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ dado por $S_h x = y_x$. Então $h(x,y) = \langle S_h x, y\rangle$ para todo $x \in \mathbb{X}_1$, $y \in \mathbb{X}_2$. Vejamos que S_h é linear:

$$\begin{aligned}\langle S_h(\alpha x_1 + x_2), y\rangle &= h(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha h(x_1,y) + h(x_2,y)\\ &= \alpha\langle S_h x_1, y\rangle + \langle S_h x_2, y\rangle = \langle \alpha S_h x_1 + S_h x_2, y\rangle,\end{aligned}$$

Como a igualdade vale para todo $y \in \mathbb{X}_2$ segue que $S_h(\alpha x_1 + x_2) = \alpha S_h x_1 + S_h x_2$. Mostremos agora que S_h é um operador limitado e $\|h\| = \|S_h\|$. Desde que

$$\|S_h x\|^2 = |\langle S_h x, S_h x\rangle| = |h(x, S_h x)| \leq \|h\|\|x\|\|S_h x\|,$$

temos que $\|S_h x\| \leq \|h\|\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{X}_1$ de onde seque que S_h é limitado e $\|S_h\| \leq \|h\|$. Por outro lado

$$|h(x,y)| = |\langle S_h x, y\rangle| \leq \|S_h x\|\|y\| \leq \|S_h\|\|x\|\|y\|,$$

de onde concluimos que $\|h\| \leq \|S_h\|$ e portanto $\|h\| = \|S_h\|$.

Unicidade: Supondo duas representaçoes para h, isto é $h(x,y) = \langle S_1 x, y\rangle = \langle S_2 x, y\rangle$ para todo $y \in \mathbb{X}_2$, temos que $S_1 x = S_2 x$ para cada $x \in \mathbb{X}_1$, logo $S_1 = S_2$. □

4.4 Operador adjunto de Hilbert

Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Hilbert e $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear densamente definido, isto é, $D(T)$ é um subespaço denso em $\mathbb{X}$. Para T definimos o operador adjunto de Hilbert $T^* : D(T^*) \subseteq \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ da seguinte forma:

$$D(T^*) := \{y \in \mathbb{Y} : \text{ existe } x^* \in \mathbb{X} \text{ tal que } \langle Tx, y\rangle = \langle x, x^*\rangle\ \forall x \in D(T)\}, \quad T^* y := x^*.$$

A boa definição de T^* segue da densidade de $D(T)$ em $\mathbb{X}$. Desta definição segue que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \quad \forall x \in D(T),\ y \in D(T^*).$$

Theorem 4.4.1 (Operador adjunto de Hilbert) *Sejam $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espaços de Hilbert. Se $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é um operador linear limitado, então $D(T^*) = \mathbb{Y}$ e $T^* : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é linear limitado. Alem disso, $\|T^*\| = \|T\|$.*

Proof: Seja $y \in \mathbb{Y}$. Como $x \to \langle Tx, y\rangle$ é um operador linear limitado, pelo teorema de representação de Riesz, existe $T^* y \in \mathbb{X}$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Logo $D(T^*) = \mathbb{Y}$. Agora Consideremos a forma sesquilinear $h : \mathbb{Y} \times \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ dada por $h(y,x) = \langle y, Tx\rangle$, então

$$|h(y,x)| \leq \|y\|\|Tx\| \leq \|T\|\|y\|\|x\|$$

de onde segue que h é limitada e $\|h\| \leq \|T\|$. Portanto, do Teorema de Representação de Riezs para formas sesquilineares, temos que existe um único operador linear limitado $S_h : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ tal que

$$h(y, x) = \langle S_h y, x\rangle \quad \text{e} \quad \|h\| = \|S_h\|.$$

Assim, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, S_h y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ para todo $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$, de onde segue que $S_h = T^*$.

Resta provar que $\|T\| \leq \|h\|$ para concluir que $\|T\| = \|h\| = \|S_h\| = \|T^*\|$. De fato,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = |h(Tx, x)| \leq \|h\|\|Tx\|\|x\|,$$

de onde concluimos que $\|T\| \leq \|h\|$. $\square$

Observação: Se T é um operador linear limitado temos que $T^{**} := (T^*)^* = T$.

Exemplo: Consideremos o espaço de vetores coluna $\mathbb{C}^m$ com o produto interno canônico

$$\langle x, y\rangle = x^T \bar{y} = \sum_{i=1}^{m} x_i \bar{y}_i, \quad x = (x_1, \ldots, x_m)^T,\ y = (y_1, \ldots, y_m)^T$$

então a matriz $A \in M_{m\times m}(\mathbb{C})$ é um operador linear limitado de $\mathbb{C}^m$ em $\mathbb{C}^m$. Calculemos A^*.

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T \overline{y} = x^T A^T \overline{y} = x^T \overline{(\overline{A^T} y)} = \langle x, \overline{A^T} y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$$

logo, $A^* = \overline{A^T}$.

Exemplo: Consideremos os operadores shift $S_d, S_i : \ell^2 \to \ell^2$ definidos por

$$\begin{aligned} S_d(x_1, x_2, x_3, \ldots) &:= (0, x_1, x_2, x_3, \ldots), \quad \text{“shift à direita”} \\ S_i(x_1, x_2, x_3, \ldots) &:= (x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots), \quad \text{“shift à esquerda”}. \end{aligned}$$

Logo para $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ em ℓ^2 temos que

$$\langle S_d x, y\rangle = 0y_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x_{k-1} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1} = \langle x, S_i y\rangle$$

logo $S_d^* = S_i$.

Theorem 4.4.2 (Propriedades do Operador Adjunto) *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Hilbert e $T, S : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ operadores lineares limitados. Então*

1. $(\alpha T + S)^* = \bar{\alpha} T^* + S^*$

2. $\|T^* T\| = \|T T^*\| = \|T\|^2$

3. *Se* $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$, $(ST)^* = T^*S^*$

Proof: **Item 1:** Sejam $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$, temos que

$$\begin{aligned}\langle x, (\alpha T + S)^* y\rangle &= \langle (\alpha T + S)x, y\rangle = \alpha\langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle \\ &= \langle x, \bar{\alpha} T^* y\rangle + \langle x, S^* y\rangle = \langle x, (\bar{\alpha} T^* + S^*)y\rangle.\end{aligned}$$

Como a identidade anterior vale para todo $x \in \mathbb{X}$ segue que $(\alpha T + S)^* y = (\bar{\alpha} T^* + S^*)y$.
Item 2: Como

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \leq \|T^*Tx\|\|x\| \leq \|T^*\|\|T\|\|x\|^2 = \|T\|^2\|x\|^2,$$

segue que, para $x \neq 0$,

$$\left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^2 \leq \frac{\|T^*Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|^2$$

de onde segue que $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T\|^2$, portanto $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Desta igualdade concluimos tambem que

$$\|TT^*\| = \|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2.$$

Item 3: Sejam $x, y \in \mathbb{X}$, então

$$\langle x, (ST)^* y\rangle = \langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^* y\rangle = \langle x, T^* S^* y\rangle.$$

□

Definição: Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert. Um operador linear limitado $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é dito:

1. Normal, se $TT^* = T^*T$.
2. Autoadjunto, se $T^* = T$.
3. Unitário, se for bijetivo e $T^* = T^{-1}$.

Observação: Da definição anterior verifica-se que todo operador linear limitado autoadjunto ou unitário, é normal.
Exemplo: Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, então temos que A é um operador linear limitado em $\mathbb{C}^n$. Logo

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T\overline{y} = x^T A^T \overline{y} = x^T\overline{(\overline{A^T} y)} = \langle x, \overline{A^T} y\rangle \quad \Rightarrow \quad A^* = \overline{A^T}.$$

Portanto:

1. A é normal, se $A\,\overline{A^T} = \overline{A^T} A$.

2. A é autoadjunto, se $\overline{A^T} = A$.

3. A é unitário, se for invertível e $\overline{A^T} = A^{-1}$.

Theorem 4.4.3 *Seja T um operador linear limitado no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$. Então T é normal se, e somente se, $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in \mathbb{X}$*

Proof: ($\Rightarrow$) Seja $x \in \mathbb{X}$ temos que

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2.$$

($\Leftarrow$) Desde que $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in \mathbb{X}$, a identidade de polaridade implica que $\langle T^*x, T^*y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$ (verifique!).Logo para $x, y \in \mathbb{X}$ temos

$$\langle (TT^* - T^*T)x, y\rangle = \langle TT^*x, y\rangle - \langle T^*Tx, y\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle - \langle Tx, Ty\rangle = 0.$$

Tomando $y = (TT^* - T^*T)x$ segue que $(TT^* - T^*T)x = 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Consequentemente $TT^* = T^*T$. $\square$

Lemma 4.4.4 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial complexo com produto interno. Se $Q : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é um operador linear tal que*

$$\langle Qx, x\rangle = 0, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

então $Q \equiv 0$.

Proof: Sejam $x, y \in \mathbb{X}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$0 = \langle Q(\alpha x + y), \alpha x + y\rangle = \alpha\langle Qx, y\rangle + \bar{\alpha}\langle Qy, x\rangle.$$

En particular, tomando $\alpha = 1$ temos que

$$\langle Qx, y\rangle + \langle Qy, x\rangle = 0,$$

por outro lado, se tomamos $\alpha = i$ temos que

$$\langle Qx, y\rangle - \langle Qy, x\rangle = 0.$$

das duas equaçoes anteriores obtemos que $\langle Qx, y\rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$, logo $Q \equiv 0$. $\square$

Exemplo: Se $\mathbb{X}$ for um espaço vetorial real a conclusão do lema anterior não vale. De fato, no espaço $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$, com seu produto interno canônico

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2, \text{ onde } x = (x_1, x_2), \ y = (y_1, y_2),$$

o operador rotação 90^o, $Q(x) = (-x_2, x_1)$ não é identicamente nulo, porém $\langle Qx, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Theorem 4.4.5 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert complexo e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ um operador linear limitado. Então, T é autoadjunto se, e somente se, $\langle Tx, x\rangle$ é real para todo $x \in \mathbb{X}$.*

Proof: **($\Rightarrow$):** Se T é autoadjunto temos que

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$$

logo $\langle Tx, x\rangle$ é real.
($\Leftarrow$): Se $\langle Tx, x\rangle$ é real, então

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \overline{\langle x, T^*x\rangle} = \langle T^*x, x\rangle$$

de onde segue que $\langle (T - T^*)x, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Como $\mathbb{X}$ é um espaço complexo, do Lemma 4.4.4 temos que $T - T^* \equiv 0$. □

Theorem 4.4.6 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert, e $T_n : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ uma sequência de operadores lineares limitados autoadjuntos. Se T_n converge para T em $B(\mathbb{X};\mathbb{X})$, isto é $\|T_n - T\| \to 0$, então T é autoadjunto.*

Proof: Como $T_n^* = T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\|T^* - T\| \leq \|T^* - T_n^*\| + \|T_n - T\| = 2\|T - T_n\|.$$

Tomando limite, seque que $T^* - T \equiv 0$. □

Theorem 4.4.7 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ um operador linear limitado. Então T é unitário se, e somente se, é uma isometria sobrejetiva.*

Proof: ($\Rightarrow$) Como $T^*T = I$ temos que

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

logo T é uma isometria. Também, por T ser unitário, é bijetivo, logo é sobrejetivo.
($\Leftarrow$) Por hipótese T preserva normas, e pela identidade de polaridade também preserva produtos internos (verifique!), assim para $x, y \in \mathbb{X}$ temos que

$$\langle x, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, T^*Ty\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle x, y - T^*Ty\rangle = 0.$$

Tomando $x = y - T^*Ty$ temos que $y - T^*Ty = 0$. Da arbitrariedade de y segue que $T^*T = I$. Como T é uma isometria sobrejetiva tem-se que é bijetivo. Consequentemente,

$$TT^* = T\underbrace{(T^*T)}_{=I}T^{-1} = TT^{-1} = I.$$

Portanto $T^* = T^{-1}$. □

4.5 Exercícios

1. Se x e y sao vetores do espaço com produto interno $\mathbb{X}$ tal que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, podemos concluir que $x \perp y$? Justifique sua resposta.

2. Sejam Y e Z subespaços vetoriais de $\mathbb{X}$. Mostre que $\mathbb{X} = Y \oplus Z$, se e somente se, para cada $x \in X$ existem $y \in Y$ e $z \in Z$ únicos tal que $x = y + z$.

3. Seja A um subconjunto de um espaço com produto interno, mostre que $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

4. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert

   (a) Mostre que Z é um subespaço fechado de $\mathbb{X}$ se, e somente se, $Z = Z^{\perp\perp}$.

   (b) Seja A um subconjunto de $\mathbb{X}$. Mostre que $A^{\perp\perp}$ é o menor subespaço fechado que contem A.

5. Sejam $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ espaços de Hilbert, $M_1 \subseteq \mathbb{X}_1$, $M_2 \subseteq \mathbb{X}_2$ e $T \in B(\mathbb{X}_1; \mathbb{X}_2)$.

   (a) Se $T(M_1) \subseteq M_2$ mostre que $M_1^{\perp} \supseteq T^*(M_2^{\perp})$.

   (b) Se M_1 e M_2 são subespaços, e M_2 é fechado mostre que, se $M_1^{\perp} \supseteq T^*(M_2^{\perp})$, então $T(M_1) \subseteq M_2$.

   (c) Mostre que $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = N(T^*)$, $\mathrm{Im}(T^*)^{\perp} = N(T)$ e $N(T)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(T^*)}$.

6. Nos seguintes casos, mostre que o subespaço vetorial Z de ℓ^2 é fechado e encontre $Z^{\perp}$.

   (a) $Z = \{x = (x_n) \in \ell^2 : x_n = 0 \text{ quando } n \text{ é par}\}$

   (b) $Z = \mathrm{Ger}\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ onde $e_i = (\delta_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$.

7. Seja $\{e_k : k \in I\}$ um subconjunto ortonormal no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$, considere $Z = \overline{\mathrm{Ger}\{e_k : k \in I\}}$. Mostre que o operador projeção ortogonal $P : \mathbb{X} \to Z$ é dado por

$$Px = \sum_{k\in I} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

8. Considere o espaço $C[-1,1]$ com o produto interno $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Considere os subespaços de funções pares e ímpares respectivamente

$$A = \{f \in C[-1,1] : f(-x) = f(x)\}, \quad B = \{f \in C[-1,1] : f(-x) = -f(x)\}.$$

   Mostre que $A \perp B$ e que $C[-1,1] = A \oplus B$.

9. Seja Z o conjunto de sequências $x = (x_n)$ que tem no máximo um número finito de termos não nulos. Mostre que existe $x \in \ell^2$ que não pode ser projetado ortogonalmente sobre Z.

10. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto ortonormal. A série $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|$ converge para todo $x \in \mathbb{X}$? Justifique sua resposta.

11. Seja $\{e_k : k \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço com produto interno $\mathbb{X}$, mostre que

$$\sum_{k\in I} |\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \quad x, y \in \mathbb{X}.$$

12. Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno e $x \in \mathbb{X}$. Mostre que

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y\rangle|$$

13. Seja $Z \neq \{0\}$, um subespaço completo do espaço com produto interno $\mathbb{X}$. Considere o operador projeção ortogonal P_Z sobre o subespaço Z. Mostre que
    (a) P_Z é idempotente, isto é, $P_Z^2 = P_Z$.
    (b) $\|P_Z\| = 1$ e $\mathrm{Nu}(P_Z) = Z^\perp$.
    (c) Se $\mathbb{X}$ é um espaço de Hilbert então

$$\mathbb{X} = \mathrm{Nu}(P_Z) \oplus \mathrm{Im}(P_Z) = \mathrm{Nu}(P_Z) \oplus \mathrm{Nu}(P_{Z^\perp}).$$

14. Seja Z um subespaço do espaço com produto interno $\mathbb{X}$ e $T \in B(\mathbb{X}; \mathbb{X})$. Dizemos que Z é invariante sob T se $T(Z) \subseteq Z$. Mostre que Z é invariante se, e somente se, $TP_Z = P_Z T P_Z$, sendo P_Z o operador projeção ortogonal sobre Z.

15. Seja M um subconjunto de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$.
    (a) Suponha que M é um subconjunto denso ou um conjunto total. Se $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ para todo $z \in M$, mostre que $x = y$.
    (b) Suponha que $\mathbb{X}$ é Hilbert. Se a igualdade $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ para todo $z \in M$ implica que $x = y$, mostre que M é um conjunto total.

16. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{B} = \{e_k : k \in I\}$ um subconjunto ortonormal. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes
    (a) $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert.
    (b) para cada $x \in \mathbb{X}$ tem-se que $x = \sum_{k\in I} \langle x, e_k\rangle e_k$.
    (c) para cada $x, y \in \mathbb{X}$ tem-se que $\langle x, y\rangle = \sum_{k\in I} \langle x, e_k\rangle\overline{\langle y, e_k\rangle}$.

17. Seja $B = \{e_k : k \in I\}$ um subconjunto ortonormal do espaço de Hilbert $\mathbb{X}$ e $x \in \mathbb{X}$. Mostre que

$$x \in \overline{\mathrm{Ger}(B)} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sum_{k \in I} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

18. Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno.

 (a) Para cada $y \in \mathbb{X}$ mostre que a aplicação em $\mathbb{X}$, $f_y(x) := \langle x, y \rangle$ é um funcional linear limitado e que $\|f_y\| = \|y\|$

 (b) Considere a aplicação $F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ dado por $F(y) = f_y$. Se F é sobrejetiva, mostre que $\mathbb{X}$ é um espaço de Hilbert.

19. Seja $\mathbb{X}$ o completamento do espaço vetorial

$$\mathbb{X} = \left\{ x \in C(\mathbb{R}) : \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_{-R}^{R} x(t)^2 \, dt \text{ converge} \right\},$$

com o produto interno

$$\langle x, y \rangle = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_{-R}^{R} x(t) y(t) \, dt.$$

 (a) Mostre que o subconjunto $\{\sin(at) : a > 0\}$ é um conjunto ortogonal de $\mathbb{X}$

 (b) Mostre que $\mathbb{X}$ não é separável.

20. Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços de Hilbert sobre o mesmo corpo de escalares. Se estes espaços tem a mesma dimensão de Hilbert, mostre que são isometricamente isomorfos.

21. Seja R o operador de representação de Hilbert $R : \mathbb{X}' \to \mathbb{X}$. mostre que a inversa $R^{-1} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ é dada por

$$(R^{-1}x)(z) = \langle z, x \rangle \quad \forall z \in \mathbb{X}.$$

22. Mostre que todo espaço de Hilbert $\mathbb{X}$ é isometricamente isomorfo com seu doble dual $\mathbb{X}'' := (\mathbb{X}')'$.

23. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $g : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ um funcional antilinear limitado, isto é, g satisfaz:

$$g(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} g(x) + \overline{\beta} g(y) \quad \text{e} \quad \|g\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|g(x)|}{\|x\|} < \infty.$$

Mostre que existe um único vetor $y \in \mathbb{X}$ tal que $g(x) = \langle y, x \rangle$ para todo $x \in \mathbb{X}$ e que $\|g\| = \|y\|$.

24. Mostre que o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de um espaço de Hilbert é uma forma sesquilinear. Calcule a norma desta forma sesquilinear.

25. Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial, uma forma Hermitiana em $\mathbb{X}$ é uma forma sesquilinear $h : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ que satisfaz

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Considere h uma forma hermitina não negativa, isto é, $h(x, x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$

(a) Mostre que h satisfaz a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|h(x, y)|^2 \leq h(x, x)h(y, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}$$

(b) Mostre que $p(x) = \sqrt{h(x, x)}$ define uma seminorma em $\mathbb{X}$.

26. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ um operador linear limitado no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$. Mostre que a imagem de T é um espaço de dimensão finita se, e somente se, T pode ser representado da forma

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle y_i, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

com $z_i, y_i \in \mathbb{X}$, $i = 1, \ldots, n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

27. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ um operador linear limitado bijetivo com inverso limitado. Mostre que T^* é bijetivo e que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

28. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e (T_n) uma sequência em $B(\mathbb{X}; \mathbb{X})$. Se $T_n \to T$ em $B(\mathbb{X}; \mathbb{X})$, mostre que $T_n^* \to T^*$ em $B(\mathbb{X}; \mathbb{X})$.

29. Considere os operadores lineares limitados $T, L : \ell^2 \to \ell^2$ cujas regras de correspondência para $x = (x_k)$ são dadas por

$$Tx = (x_2, x_4, x_6, \ldots), \quad Lx = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \ldots).$$

Encontre a regra de correspondência dos adjuntos T^* e L^*.

30. Considere o espaço vetorial $C[0, 1]$ com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt.$$

Para o operador linear limitado $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ dado por $T(f)(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\, ds$, encontre um operador linear limitado $L : C[0, 1] \to C[0, 1]$ tal que

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle, \quad \forall f, g \in C[0, 1].$$

31. Se T e S são operadores normais tal que $TS^* = S^*T$ e $ST^* = T^*S$, mostre que $T + S$ e TS são normais.

32. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ um operador linear limitado. Se T é normal, mostre que $\|T^2\| = \|T\|^2$.

33. Seja $T_n : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ uma sequência de operadores lineares limitados normais no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$ tal que $T_n \to T$. Mostre que T é uma operador linear normal.

34. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert e $T, S : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ operadores lineares limitados autoadjuntos, mostre que ST é autoadjunto se, e somente se, $ST = TS$.

35. Seja Z um subespaço fechado do espaço de Hilbert $\mathbb{X}$. Mostre que o operador projeção ortogonal P_Z é autoadjunto.

36. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ um operador linear limitado no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$ complexo.

    (a) Mostre que existem operadores autoadjuntos T_1, T_2 únicos tal que $T = T_1 + iT_2$.

    (b) Mostre que T é normal se, e somente se, $T_1T_2 = T_2T_1$, onde T_1,T_2 são os operadores do item anterior.

37. Considere $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por $T(x, y) = (x + iy, x - iy)$. Mostre que $T^*T = TT^* = 2I$ e calcule os operadores T_1, T_2 autoadjuntos tal que $T = T_1 + iT_2$.

38. Seja $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$. Estabeleça condições sobre as entradas da matriz para que A seja um operador normal. Se A é normal porém não é autoadjunto, mostre que existem $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_2 \neq 0$ tal que $A = \beta_1 I + \beta_2 B$, onde

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

39. Mostre que em todo espaço vetorial sempre é possível definir um produto interno.

40. Mostre o item 3 do teorema 4.2.2 combinando o item 1 com o teorema 4.1.7.

41. Sejam U, V operadores unitários no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$. Mostre que

    (a) Se $\mathbb{X} \neq \{0\}$ então $\|U\| = 1$.

    (b) U^{-1} é unitário.

    (c) UV é unitário.

42. Seja $M \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Mostre que M é uma matriz unitária se e somente se, suas colunas formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{C}^n$.

43. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ uma isometria linear no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$. Se T não é unitário mostre que $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço fechado próprio de $\mathbb{X}$.

44. Mostre que toda isometria linear em espaços com produto interno de dimensão finita é unitário.

45. Seja U um operador unitário no espaço de Hilbert $\mathbb{X}$.

    (a) Se $E \subset \mathbb{X}$, mostre que $U(E^\perp) = U(E)^\perp$.

    (b) Mostre que U é autoadjunto se, e somente se, $U^2 = I$.

46. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Hilbert. Mostre que um subespaço Z é denso em $\mathbb{X}$ se, e somente se, $Z^\perp = \{0\}$.

Capítulo 5

Teoremas Fundamentais em Espaços Normados

5.1 Lema de Zorn e teorema de Hahn-Banach

Definição: Uma ordem parcial "$\leq$" em um conjunto M, é uma relação binária que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $a \leq a$ para todo $a \in M$,
2. se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$,
3. se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

Um conjunto M é dito parcialmente ordenado se tem uma ordem parcial. Um par de elementos que estejam relacionados pela ordem parcial se diz comparáveis, e nesse sentido enfatizamos a palavra "ordem parcial", pois nem todo par de elementos de M são comparáveis.

Exemplo: Dado um conjunto X, então a inclusão de conjuntos $\subseteq$ define uma ordem parcial em $M = \mathcal{P}(X) := \{A : A \subseteq X\}$ e neste caso, nem todo par de elementos (conjuntos) são comparáveis.

Definição: Um subconjunto W de um conjunto parcialmente ordenado M é dito totalmente ordenado (ou uma cadeia), se todo par de elementos de W são comparáveis.

Definição: Uma cota superior de um subconjunto W de um conjunto parcialmente ordenado M é um elemento $u \in M$ tal que

$$x \leq u, \quad \forall x \in W$$

Definição: Um elemento $m \in M$ é dito um elemento maximal se tem a seguinte propriedade:

$$\text{se } m \leq x,\ x \in M,\ \text{então } x = m.$$

Exemplo: Se considerarmos o conjunto $M = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ juja ordem parcial é a inclusão de conjuntos temos que $u = \mathbb{R}$ é uma cota superior de qualquer subconjunto W de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Agora, se consideramos $M = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \subseteq \mathbb{Q} \text{ ou } A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ embora $W = M$ não tenha uma cota superior, temos que $u_1 = \mathbb{Q}$ e $u_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são elementos maximais.

Lemma 5.1.1 (Zorn) *Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto parcialmemte ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado possui uma cota superior, então M tem um elemento maximal.*

Theorem 5.1.2 *Todo espaço vetorial $\mathbb{X} \neq \{0\}$ tem uma base de Hamel*

Proof: Considere M o conjunto de subconjuntos de $\mathbb{X}$ que são linearmente independentes tendo como ordem parcial a inclusão "$\subseteq$". Seja W um subconjunto totalmente ordenado de M, vejamos que este tem uma cota superior. Consideremos $U = \bigcup_{A \in W} A$ e vejamos que este conjunto é L.I.. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m \in U$, então existem $A_1, \ldots, A_m \in W$ tal que $x_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, m$. Como W é totalmente ordenado com a inclusão de conjuntos, existe $1 \leq i_0 \leq m$ tal que $A_i \subseteq A_{i_0}$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Portanto $x_1, \ldots, x_m \in A_{i_0}$ e como este conjunto é L.I. segue que $x_1, \ldots, x_m$ são L.I. Portanto U é L.I., logo $U \in M$ e é uma cota superior de W. Asim, pelo lema de Zorn, M tem um elemento maximal que denotaremos com $\mathcal{B}$. Para mostrar que é uma base, basta mostrar que este conjunto gera $\mathbb{X}$. Procedamos por contradição: se $\mathcal{B}$ não gera $\mathbb{X}$ existe $x_0 \in \mathbb{X}$ que não pode ser escrito com combinação linear (finita) de elementos de $\mathcal{B}$, assim $\mathcal{B} \cup \{x_0\}$ é um conjunto linearmente independente que contem $\mathcal{B}$ o que contradiz a maximalidade de $\mathcal{B}$. Consequentemente $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{X}$. □

Theorem 5.1.3 *Seja $\mathbb{X} \neq \{0\}$ um espaço vetorial. Todas suas bases de Hamel tem a mesma cardinalidade.*

Proof: Seja B_1, B_2 duas bases de Hamel de $\mathbb{X}$. Consideremos o conjunto

$$M = \{f : D(f) \subseteq B_1 \to B_2 : f \text{ é injetiva e } \mathrm{Im}(f) \cup (B_1 \setminus D(f)) \text{ é L.I.}\}.$$

Vejamos que M é não vazio. Para $x_0 \in B_1$ fixado temos que $B_1 \setminus \{x_0\}$ não pode gerar todos os elementos de B_2 pois caso contrário geraria $\mathbb{X}$ o que contraria o fato de B_1 ser uma base. Logo existe $y_0 \in B_2$ tal que y_0 é L.I. com $B_1 \setminus \{x_0\}$ e definimos a aplicação $f : \{x_0\} \to B_2$ dada por $f(x_0) = y_0$. Como $Im(f) \cup (B_1 \setminus D(f)) = \{y_0\} \cup (B_1 \setminus \{x_0\})$ é L.I. temos que $f \in M$, logo $M \neq \emptyset$. Em M consideremos a ordem parcial

$$f \leq g, \text{ se } D(f) \subseteq D(g) \text{ e } g\big|_{D(f)} = f.$$

Seja W um subconjunto de M totalmente ordenado. Consideremos

$$D := \bigcup_{f \in W} D(f), \quad h : D \subset B_1 \to B_2, \quad h(x) := f(x) \text{ para } x \in D(f).$$

Prova-se que h esta bem definida e é injetiva (verifique!). Vejamos que $\mathrm{Im}(h) \cup (B_1 \setminus D)$ é L.I. De fato, se $D \subsetneq B_1$ consideremos $y_1, \ldots, y_r \in \mathrm{Im}(h)$ e $z_1, \ldots, z_s \in B_1 \setminus D$, então $y_i = h(x_i) = f_i(x_i)$ com $x_i \in D(f_i)$ para algum $f_i \in W$. Como algum f_{i_0} tem domínio maior tem-se que $x_i \in D(f_{i_0})$. Portanto

$$y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s \in \mathrm{Im}(f_{i_0}) \cup (B_1 \setminus D) \subseteq \mathrm{Im}(f_{i_0}) \cup (B_1 \setminus D(f_{i_0}))$$

Logo, $y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s$ são L.I. Se $D = B_1$ temos que $\mathrm{Im}(h) \cup (B_1 \setminus D) = \mathrm{Im}(f_{i_0})$ que é L.I. Portanto $h \in M$ e é uma cota superior de W. Pelo Lema de Zorn, M tem um elemento maximal g.

Mostremos que $D(g) = B_1$ **por contradição:** se $D(g) \subsetneq B_1$ então $\mathrm{Im}(g) \subsetneq B_2$ pois caso contrário $\mathrm{Im}(g) \cup (B_1 \setminus D(g))$ seria um conjunto L.I. maior que B_2 o que contraria o fato de B_2 ser uma base. Fixemos $y_0 \in B_2 \setminus \mathrm{Im}(g)$, logo temos duas possibilidades, ou y_0 é L.I com $\mathrm{Im}(g) \cup (B_1 \setminus D(g))$ ou não é. Se y_0 é L.I com $\mathrm{Im}(g) \cup (B_1 \setminus D(g))$, escolhemos qualquer $x_0 \in B_1 \setminus D(g)$ e estendemos g para $\tilde{g} : D(g) \cup \{x_0\} \to B_2$ pondo $\tilde{g}(x_0) = y_0$, assim $\tilde{g}$ é injetiva e $\mathrm{Im}(\tilde{g}) \cup (B_1 \setminus D(\tilde{g}))$ é L.I., isto é $\tilde{g} \in M$ e contradiz a maximalidade de g. Agora, se y_0 não for L.I com $\mathrm{Im}(g) \cup (B_1 \setminus D(g))$, então

$$y_0 = \sum_i \alpha_i y_i + \sum_j \beta_j z_j, \quad y_i \in \mathrm{Im}(g),\ z_j \in B_1 \setminus D(g),$$

onde a escritura como combinação linear finita é de forma única. Logo algum $\beta_{j_0} \neq 0$ e consequentemente y_0 é linearmente independente com

$$\mathrm{Im}(g) \cup \big(B_1 \setminus (D(g) \cup \{z_{j_0}\})\big).$$

Desta forma estendemos g para $\tilde{g} : D(g) \cup \{z_{j_0}\} \to B_2$ pondo $\tilde{g}(z_{j_0}) = y_0$, assim $\tilde{g}$ é injetiva e $\mathrm{Im}(\tilde{g}) \cup (B_1 \setminus D(\tilde{g}))$ é L.I. o que contradiz novamente a maximalidade de g.

Portanto $D(g) = B_1$, isto g é uma injeção de B_1 para B_2. Desta forma temos que $\mathrm{card}(B_1) \leq \mathrm{card}(B_2)$. Trocando de lugar B_1 com B_2 temos também que $\mathrm{card}(B_2) \leq \mathrm{card}(B_1)$, consequentemente $\mathrm{card}(B_1) = \mathrm{card}(B_2)$ (A igualdade significa que existe uma bijeção entre B_1 e B_2 e foi mostrado por Cantor-Schröder-Bernstein) $\square$

Theorem 5.1.4 (Hahn-Banach [Extensão de Funcionais, caso real]) *Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial real e p um funcional sublinear sobre $\mathbb{X}$, isto é, $p : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ satisfaz*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}, \quad \forall \alpha \geq 0.$$

Se f é um funcional linear definido sobre um subespaço Z de $\mathbb{X}$ tal que

$$f(x) \le p(x) \text{ para todo } x \in Z,$$

então f tem uma extensão linear $\tilde{f}$ definida em todo o espaço $\mathbb{X}$ preservando a desigualdade anterior, isto é,

$$\tilde{f}(x) \le p(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{X}.$$

Proof: Denotemos com M ao conjunto de todas as extensões lineares g de f definidas em subespaços $D(g) \supseteq Z$ de $\mathbb{X}$, talque

$$g(x) \le p(x), \quad \forall x \in D(g).$$

Em M definimos a ordem parcial

$$g_1 \le g_2 \text{ se } g_2 \text{ é uma extensão de } g_1, \text{ isto é } D(g_1) \subseteq D(g_2) \text{ e } g_2\big|_{D(g_1)} = g_1.$$

Seja W um subconjunto totalmente ordenado de M, então definimos:

$$D = \bigcup_{g \in W} D(g) \quad \text{e} \quad \hat{g} : D \to \mathbb{R} \text{ definido por } \hat{g}(x) = g(x) \text{ para } x \in D(g).$$

Usando o fato de W ser totalmente ordenado verifica-se facilmente que D é um subespaço vetorial de $\mathbb{X}$, que $\hat{g}$ esta bem definido e que é um funcional linear que satisfaz $\hat{g}(x) \le p(x)$ para todo $x \in D$. Portanto $\hat{g} \in M$ e é uma cota superior de W. Assim, pelo lema de Zorn, M tem um elemento maximal a qual denotaremos com $\tilde{f} : D(\tilde{f}) \to \mathbb{R}$. Agora basta mostrar que $D(\tilde{f}) = \mathbb{X}$. Suponhamos que $D(\tilde{f})$ não é todo $\mathbb{X}$, logo existe $y_0 \in \mathbb{X} \setminus D(\tilde{f})$. Assim, consideremos o subespaço

$$D(h) := D(\tilde{f}) \oplus \mathrm{Ger}\{y_0\} = \{x = y + \alpha y_0 : y \in D(\tilde{f}),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

e definamos $h : D(h) \to \mathbb{R}$ dado por $h(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c$ onde c é uma constante real que será escolhida de tal forma que a condição $h(x) \le p(x)$ para todo $x \in D(h)$ seja satisfeita. Desta forma h contradiz a maximalidade de $\tilde{f}$ e consequentemente $D(\tilde{f}) = \mathbb{X}$. Portanto, a conclusão deste teorema se reduz a existência de uma constante c tal que

$$\tilde{f}(y) + \alpha c \le p(y + \alpha y_0) \quad \forall y \in D(\tilde{f}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Observe que para $\alpha = 0$ esta desigualdade já é respeitada. Para $\alpha > 0$ esta condição e equivalente à

$$c \le p(\alpha^{-1} y + y_0) - \tilde{f}(\alpha^{-1} y) \quad \forall y \in D(\tilde{f}) \quad \text{ou} \quad c \le p(y_1 + y_0) - \tilde{f}(y_1) \quad \forall y_1 \in D(\tilde{f}).$$

Para $\alpha < 0$ a condição (1.1) é equivalente a

$$c \ge -p(-\alpha^{-1} y - y_0) + \tilde{f}(-\alpha^{-1} y) \quad \forall y \in D(\tilde{f}) \quad \text{ou} \quad c \ge -p(y_2 - y_0) + \tilde{f}(y_2) \quad \forall y_2 \in D(\tilde{f})$$

Logo, a condição (1.1) é equivalente a encontrar c tal que

$$-p(y_2 - y_0) + \tilde{f}(y_2) \leq c \leq p(y_1 + y_0) - \tilde{f}(y_1), \quad \forall y_1, y_2 \in D(\tilde{f}),$$

e isto somente será possível se qualquer valor do lado esquerdo desta desigualdade é uma cota inferior dos valores do lado direito, e reciprocamente, qualquer valor do lado direito desta desigualdade é uma cota superior dos valores do lado esquerdo. Isto é, se

$$\tilde{f}(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_0) + p(y_2 - y_0), \quad \forall y_1, y_2 \in D(\tilde{f}).$$

Porém, esta desigualdade é satisfeita. De fato, sejam $y_1, y_2 \in D(\tilde{f})$, logo

$$\tilde{f}(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2) = p(y_1 + y_0 + y_2 - y_0) \leq p(y_1 + y_0) + p(y_2 - y_0).$$

Consequentemente existe c satisfazendo (1.1). $\square$

Theorem 5.1.5 (Hahn-Banach [Extensão de funcionais, caso geral]) *Seja* $\mathbb{X}$ *um espaço vetorial real ou complexo e* $p : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *uma função que satisfaz*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Se f *é um funcional linear definido sobre um subespaço* Z *de* $\mathbb{X}$ *tal que*

$$|f(x)| \leq p(x) \text{ para todo } x \in Z,$$

então f *tem uma extensão linear* $\tilde{f}$ *definido em todo* $\mathbb{X}$ *preservando a desigualdade anterior, isto é,*

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{X}.$$

Proof: **Caso real:** Como $f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$ pafa todo $x \in Z$, pelo teorema anterior f tem uma extensão linear $\tilde{f} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, porém

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = p(x)$$

logo $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$.
Caso complexo: $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$. como

$$i(f_1(x) + i f_2(x)) = i f(x) = f(ix) = f_1(ix) + i f_2(ix)$$

segue que $f_2(x) = -f_1(ix)$, logo podemos escrever

$$f(x) = f_1(x) - i f_1(ix)$$

Denotemos com Z_r e $\mathbb{X}_r$ aos espaços Z e $\mathbb{X}$ quando considerados espaços vetoriais sobre o corpo de escalares reais. Como $|f_1(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Z_r$, do item anterior f_1 possui uma extensão $\tilde{f}_1 : \mathbb{X}_r \to \mathbb{R}$ tal que $|\tilde{f}_1(x)| \le p(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}_r$. Assim definimos $\tilde{f} : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ dado por

$$\tilde{f}(x) := \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix),$$

o qual é uma extensão de f definida em todo $\mathbb{X}(= \mathbb{X}_r)$. Note que

$$\tilde{f}(x+y) = \tilde{f}_1(x+y) - i\tilde{f}_1(i(x+y)) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_1(y) - i\tilde{f}_1(ix) - i\tilde{f}_1(iy) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y),$$

logo, para completar a prova da linearidade de $\tilde{f}$ no espaço complexo $\mathbb{X}$ basta mostrar que $\tilde{f}((a+ib)x) = (a+ib)\tilde{f}(x)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}((a+ib)x) &= \tilde{f}_1((a+ib)x) - i\tilde{f}_1(i(a+ib)x) \\
&= a\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix) - i[a\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)] \\
&= (a+ib)[\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)] \\
&= (a+ib)\tilde{f}(x).
\end{aligned}$$

Finalmente vejamos que $|\tilde{f}(x)| \le p(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Escrevendo $\tilde{f}$ na forma polar temos $\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)|e^{i\theta}$. Logo

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(x)e^{-i\theta} = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) = |\tilde{f}_1(e^{-i\theta}x)|,$$

de onde segue que

$$|\tilde{f}(x)| = |\tilde{f}_1(e^{-i\theta}x)| \le p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

□

Theorem 5.1.6 (Hahn-Banach [Extensão de funcionais limitados]) *Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Todo funcional linear limitado f definido sobre um subespaço Z de $\mathbb{X}$ tem uma extensão linear limitada $\tilde{f}$ definida em todo $\mathbb{X}$ tal que*

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

Proof: Como f é limitado, temos que $|f(x)| \le \|f\|\|x\|$ para todo $x \in Z$. Definimos $p : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|f\|\|x\|$, assim p satisfaz as hipóteses do teorema anterior e como

$$|f(x)| \le p(x) \text{ para todo } x \in Z.$$

Então f tem uma extensão linear $\tilde{f}$ definido em todo $\mathbb{X}$ talque

$$|\tilde{f}(x)| \le p(x) = \|f\|\|x\| \text{ para todo } x \in \mathbb{X}.$$

Portanto $\tilde{f}$ é limitado e $\|\tilde{f}\| \le \|f\|$. Desde que $\tilde{f}$ é uma extensão de f segue que $\|f\| \le \|\tilde{f}\|$ donde concluimos que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. □

Corollary 5.1.7 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado e $x_0 \in \mathbb{X}$ tal que $x_0 \neq 0$. Então existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ definido em $\mathbb{X}$ tal que*

$$\|\tilde{f}\| = 1 \quad e \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Proof: Consideremos o subespaço

$$Z = \text{Ger}\{x_0\} = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Definimos $f : Z \to \mathbb{K}$ dada por $f(\alpha x_0) := \alpha\|x_0\|$. Então f é um funcional linear, pois

$$f(\beta\alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0) = f\big((\beta\alpha_1 + \alpha_2)x_0\big) = (\beta\alpha_1 + \alpha_2)\|x_0\| = \beta f(\alpha_1 x_0) + f(\alpha_2 x_0).$$

Também, f é limitado e $\|f\| = 1$, pois

$$|f(\alpha x_0)| = |\alpha\|x_0\|| = \|\alpha x_0\|.$$

Pelo teorema de Hahn Banach f tem uma extensão limitada $\tilde{f} : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ tal que $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$ e $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. □

Corollary 5.1.8 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Então para todo $x \in \mathbb{X}$ tem-se*

$$\|x\| = \sup_{0 \neq f \in \mathbb{X}'} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Portanto, se $f(x_0) = 0$, $\forall f \in \mathbb{X}'$ implica que $x_0 = 0$.

Proof: Se $x = 0$ a conclusão do teorema é imediata. Se $x \neq 0$, do corolário anterior, existe $h \in \mathbb{X}'$ tal que $\|h\| = 1$ e $h(x) = \|x\|$, portanto

$$\|x\| = \frac{|h(x)|}{\|h\|} \leq \sup_{0 \neq f \in \mathbb{X}'} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Por outro lado, desde que $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$ para todo $f \in \mathbb{X}'$, temos que

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|, \quad \forall f \in \mathbb{X}',\ f \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{0 \neq f \in \mathbb{X}'} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|.$$

□

Corollary 5.1.9 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado e Y um subespaço fechado próprio de $\mathbb{X}$. Para $x_0 \in \mathbb{X} \setminus Y$ existe $\tilde{f} \in \mathbb{X}'$ tal que*

$$\|\tilde{f}\| = 1, \quad \tilde{f}|_Y \equiv 0, \quad \tilde{f}(x_0) = d(x_0, Y), \quad onde \quad d(x_0, Y) := \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|.$$

Proof: Consideremos o subespaço vetorial de $\mathbb{X}$

$$Z = \text{Ger}\{x_0\} \oplus Y = \{\alpha x_0 + y : \alpha \in \mathbb{K},\ y \in Y\}.$$

Definimos $f : Z \to \mathbb{K}$ dado por

$$f(x) = \alpha\delta \quad \text{para} \quad x = \alpha x_0 + y,$$

onde $\delta = d(x_0, Y)$. Então f é um funcional linear (verifique!) tal que $f|_Y \equiv 0$ e $f(x_0) = \delta$. Vejamos que f é limitado e $\|f\| = 1$. De fato, para $x = \alpha x_0 + y_0$ temos que

$$|f(x)| = |\alpha|\delta = \inf_{y\in Y} \|\alpha x_0 - \alpha y\| = \inf_{\tilde{y}\in Y} \|\alpha x_0 + \tilde{y}\| \leq \|\alpha x_0 + y_0\| = \|x\|,$$

de onde segue que f é limitado e $\|f\| \leq 1$. Por outro lado, da definição de δ existe uma sequência (y_n) em Y tal que $\|x_0 - y_n\| \to \delta$. Denotando por $x_n = x_0 - y_n$ então (x_n) é uma sequência em Z e

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = \frac{\delta}{\|x_n\|} \to 1 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Portanto $\|f\| \geq 1$ e consequentemente $\|f\| = 1$. Finalmente Aplicando o teorema de Hahn-Banach podemos estender o funcional f a todo o espaço $\mathbb{X}$ nas condições desejadas. □

Theorem 5.1.10 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Se $\mathbb{X}'$ é separável, então $\mathbb{X}$ é separável.*

Proof: Como $\mathbb{X}'$ é separável o conjunto

$$U = \{f \in \mathbb{X}' : \|f\| = 1\}$$

também é separável como subespaço métrico, logo contém um conjunto denso contável $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Desde que $\|f_n\| = 1$ existe $x_n \in \mathbb{X}$ com $\|x_n\| = 1$ tal que $|f_n(x_n)| \geq 1/2$, assim consideremos o subespaço de $\mathbb{X}$:

$$Z = \overline{\text{Ger}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}},$$

o qual é separável. Vejamos agora que $Z = \mathbb{X}$, pois caso contrário Z seria um subespaço fechado próprio de $\mathbb{X}$ e pelo corolário anterior, existe $\tilde{f} \in \mathbb{X}'$ tal que

$$\|\tilde{f}\| = 1, \quad \tilde{f}|_Z = 0,$$

logo $\tilde{f} \in U$, porém observe que

$$\frac{1}{2} \leq |f_n(x_n)| \leq |(f_n - \tilde{f})(x_n)| \leq \|f_n - \tilde{f}\|\|x_n\| = \|f_n - \tilde{f}\|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

fato que contradiz a densidade de $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ em U. □

Exemplo: O subespaço normado $\ell_0^\infty = \{x = (x_n) : x_n \to 0\}$ de ℓ^∞ é separável, pois $(\ell_0^\infty)' = \ell^1$ é separável.

5.2 Operador Adjunto em espaços normados

Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear densamente definido, isto é, $D(T)$ é denso em $\mathbb{X}$. Definimos o operador adjunto de T denotado por T', da seguinte forma: consideremos o subespaço vetorial de $\mathbb{Y}'$

$$D(T') := \{g \in \mathbb{Y}' : g \circ T \text{ é um operador linear limitado}\}.$$

Logo, se $g \in D(T')$ então $g \circ T$ é um funcional linear limitado definido em $D(T)$. Em vista do Teorema 3.3.3, $g \circ T$ possui uma única extensão linear limitada ao fecho $\overline{D(T)} = \mathbb{X}$ preservando sua norma a qual é denotada com $\widetilde{g \circ T} \in \mathbb{X}'$. Definimos o operador adjunto de T como $T' : D(T') \subseteq \mathbb{Y}' \to \mathbb{X}'$,

$$T'(g) := \widetilde{g \circ T}.$$

Note que $T'(g)(x) = \widetilde{g \circ T}(x) = (g \circ T)(x)$ para todo $x \in D(T)$, isto é, $T'(g) = g \circ T$ em $D(T)$.

Theorem 5.2.1 *Sejam $T_i : D(T_i) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $i = 1, 2$ operadores lineares tal que $D(T_1) \cap D(T_2)$ é denso em $\mathbb{X}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então*

$$(\alpha T_1 + T_2)' = \alpha T_1' + T_2' \quad \text{em} \quad D(T_1') \cap D(T_2').$$

Proof: Seja $g \in D(T_1') \cap D(T_2')$. Desde que

$$g \circ (\alpha T_1 + T_2) = \alpha(g \circ T_1) + g \circ T_2 \quad \text{em} \quad D(T_1) \cap D(T_2),$$

temos que $g \in D\big((\alpha T_1 + T_2)'\big)$ e $(\alpha T_1 + T_2)' = \alpha T_1' + T_2'$ em $D(T_1') \cap D(T_2')$. □

Theorem 5.2.2 *Se $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é linear limitado, então $D(T') = \mathbb{Y}'$, T' é linear limitado e $\|T'\| = \|T\|$.*

Proof: Se $g \in \mathbb{Y}'$ então temos que $g \circ T \in \mathbb{X}'$, logo $D(T') = \mathbb{Y}'$. Desde que

$$\|T'(g)(x)\| = \|g(Tx)\| \leq \|g\|\|T\|\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

temos que $\|T'(g)\| \leq \|g\|\|T\|$ e consequentemente $\|T'\| \leq \|T\|$. Se $T \equiv 0$ temos que $\|T'\| = \|T\|$, portanto assumamos que $T \not\equiv 0$. Fixemos $x_0 \in \mathbb{X}$ tal que $Tx_0 \neq 0$, pelo corolário 5.1.7 temos que existe $g_0 \in \mathbb{Y}'$ tal que $\|g_0\| = 1$ e $g_0(Tx_0) = \|Tx_0\|$, por outro lado

$$\|Tx_0\| = |(g_0 \circ T)(x_0)| \leq \|T'(g_0)\|\|x_0\| \leq \|T'\|\|g_0\|\|x_0\|,$$

de onde concluimos que $\|Tx_0\| \leq \|T'\|\|x_0\|$ (observe que esta desigualdade continua válido no caso em que $Tx_0 = 0$). Portanto $\|Tx\| \leq \|T'\|\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{X}$ e consequentemente $\|T\| \leq \|T'\|$. Das duas desigualdades segue que $\|T'\| = \|T\|$. □

Theorem 5.2.3 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Hilbert e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado. Então*

$$T' = R_1^{-1} T^* R_2,$$

onde T^* é o operador adjunto de Hilbert de T e $R_1 : \mathbb{X}' \to \mathbb{X}$, $R_2 : \mathbb{Y}' \to \mathbb{Y}$ são os operadores de representação de Riesz.

Proof: Seja $g \in D(T') = \mathbb{Y}'$ pelo teorema de representação de Riesz temos que

$$(g \circ T)(x) = \langle x, R_1(g \circ T)\rangle = \langle x, R_1 T' g\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

Por outro lado

$$(g \circ T)(x) = g(Tx) = \langle Tx, R_2 g\rangle = \langle x, T^* R_2 g\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

de onde segue que $R_1 T' g = T^* R_2 g$ para todo $g \in \mathbb{Y}'$, portanto $T' = R_1^{-1} T^* R_2$. □

5.3 Espaços Reflexivos

Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Para cada $x \in \mathbb{X}$ consideremos o operador linear $J_x : \mathbb{X}' \to \mathbb{K}$ dada por

$$J_x(f) := f(x).$$

Vefifica-se facilmente que J_x é linear e desde que $|J_x(f)| \leq \|f\|\|x\|$ para todo $f \in \mathbb{X}'$, temos que $J_x \in \mathbb{X}''$. Alem disso, Pelo Corolário 5.1.8 temos que

$$\|J_x\| = \sup_{0 \neq f \in \mathbb{X}'} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|.$$

Observe que

$$J_{\alpha x_1 + x_2}(f) = f(\alpha x_1 + x_2) = \alpha f(x_1) + f(x_2) = (\alpha J_{x_1} + J_{x_2})(f)$$

isto é, $J_{\alpha x_1 + x_2} = \alpha J_{x_1} + J_{x_2}$. Dai segue que a função $J : \mathbb{X} \to \mathbb{X}''$ dada por $J(x) = J_x$ define uma isometria linear canônica de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{X}''$.

Definição: Um espaço normado $\mathbb{X}$ é dito reflexivo, se a isometria canônica $J : \mathbb{X} \to \mathbb{X}''$ é sobrejetiva.

Exemplo: ℓ^p é reflexivo para $1 < p < \infty$. De fato, lembremos que, se $f \in (\ell^p)'$ pela representação de Riesz nos espaços ℓ^p, existe $(f_n) \in \ell^q$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n, \quad \forall x = (x_n) \in \ell^p,$$

e neste caso, identificamos $f = (f_n)$. Assim, se $g \in (\ell^p)'' = ((\ell^p)')' = (\ell^q)'$ temos que $g = (g_n) \in \ell^p$, onde esta identificação significa

$$g(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n, \quad \forall f = (f_n) \in \ell^q.$$

Assim, se $g \in (\ell^p)''$ encontrar $x = (x_n) \in \ell^p$ tal que $g = J(x)$ é equivalente que $g(f) = J(x)(f) = f(x)$ para todo $f = (f_n) \in \ell^q$. Ou equivalentemente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n, \quad \forall f = (f_n) \in \ell^q.$$

Assim, basta tomar $x = (x_n) := (g_n) \in \ell^p$, o que mostra que J é sobrejetivo.

Exemplo: O subespaço normado $\ell_0^\infty = \{x = (x_n) : x_n \to 0\}$ de ℓ^∞ não é reflexivo. De fato, seja $(g_n) = (1, 1, 1, \ldots) \in \ell^\infty$, como $(\ell_0^\infty)'' = (\ell^1)' = \ell^\infty$, a sequência (g_n) identifica um elemento $g \in (\ell_0^\infty)''$, isto é, $g = (g_n)$. Suponhamos que $J : \ell_0^\infty \to (\ell_0^\infty)''$ é sobrejetivo, logo existe $x = (x_n) \in \ell_0^\infty$ tal que $J(x) = g$, isto é, $J(x)(f) = g(f)$ para todo $f = (f_n) \in \ell^1 = (\ell_0^\infty)'$. Desde que

$$J(x)(f) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n, \quad g(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n.$$

temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \quad \forall f = (f_n) \in \ell^1,$$

Em particular, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado tomamos $f = (\delta_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ obtendo que $x_m = g_m$ e portanto $g = (g_n) \in \ell_0^\infty$ o qual é absurdo.

Theorem 5.3.1 *Todo espaço normado reflexivo $\mathbb{X}$ é completo.*

Proof: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{X}$, então, desde que

$$\|J(x_n) - J(x_m)\| = \|J(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\|,$$

Seque que $(J(x_n))$ é de Cauchy no espaço de Banach $\mathbb{X}''$, logo converge para algum $z \in \mathbb{X}''$ e como J é sobrejetivo existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $z = J(x)$. Assim

$$\|x_n - x\| = \|J(x_n - x)\| = \|J(x_n) - J(x)\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

isto é, $x_n \to x$, assim $\mathbb{X}$ é completo. □

Exemplo: O espaço vetorial $C[a, b]$ com a norma

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

não é reflexivo, pois não é completo.

Theorem 5.3.2 *Todo espaço de Hilbert $\mathbb{X}$ é reflexivo.*

Proof: Consideremos os operadores $R_1 : \mathbb{X}' \to \mathbb{X}$ e $R_2 : \mathbb{X}'' \to \mathbb{X}'$ os operadores de representação de Riesz, isto é, para $f \in \mathbb{X}'$ e $g \in \mathbb{X}''$ temos que

$$f(x) = \langle x, R_1 f\rangle, \ \forall x \in \mathbb{X}, \quad g(h) = \langle h, R_2 g\rangle, \ \forall h \in \mathbb{X}'.$$

Seja $g \in \mathbb{X}''$, queremos encontrar $x_0 \in \mathbb{X}$ tal que $g = J(x_0)$ ou equivalentemente

$$g(f) = J(x_0)(f) = f(x_0) \quad \forall f \in \mathbb{X}'.$$

Porém, tendo em conta o Teorema 4.3.2 segue que

$$g(f) = \langle f, R_2 g\rangle = \overline{\langle R_1 f, R_1 R_2 g\rangle} = \langle R_1 R_2 g, R_1 f\rangle \quad \text{e} \quad f(x_0) = \langle x_0, R_1 f\rangle, \quad \forall f \in \mathbb{X}',$$

Portanto basta tomar $x_0 = R_1 R_2 g \in \mathbb{X}$. □

5.4 Limitação Uniforme

Theorem 5.4.1 (Categoria de Baire) *Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico completo não vazio. Se (F_k) é uma sequência de subconjuntos fechados de $\mathbb{X}$ tal que*

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

então int$(F_k) \neq \emptyset$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

A conclusão do teorema anterior significa que espaços métricos completos não vazios são conjuntos "não magros" ou também chamados de conjuntos de "segunda categoria".

Proof: Procedamos por contradição, isto é, suponhamos que $\text{int}(F_k) = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\text{int}(F_1) = \emptyset$, F_1 não é todo $\mathbb{X}$ logo existe uma bola aberta B_1 de diâmetro d_1 tal que $\overline{B}_1 \subseteq F_1^c$. Agora, como B_1 não pode estar totalmente incluído em F_2, existe uma bola aberta B_2 de diâmetro d_2 tal que $\overline{B}_2 \subseteq F_2^c \cap B_1$, podemos considerar inclusive que $d_2 < d_1/2$. Repetindo este processo encontramos uma sequencia de bolas abertas (B_n) de diâmetros d_n tal que

$$d_n \to 0, \quad B_{n+1} \subset B_n, \quad \overline{B}_n \cap F_n = \emptyset.$$

Escolhemos uma sequencia (x_n) tal que $x_n \in B_n$ e como $d(x_{n+p}, x_n) < d_n$ para todo $n, p \in \mathbb{N}$, segue que (x_n) é de Cauchy e portanto converge para algum $x \in \mathbb{X}$ pela completitude de $\mathbb{X}$. Desta forma temos que $x \in \overline{B}_n$ para todo n, logo x não pertence a nenhum F_n o qual é absurdo. □

Theorem 5.4.2 (Teorema de Banach-Steinhaus: Limitação Uniforme) *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados com $\mathbb{X}$ completo. Se $\{T_\lambda \in B(\mathbb{X};\mathbb{Y}) : \lambda \in \Lambda\}$ é uma família tal que, para cada $x \in \mathbb{X}$ existe $C_x > 0$ satisfazendo*

$$\|T_\lambda x\| \leq C_x, \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

então, existe $C \geq 0$ tal que

$$\|T_\lambda\| \leq C, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Proof: Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos o subconjunto de $\mathbb{X}$:

$$F_k = \{x \in \mathbb{X} : \|T_\lambda x\| \leq k, \quad \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Então cada F_k é fechado e

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Pelo teorema de Baire, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F_{k_0} \supseteq B_r(x_0),$$

para algum $x_0 \in F_{k_0}$ e $r > 0$. Seja $x \in \mathbb{X}$, $x \neq 0$, considere $z = x_0 + \delta x$, onde $\delta = r/(2\|x\|)$, então $z \in B_r(x_0)$ e

$$x = \frac{1}{\delta}(z - x_0).$$

Portanto, para $\lambda \in \Lambda$ temos que

$$\|T_\lambda x\| \leq \frac{1}{\delta}(\|T_\lambda z\| + \|T_\lambda x_0\|) \leq \frac{4k_0}{r}\|x\|.$$

Consequentemente,

$$\|T_\lambda\| \leq \frac{4k_0}{r}, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

□

Corollary 5.4.3 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados, onde $\mathbb{X}$ é completo. Se $T_n : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é uma sequência de operadores lineares limitados tal que para cada $x \in \mathbb{X}$ a sequência $(T_n x)$ converge em $\mathbb{Y}$, então o operador linear $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ dado por $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ é limitado e $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.*

Proof: Seja $x \in \mathbb{X}$. Como $T_n x \to Tx$, a sequência $(T_n x)$ é limitada, isto é existe $C_x \geq 0$ tal que

$$\|T_n x\| \leq C_x.$$

Pelo teorema da limitação uniforme existe $C \geq 0$ tal que $\|T_n\| \leq C$ e por tanto

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\|\|x\| \leq C\|x\|.$$

Tomando limite quando $n \to \infty$ obtemos que $\|Tx\| \leq C\|x\|$, logo T é limitado. Agora tomando limite inferior quando $n \to \infty$ na desigualdade acima temos que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|, \forall x \in \mathbb{X},\ x \neq 0.$$

Dai segue que $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$. □

5.5 Convergência Forte e fraca

Definição: Seja (x_n) uma sequência no espaço normado $\mathbb{X}$ e $x \in \mathbb{X}$. Dizemos que

1. (x_n) converge forte para x, se $\|x_n - x\| \to 0$.
2. (x_n) converge fraco para x, se $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in \mathbb{X}'$.

A convergência fraca de x_n para x será denotada por

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \text{ou} \quad x_n \xrightarrow{w} x \quad \text{ou} \quad x_n \to x \text{ fraco.}$$

Theorem 5.5.1 *Seja (x_n) uma sequência que converge fraco para x no espaço normado $\mathbb{X}$. Então*

1. *O limite fraco x de (x_n) é único.*
2. *A sequência (x_n) é limitada.*

Proof: **Item 1:** Suponhamos que x e $\hat{x}$ são limites fracos de (x_n), logo temos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\hat{x}), \quad \forall f \in \mathbb{X}'.$$

logo $f(x - \hat{x}) = 0$ para todo $f \in \mathbb{X}'$ e como $\|x - \hat{x}\| = \sup_{0\neq f\in\mathbb{X}'} \frac{|f(x-\hat{x})|}{\|f\|}$ segue que $x = \hat{x}$.

Item 2. Como $\|x_n\| = \|J(x_n)\|$ onde $J : \mathbb{X} \to \mathbb{X}''$ é a isometria linear canônica, basta mostrar que $(J(x_n))$ é limitada em $\mathbb{X}''$. De fato, desde que $f(x_n) \to f(x)$ para $f \in \mathbb{X}'$ temos que cada $(f(x_n))$ é limitada e portanto existe $C_f > 0$ tal que

$$|J(x_n)(f)| = |f(x_n)| \leq C_f, \quad \text{para cada } f \in \mathbb{X}'.$$

Do teorema da Limitação Uniforme, existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\|J(x_n)\| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Theorem 5.5.2 *No espaço normado $\mathbb{X}$ temos que*

1. *Convergência forte implica convergência fraca para o mesmo limite.*
2. *Se $\mathbb{X}$ tem dimensão finita, convergência fraca implica convergência forte.*

Proof: **Item 1:** Suponhamos que $x_n \to x$ forte em $\mathbb{X}$, então para $f \in \mathbb{X}'$ temos que

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\|\|x_n - x\| \to 0,$$

isto é $x_n \rightharpoonup x$.
Item 2: Seja $\{e_1, \ldots, e_p\}$ uma base de $\mathbb{X}$. Para cada $1 \leq j \leq p$ o funcional linear definimos o funcional linear

$$f_j(x) := \alpha_j \quad \textit{para} \quad x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i.$$

Note que $\|x\|_0 := \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|$ define uma outra norma em $\mathbb{X}$. Seja (x_n) é uma sequência que converge fraco para x, onde $x_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{n,i} e_i$. Então $f_j(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f_j(x)$ ou equivalentemente $\alpha_{n,j} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_j$. Da equivalência de normas temos que

$$\|x_n - x\| \leq C\|x_n - x\|_0 = \sum_{i=1}^{p} |\alpha_{n,i} - \alpha_i| \to 0.$$

logo $x_n \to x$ (forte). □

Exemplo: Em geral, convergência fraca não implica convergência forte. Por exemplo Consideremos uma sequência ortonormal (u_n) no espaço de Hilbert, $\mathbb{X}$. seja $f \in \mathbb{X}'$ pelo teorema de representação de Riesz temos que existe $x_f \in \mathbb{X}$ tal que

$$f(u_n) = \langle u_n, x_f \rangle, \quad \forall n \in N.$$

Da desigualde de Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n, x_f \rangle|^2 \leq \|x_f\|^2$$

segue que

$$f(u_n) = \langle u_n, x_f \rangle \to 0 = f(0), \quad \forall f \in \mathbb{X}',$$

isto é $u_n \rightharpoonup 0$, porém

$$\|u_n - u_m\|^2 = \|u_n\|^2 + \|-u_m\|^2 = 2 \text{ para } n \neq m,$$

portanto (u_n) não pode convergir forte, pois não é de Cauchy.

Theorem 5.5.3 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado, $x \in \mathbb{X}$ e M um subconjunto total de $\mathbb{X}'$. Se (x_n) é uma sequência limitada em $\mathbb{X}$ tal que $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in M$, então $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Proof: Seja x e (x_n) uma sequência como na hipótese, e fixemos $f \in \mathbb{X}'$. Como $\mathrm{Ger}(M)$ é denso em $\mathbb{X}'$, fixado $\epsilon > 0$ temos que existe $h \in \mathrm{Ger}(M)$, tal que

$$\|f - h\| < \epsilon.$$

Por outro lado, desde que $h \in \mathrm{Ger}(M)$ verifica-se que $h(x_n) \to h(x)$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|h(x_n) - h(x)\| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim, para todo $n \geq n_0$ temos que

$$|f(x_n) - f(x)| \leq |f(x_n) - h(x_n)| + |h(x_n) - h(x)| + |h(x) - f(x)| < \epsilon(\|x_n\| + 1 + \|x\|),$$

ou $|f(x_n) - f(x)| \leq \epsilon C$ onde $C > \|x_n\| + 1 + \|x\|$, de onde seque que $f(x_n) \to f(x)$, isto é $x_n \to x$ fraco. $\square$

Corollary 5.5.4 *Seja $1 < p < \infty$. Uma sequência (x_n) em ℓ^p, $x_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$, converge fraco para $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ se, e somente se, (x_n) é limitada e $x_{n,k} \xrightarrow{n\to\infty} z_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Proof: **($\Rightarrow$):** Para cada $k \in \mathbb{N}$, a aplicação linear $f_k : \ell^p \to \mathbb{R}$ definida por $f_k(\xi) = \xi_k$ para $\xi = (\xi_n)$, é linear e limitada, logo $f_k \in (\ell^p)'$. Portanto $f_k(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f_k(z)$, isto é, $x_{n,k} \xrightarrow{n\to\infty} z_k$.
($\Leftarrow$): Sabemos que $(\ell^p)'$ é isometricamente isomorfo com ℓ^q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, através da aplicação

$$f \mapsto (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}, \quad e_n = (\delta_{ns})_{s\in\mathbb{N}}.$$

Considerando o funcional f_k definido anteriormente, temos que $(f_k(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}} = e_k$ e consequentemente f_k é representado por e_k em ℓ^q. Como $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ é base de Schauder de ℓ^q, via isomorfismo $M = \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Schauder de $(\ell^p)'$. Logo cada $f \in (\ell^p)'$ é aproximado por combinaçoes lineares de M, isto é, M é total. Como $f_k(x_n) = x_{n,k} \xrightarrow{n\to\infty} z_k = f_k(z)$ para todo $f_k \in M$, pelo o teorema teorema anterior temos que x_n converge fracamente para z. $\square$

Convergências em espaços de Operadores lineares

Definição: Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços normados. Denotemos com $L(\mathbb{X};\mathbb{Y}) = \{T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} : T \text{ é linear}\}$. Consideremos $T \in L(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ e (T_n) uma sequencia em $L(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, Dizemos que

1. (T_n) converge uniformemente para T, se $T_n \to T$ forte em $B(\mathbb{X};\mathbb{Y})$.
2. (T_n) converge pontualmente para T, se $T_n x \to Tx$ em $\mathbb{Y}$ para cada $x \in \mathbb{X}$.
3. (T_n) converge pontualmente fraco para T, se $T_n x \to Tx$ fraco em $\mathbb{Y}$ para cada $x \in \mathbb{X}$.

Observação: Da definição anterior segue que

Convergência uniforme $\Rightarrow$ Convergência pontual $\Rightarrow$ Convergência pontual Fraca

Exemplo: Consideremos as sequências de operadores $T_m : \ell^2 \to \ell^2$, definidos para $x = (x_n)$ por

$$T_m(x) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m \text{ zeros}}, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots).$$

Vejamos que (T_m) converge pontualmente para o operador 0 porém não converge uniformemente. De fato, como

$$\|T_m(x) - 0(x)\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^2 \to 0, \quad \text{quando} \quad m \to \infty.$$

temos T_m converge pontualmente para $T \equiv 0$. Por outro lado, como $\|T_m x\| \leq \|x\|$ para todo $x \in \ell^2$ segue que $\|T_m\| \leq 1$, porém se fixamos qualquer vetor $x = (x_n) \in \ell^2$ não nulo e consideramos

$$y_m = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m \text{ zeros}}, x_1, x_2, \ldots) \quad \text{temos que} \quad \|T_m\| \geq \frac{\|T_m y_m\|}{\|y_m\|} = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

e portanto $\|T_m - 0\| = \|T_m\| = 1 \not\to 0$ o qual mostra que T não converge uniformemente.

Exemplo: Consideremos as sequências de operadores $T_m : \ell^2 \to \ell^2$, definidos para $x = (x_n)$ por

$$T_m(x) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m \text{ zeros}}, x_1, x_2, \ldots).$$

Vejamos que (T_m) converge pontualmente fraco, porém não converge pontualmente. De fato seja $f \in (\ell^2)'$ do teorema de representação de Riesz existe $x_f = (\xi_n) \in \ell^2$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \xi_n,$$

assim

$$|f(T_m x)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_{n-m} \xi_n| \leq \|x\| \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |\xi_n|^2 \right)^{1/2} \to 0, \quad \text{quando } m \to \infty,$$

de onde segue que $f(T_m x) \to f(0(x))$, isto é, T_m converge fraco para o operador 0, porém como

$$\|T_m(x) - 0(x)\| = \|x\| \not\to 0 \;\; \text{quando } m \to \infty \;\; \text{se } x \neq 0$$

segue que (T_m) não converge pontualmente para o operador 0.

Theorem 5.5.5 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Banach. A sequência (T_n) em $B(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ é uma sequência de operadores pontualmente convergente se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

1. *A sequência $(\|T_n\|)$ é limitada.*

2. *A sequência $(T_n z)$ é de Cauchy em $\mathbb{Y}$ para todo $z \in M$, onde M é algum subconjunto total de $\mathbb{X}$.*

Proof: $(\Rightarrow)$: Item 1 é consequência do teorema da Limitação uniforme. Item 2 é consequência da convergência pontual.

$(\Leftarrow)$: Seja $x \in \mathbb{X}$, basta mostrar que $(T_n x)$ é de Cauchy em $\mathbb{Y}$. Primeiro observa-se que a sequência $(T_n z)$ é de Cauchy em $\mathbb{Y}$ para todo $z \in \mathrm{Ger}(M)$. Assim, fixado $\epsilon > 0$, como $\mathrm{Ger}(M)$ é denso em $\mathbb{X}$, tomamos $z \in \mathrm{Ger}(M)$ talque

$$\|x - z\| < \epsilon.$$

Agora, como $(T_n z)$ é de Cauchy em $\mathbb{Y}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m \geq n_0$, tem-se

$$\|T_n(z) - T_m(z)\| < \epsilon.$$

Assim, tomando $n, m \geq n_0$ temos que

$$\begin{aligned} \|T_n(x) - T_m(x)\| &\leq \|T_n(x) - T_n(z)\| + \|T_n(z) - T_m(z)\| + \|T_m(z) - T_m(x)\| \\ &\leq \|T_n\|\|x - z\| + \|T_n(z) - T_m(z)\| + \|T_m\|\|z - x\| \end{aligned}$$
$$< \epsilon(\|T_n\| + 1 + \|T_m\|).$$

ou $\|T_n(x) - T_m(x)\| < \epsilon C$, onde $C > 2\|T_n\| + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde segue que $((T_n(x))$ é de cauchy. $\square$

Observação: Se $\mathbb{Y}$ não for completo, o teorema anterior contínua válido se substituímos o item 2 por: a sequência $(T_n z)$ converge em $\mathbb{Y}$ para todo $z \in M$, onde M é algum subconjunto total de $\mathbb{X}$.

Convergência no espaço Dual

Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Como o espaço dual $\mathbb{X}'$ é um espaço normado, temos as definições de convergência forte e fraca de sequências neste espaço. Como $\mathbb{X}'$ é o espaço $B(\mathbb{X}; \mathbb{K})$ e neste último anteriormente definimos vários tipos de convergências, podemos afirmar que

Convergência forte em $\mathbb{X}'$ equivale a convergência uniforme em $B(\mathbb{X}; \mathbb{K})$.

Além dessas convergências, introduzimos também a noção de convergência fraca*:

Definição: Dizemos que uma sequência (f_n) em $\mathbb{X}'$ converge fraco* para f, se $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in \mathbb{X}$. Note que esta definição é equivalente à convergência pontual em $B(\mathbb{X}; \mathbb{K})$.

Observação: Observe que no espaço dual $\mathbb{X}'$ temos que

Convergência forte $\Rightarrow$ Convergência fraca $\Rightarrow$ Convergência fraca*.

Exemplo: Seja $1 \leq p < \infty$, considere a sequência (f_m) de $(\ell^p)'$ dada para cada $x = (x_n) \in \ell^p$ por $f_m(x) = x_m$. Vejamos que converge fraco*, porém não converge forte. De fato, podemos perceber que o funcional nulo é o limite fraco*, pois

$$|f_m(x) - 0(x)| = |x_m| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{já que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \text{ converge},$$

porém, considerando $e_m = (\delta_{mn})_{n\in\mathbb{N}}$ temos que $\|e_m\|_p = 1$ e

$$\|f_m\| = \|f_m\|\|e_m\|_p \geq |f_m(e_m)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - 0\| \geq 1.$$

O Teorema 5.5.5 para operadores em $B(\mathbb{X};\mathbb{K}) = \mathbb{X}'$ é enunciada da seguinte forma:

Corollary 5.5.6 *Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Banach. A sequência (f_n) em $\mathbb{X}'$ é uma sequência converge fraco* para algum $f \in \mathbb{X}'$ se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

1. *A sequência $(\|f_n\|)$ é limitada.*
2. *A sequência $(f_n z)$ é de Cauchy para todo $z \in M$, onde M é algum subconjunto total de $\mathbb{X}$.*

Theorem 5.5.7 (Compacidade sequencial fraca) *Se $\mathbb{X}$ um espaço reflexivo então toda sequência limitada admite uma subsequencia fracamente convergente.*

Proof: Seja (x_n) uma sequência limitada em $\mathbb{X}$. Consideremos o subespaço $Z = \overline{\mathrm{Ger}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ o qual por ser subespaço fechado do espaço reflexivo $\mathbb{X}$, é reflexivo. Consequentemente, Z'' é separável por ser isometricamente isomorfo ao espaço separável Z e por um teorema anterior, Z' é separável. Então, considere $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto denso em Z'. Como a sequencia (x_n) é limitada temos que a sequência $(f_1(x_n))$ é limitada em $\mathbb{K}$, assim existe uma subsequência (x_{1n}) de (x_n) tal que $(f_1(x_{1n}))$ converge. Aplicando o mesmo raciocínio encontramos uma subsequência (x_{2n}) de (x_{1n}) tal que $(f_2(x_{2n}))$ converge. Repetindo este processo infinitamente encontramos subsequências

$$\{x_{1n} : n \in \mathbb{N}\} \supset \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \supset \cdots \supset \{x_{mn} : n \in \mathbb{N}\} \supset \cdots$$

tal que para cada $m \in \mathbb{N}$, $(f_m(x_{mn}))$ converge quando $n \to \infty$. Se denotamos com $z_n = x_{nn}$ temos que $(z_n)_{n\geq m}$ é uma subsequencia de cada sequência $(x_{mn})_{n\in\mathbb{N}}$, $m \in \mathbb{N}$. Portanto, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado $(f_m(z_n))$ converge quando $n \to \infty$, isto é $(J(z_n)(f_m))$ converge. Neste ponto temos que a sequência $(J(z_n))$ em Z'' tal que $(\|J(z_n)\|) = (\|z_n\|)$ é limitada e $(J(z_n)(f))$ é de Cauchy para todo $f \in \{f_m : m \in \mathbb{N}\}$ denso em Z', assim pelo corolário anterior $(J(z_n))$ converge fraco* para algum $g \in Z''$. Como $g = J(x)$ para algum $x \in Z$ temos que $J(z_n) \to J(x)$ fraco* em Z''. Logo $f(z_n) \to f(x)$ para todo $f \in Z'$. Seja $h \in \mathbb{X}'$ arbitrário, então $f = h\big|_Z \in Z'$ e portanto $h(z_n) = f(z_n) \to f(x) = h(x)$, portanto $z_n \rightharpoonup x$. $\square$

Observação: A recíproca deste teorema também vale e é conhecida como *Teorema de Eberlein-Smulian.*

Theorem 5.5.8 (Compacidade sequencial fraca*) *Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado separável. Então toda sequencia limitada em $\mathbb{X}'$ possui uma subsequência fraca* convergente.*

Proof: Seja (f_n) uma sequência limitada em $\mathbb{X}'$. Como $\mathbb{X}$ é separável existe um conjunto $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em $\mathbb{X}$. (g_{1n}) de (f_n) tal que $(g_{1n}(x_1))$ é convergente. Aplicando o mesmo raciocínio encontramos uma subsequência (g_{2n}) de (g_{1n}) tal que $(g_{2n}(x_2))$ converge. Aplicando este processo repetidas vezes encontramos subsequências

$$\{g_{1n} : n \in \mathbb{N}\} \supset \{g_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \supset \cdots \supset \{g_{mn} : n \in \mathbb{N}\} \supset \cdots$$

tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq m$, $(g_{mn}(x_i))$ converge quando $n \to \infty$. Consideremos a diagonal $h_n := g_{nn}$, logo $(h_n)_{n \geq m}$ é uma subsequencia de cada sequência $(g_{mn})_{n\in\mathbb{N}}$. Logo, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado $(h_n(x_m))$ converge, isto é, (h_n) converge para todo $x \in D$. Consequentemente (h_n) é uma sequência limitada tal que $(h_n(x))$ é uma sequencia de Cauchy no conjunto total D. Pelo Corolário 5.5.6 temos que h_n converge fraco* para algum $h \in \mathbb{X}'$. $\square$

Observaçâo: O teorema anterior é uma versão do Teorema de Banach-Alaoglu quando o espaço normado é separável. Para espaços normados em geral (separáveis ou não separáveis) o Teorema de Banach-Alaoglu tem o seguinte enunciado: a bola unitária fechada em $\mathbb{X}'$ é fraca* compacta.

5.6 Teorema da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado

Definição: Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços métricos, uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é dita uma aplicação aberta, se leva abertos em abertos, isto é, se U é um subconjunto aberto de $\mathbb{X}$, então $f(U)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{Y}$.

Lemma 5.6.1 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Banach e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado. Se T é sobrejetivo então existe $r > 0$ tal que $\hat{B}_r(0) \subseteq T(B_1(0))$, onde B e $\hat{B}$ denotam bolas abertas em $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ respectivamente.*

Proof: Provaremos este lema em várias etapas.
Af 1. Existe $y_0 \in \mathbb{Y}$ e $\epsilon > 0$ tal que $\hat{B}_\epsilon(y_0) \subseteq \overline{T(B_{1/2}(0))}$: Denotando com $U_0 = B_{1/2}(0)$, observe que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} kU_0.$$

Como T é linear sobrejetivo temos que

$$\mathbb{Y} = T(\mathbb{X}) = T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} kU_0\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(U_0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Y} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(U_0)}.$$

Pelo teorema de Baire, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que o conjunto $\overline{k_0 T(U_0)} = k_0 \overline{T(U_0)}$ contém uma bola aberta, isto é, existe $\hat{y} \in \mathbb{Y}$ e $\delta > 0$ tal que $\hat{B}_\delta(\hat{y}) \subseteq k_0\overline{T(U_0)}$, e portanto

$$\hat{B}_\delta(0) + \hat{y} = \hat{B}_\delta(\hat{y}) \subseteq k_0\overline{T(U_0)},$$

logo se consideramos $y_0 = \hat{y}/k_0$ teremos que

$$\hat{B}_{\frac{\delta}{k_0}}(y_0) = \frac{1}{k_0}\hat{B}_\delta(0) + y_0 \subseteq \overline{T(U_0)}.$$

Af 2. Existe $\epsilon > 0$ tal que $\hat{B}_\epsilon(0) \subseteq \overline{T(B_1(0))}$: De fato, considerando y_0 e ϵ da Af 1, temos que

$$\hat{B}_\epsilon(0) = \hat{B}_\epsilon(y_0) - y_0 \subseteq \overline{T(U_0)} - y_0,$$

logo basta mostrar que

$$\overline{T(U_0)} - y_0 \subseteq \overline{T(B_1(0))}.$$

Seja $y \in \overline{T(U_0)} - y_0$, então $y + y_0 \in \overline{T(U_0)}$, e como também $y_0 \in \overline{T(U_0)}$, temos que existem sequências (x_n) e (z_n) em U_0 tal que $T(x_n) \to y + y_0$ e $T(z_n) \to y_0$. Logo

$$T(x_n - z_n) = T(x_n) - T(z_n) \to y.$$

Desde que $\|x_n - z_n\| \leq \|x_n\| + \|z_n\| < 1$ temos que $x_n - z_n \in B_1(0)$, concluindo que $y \in \overline{T(B_1(0))}$.

Af 3. Existe $\epsilon > 0$ tal que $\hat{B}_{\epsilon/2}(0) \subseteq T(B_1(0))$: Da afirmação anterior temos que $\hat{B}_\epsilon(0) \subseteq \overline{T(B_1(0))}$, logo, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\hat{B}_{\epsilon/2^n}(0) = \frac{1}{2^n}\hat{B}_\epsilon(0) \subseteq \frac{1}{2^n}\overline{T(B_1(0))} = \overline{T(B_{1/2^n}(0))}. \tag{6.2}$$

Seja $y \in \hat{B}_{\epsilon/2}(0)$, mostraremos que $y \in T(B_1(0))$. De fato, considerando $n = 1$ em (6.2), e como $y \in \hat{B}_{\epsilon/2}(0)$ segue que $y \in \overline{T(B_{1/2}(0))}$. Logo existe $x_1 \in B_{1/2}(0)$ tal que

$$\|y - T(x_1)\| < \epsilon/2^2.$$

Como $y - T(x_1) \in \hat{B}_{\epsilon/2^2}(0)$, usando novamente (6.2) com $n = 2$, e repetindo o raciocínio anterior, existe $x_2 \in B_{1/2^2}(0)$ tal que

$$\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \epsilon/2^3.$$

Aplicando este processo repetidas vezes obtemos uma sequência (x_n) tal que $x_n \in B_{1/2^n}(0)$ e

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \right\| < \epsilon/2^{n+1},$$

ou equivalentemente

$$\left\| y - T(z_n) \right\| < \epsilon/2^{n+1}, \quad \text{onde} \quad z_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Daqui temos que $T(z_n) \to y$. Por outro lado, note que para $n > m$ tem-se

$$\|z_n - z_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

logo (z_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{X}$, e por $\mathbb{X}$ ser completo a sequência é convergênte, isto é, $z_n \to z = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \mathbb{X}$. A continuidade de T implica que $T(z_n) \to T(z)$. Por unicidade de limite concluímos que $y = T(z)$. Desde que

$$\|z\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

temos que $y \in T(B_1(0))$ como queríamos mostrar. Da afirmação 3 segue a conclusão deste Lema. □

Theorem 5.6.2 (Aplicação aberta) *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Banach e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado. Se T é sobrejetivo então T é uma aplicação aberta. Consequentemente, se T for linear limitado e bijetivo, teremos que T^{-1} é um operador linear limitado.*

Proof: Seja A um conjunto aberto de $\mathbb{X}$ mostremos que $T(A)$ é aberto em $\mathbb{Y}$. Seja $y \in T(A)$, logo $y = T(x)$ com $x \in A$. Como A é aberto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq A$. Observe que

$$B_1(0) = \frac{1}{\delta} B_\delta(0) = \frac{1}{\delta}(B_\delta(x) - x) \subseteq \frac{1}{\delta}(A - x).$$

Pelo Lema anterior existe $r > 0$ tal que

$$\hat{B}_r(0) \subseteq T(B_1(0)) \subseteq T\left(\frac{1}{\delta}(A - x)\right) = \frac{1}{\delta}(T(A) - y)$$

de onde segue que

$$\hat{B}_{\delta r}(y) = \hat{B}_{\delta r}(0) + y = \delta \hat{B}_r(0) + y \subseteq T(A).$$

Como y foi tomado arbitrário em $T(A)$, segue que $T(A)$ é aberto. □

Exemplo: Sejam $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ duas normas que tornam completo o espaço vetorial $\mathbb{X}$ tal que existe $\beta > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

então estas normas são equivalentes. De fato, a aplicação linear identidade $I : (\mathbb{X}, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{X}, \|\cdot\|_2)$ é um operador linear bijectivo e contínuo, pois $\|Ix\|_2 \leq \beta\|x\|_1$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Logo, pelo teorema anterior $I^{-1} : (\mathbb{X}, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{X}, \|\cdot\|_1)$ é um operador linear limitado, isto é, existe $\alpha > 0$ tal que $\|x\|_1 = \|I^{-1}x\|_1 \leq \alpha\|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{X}$, assim

$$\frac{1}{\alpha}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Definição: [Operador linear fechado] Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados. Um operador linear $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é dito operador linear fechado, se seu gráfico

$$Graf(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$$

é fechado em $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ com a norma $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$. Nestas condições T será fechado se, e somente se, para toda sequência (x_n) em $D(T)$ tal que $(x_n, Tx_n) \to (x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ se tenha que $x \in D(T)$ e $y = Tx$.

Exemplo: Consideremos o espaço de Banach $\mathbb{X} = C([0, 1])$. Vejamos que o operador diferenciação $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, definido em $D(T) = C^1([0, 1])$ por $Tx = x'$ é um operador linear fechado embora não seja um operador limitado. De fato, Seja (x_n) uma sequência em $C^1([0, 1])$ tal que $(x_n, x_n') \to (x, y)$ em $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$, logo $x_n \to x$ e $x_n' \to y$ em $\mathbb{X}$. Como x_n' converge para y na norma de $C([0, 1])$ temos que (x_n') é uma sequencia de funções que converge uniformemente para y no intervalo $[0, 1]$, de onde segue que para cada $t \in [0, 1]$,

$$\int_0^t x_n'(s)\, ds \to \int_0^t y(s)\, ds.$$

Logo, usando o teorema fundamental do cálculo temos que

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t x_n'(s)\, dt \to x(0) + \int_0^t y(s)\, ds \text{ para cada } t \in [0, 1].$$

Por outro lado, como $x_n(t) \to x(t)$ para cada $t \in [0, 1]$, por unicidade de limite segue que

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)\, ds, \quad t \in [0, 1].$$

Portanto $x \in C^1([0, 1])$ é $x' = y$.

Theorem 5.6.3 *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado. Logo*

1. *Se $D(T)$ é fechado, então T é fechado.*

2. *Se T é fechado e $\mathbb{Y}$ é completo, então $D(T)$ é fechado.*

Proof: **Item 1**. Seja (x_n) em $D(T)$ tal que $(x_n, Tx_n) \to (x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. Logo temos $x_n \to x$ e $Tx_n \to y$. como $D(T)$ é fechado, então temos que $x \in D(T)$ e pela continuidade de T segue que $Tx_n \to Tx$ e portanto $y = Tx$. Consequentemente, o operador T é fechado.

Item 2. Seja (x_n) uma sequência em $D(T)$ tal que $x_n \to x \in \mathbb{X}$ portanto esta sequência é de Cauchy. Desde que

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\|\|x_n - x_m\|, \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

temos que (Tx_n) é de cauchy em $\mathbb{Y}$. Como $\mathbb{Y}$ é um espaço de Banach, temos que $Tx_n \to y$ para algum $y \in \mathbb{Y}$, consequentemente, por T ser fechado $x \in D(T)$ mostrando assim que $D(T)$ é fechado. □

Theorem 5.6.4 (Gráfico Fechado) *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Banach. Se $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear fechado e $D(T)$ for fechado, então T é limitado.*

Proof: Por T ser fechado, seu gráfico, Graf(T) é fechado no espaço de Banach $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. Logo Graf($T$) é um espaço de Banach. Também, por $D(T)$ ser fechado no espaço de Banach $\mathbb{X}$, temos que $D(T)$ é um espaço de Banach. Definimos $P : \text{Graf}(T) \to D(T)$ dado por $P(x, Tx) = x$. Então P é um operador linear bijetivo e desde que

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|(x, Tx)\|,$$

segue que P é um operador limitado. Pelo teorema da aplicação aberta $P^{-1} : D(T) \to \text{Graf}(T)$ é um operador limitado. Consequentemente,

$$\|Tx\| \leq \|(x, Tx)\| = \|P^{-1}x\| \leq \|P^{-1}\|\|x\|, \quad \forall x \in D(T),$$

isto é, T é um operador limitado. □

Exemplo: Considere a sequência de números reais $a(n, i)$ para $n \geq i \geq 1$. Para cada sequência numérica $x = (x(n))$, associemos a sequência $Ax = (Ax(n))$ onde

$$(Ax)(n) := \sum_{i=1}^{n} a(n, i)x(i),$$

Suponha que o operador A tem a seguinte propriedade: $Ax \in \ell^p$ para todo $x \in \ell^p$. Vejamos então que esse operador linear $A : \ell^p \to \ell^p$ é limitado. De fato, como $D(A) = \ell^p$ é fechado, em vista do teorema do gráfico fechado basta mostrar que A é um operador fechado. Seja (x_m) uma sequência em $D(A)$ tal que $x_m \xrightarrow{m \to \infty} x$ e $Ax_m \xrightarrow{m \to \infty} y$ em ℓ^p. Como x já pertence a $D(A)$ resta mostrar que $Ax = y$. Note que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $|x_m(i) - x(i)| \leq \|x_m - x\|_p$ temos que $x_m(i) \xrightarrow{m\to\infty} x(i)$, assim para cada n fixado

$$(Ax_m)(n) = \sum_{i=1}^{n} a(n,i)x_m(i) \xrightarrow{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a(n,i)x(i) = (Ax)(n).$$

Como $|(Ax_m)(n) - y(n)| \leq \|Ax_m - y\|_p \xrightarrow{m\to\infty} 0$, por unicidade de limite segue que $y(n) = (Ax)(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é $y = Ax$.

5.7 Exercícios

1. No conjunto $M = C[0,1]$ considere a relação $f \leq g$ a qual significa que $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Esta relação é uma ordem parcial? M é totalmente ordenado? Subconjuntos de M totalmente ordenados tem uma cota superior? M tem um elemento maximal?

2. Mostre o teorema 3.1.1.

3. Mostre o teorema 4.2.2.

4. Seja p é um funcional sublinear definido no espaço vetorial $\mathbb{X}$.

   (a) Mostre que $p(0) = 0$ e que $p(-x) \geq -p(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$.

   (b) Se p for contínuo em $x = 0$, mostre que p é contínuo em qualquer $x \in \mathbb{X}$.

   (c) Seja $r > 0$, mostre que o conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : p(x) \leq r\}$ é convexo.

   (d) Mostre que $q(x) = \max\limits_{|\alpha|=1} p(\alpha x)$ define uma seminorma em $\mathbb{X}$.

5. Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ uma função subaditiva definida no espaço normado $\mathbb{X}$, isto é, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$. Se f é não negativa fora de uma bola $\{x \in \mathbb{X} : \|x\| \leq r\}$, mostre que é não negativa para todo $x \in \mathbb{X}$.

6. Seja p é um funcional sublinear definido no espaço vetorial real $\mathbb{X}$.

   (a) Considere o subespaço $Z = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{R}\}$, onde $x_0 \in \mathbb{X}$, defina $f : Z \to \mathbb{R}$ dada por $f(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$. Mostre que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in Z$.

   (b) Mostre que existe um funcional linear $\tilde{f} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ tal que $-p(-x) \leq \tilde{f}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$.

7. Se $\mathbb{X}$ é um espaço normado. Mostre que

   (a) Se $\mathbb{X} \neq \{0\}$, então $\mathbb{X}' \neq \{0\}$.

   (b) Para cada $x_0 \in \mathbb{X}$, $x_0 \neq 0$ e $\beta > 0$, existe $f \in \mathbb{X}'$ tal que $f(x_0) = \beta\|x_0\|$ e $\|f\| = \beta$.

   (c) $x = y$ se e somente se $f(x) = f(y)$ para todo $f \in \mathbb{X}'$.

8. Mostre que a função $p : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ dada por

$$p(x) = \limsup_{k\to\infty} x_k, \quad x = (x_k) \in \ell^\infty,$$

   é um funcional sublinear

9. Considere o espaço $\mathbb{R}^2$ com a norma $\|(x,y)\| = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$. No subespaço $Z = \{(t, mt) : t \in \mathbb{R}\}$ considere o funcional linear $f : Z \to \mathbb{R}$ dado por $f(t, mt) = t$.

(a) Se $1 \leq p < \infty$. Encontre a única extensão linear $\tilde{f}$ de f, definida em todo $\mathbb{R}^2$ tal que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

(b) Para o caso $p = \infty$ e $|m| = 1$, encontre duas extensões lineares distintas que preservem a norma de f. Consequentemente encontre infinitas extensões lineares distintas que preservem a norma de f.

10. Seja x_0 um ponto da esfera $S_r = \{x : \|x\| = r\}$ no espaço normado real $\mathbb{X}$. Mostre que existe um hiperplano $H = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = c\}$ com $f \in \mathbb{X}'$, que contem x_0 e mantem S_r em um dos seus lados, isto é, ou $f(x) \leq c$ para todo $x \in S_r$ ou $f(x) \geq c$ para todo $x \in S_r$.

11. Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado e Z um subespaço de $\mathbb{X}$, se $f \in \mathbb{X}'$ temos que $f|_Z \in Z'$. Usando esta associação podemos dizer que $\mathbb{X}' \subseteq Z'$, assim temos que

$$Z \subseteq \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{X}' \subseteq Z' \quad \Rightarrow \quad Z'' \subseteq \mathbb{X}''.$$

Mostre que, se $\mathbb{X}$ é reflexivo e Z é fechado, então Z é reflexivo. Use este resultado para mostrar que ℓ^∞ não é reflexivo.

12. Mostre que, se $\mathbb{X}$ é reflexivo, então $\mathbb{X}'$ é reflexivo. Use este resultado para mostrar que ℓ^1 não é reflexivo.

13. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Banach. Mostre que $\mathbb{X}$ é reflexivo se, e somente se, $\mathbb{X}'$ é reflexivo.

14. Seja Z um subespaço fechado do espaço normado $\mathbb{X}$ e $x_0 \in \mathbb{X} \setminus Z$. Mostre que existe $f \in \mathbb{X}'$ tal que

$$\|f\| = \frac{1}{d(x_0, Z)}, \quad f\big|_Z \equiv 0, \quad f(x_0) = 1.$$

15. Seja M um subconjunto do espaço normado $\mathbb{X}$. Mostre que

(a) $x_0 \in \overline{\mathrm{Ger}(M)}$ se, e somente se, $f(x_0) = 0$ para todo $f \in \mathbb{X}'$ tal que $f\big|_M \equiv 0$.

(b) Mostre que M é total se, e somente se, para todo $f \in \mathbb{X}'$ tal que $f\big|_M \equiv 0$ tem-se que $f \equiv 0$.

16. Seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ um conjunto linearmente independente no espaço normado $\mathbb{X}$ e $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ uma coleção de escalares. Mostre que existe $f \in \mathbb{X}'$ tal que $f(x_k) = c_k$ para todo $k = 1, \ldots, m$.

17. Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços normados isometricamente isomorfos. Mostre que, se $\mathbb{X}$ é reflexivo então $\mathbb{Y}$ é reflexivo.

18. Seja Z um subespaço do espaço normado $\mathbb{X}$ e $i : Z \to \mathbb{X}$ a inclusão canônica. Mostre que o operador adjunto $i' : \mathbb{X}' \to Z'$ e dado for

$$i'(f) = f\big|_Z \text{ para todo } f \in \mathbb{X}'.$$

19. Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado e $M \subseteq \mathbb{X}$, $N \subseteq \mathbb{X}'$, considere os *conjuntos anuladores*:

$$M^a = \{f \in \mathbb{X}' : f(x) = 0, \quad \forall x \in M\}, \quad {}^aN = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = 0, \quad \forall f \in N\}.$$

   (a) Mostre que $\left(\overline{\mathrm{Ger}(M)}\right)^a = M^a$ e ${}^a\!\left(\overline{\mathrm{Ger}(N)}\right) = {}^aN$.

   (b) Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T \in B(\mathbb{X};\mathbb{Y})$. Mostre que $\mathrm{Im}(T)^a = \mathrm{Nu}(T')$ e $\mathrm{Im}(T) \subseteq {}^a\mathrm{Nu}(T')$.

20. Seja $\{T_\lambda \in B(\mathbb{X};\mathbb{Y}) : \lambda \in \Lambda\}$ como no Teorema de Banach-Steinhaus. Mostre que $\lim\limits_{\|x\|\to 0} \|T_\lambda x\| = 0$ uniformemente para todo $\lambda \in \Lambda$.

21. [Ressonância] Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Banach, $\mathbb{Y}$ um espaço normado e (T_n) uma sequência em $B(\mathbb{X};\mathbb{Y})$. Se $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = \infty$, mostre que existe $x_0 \in \mathbb{X}$ com $\|x_0\| = 1$ tal que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x_0\| = \infty$.

22. Mostre que no teorema 5.4.2, o completamento de $\mathbb{X}$ é essencial (isto é, não pode ser retirado). Dica: Encontre uma sequência (f_n) apropriada em $\mathbb{X}'$, onde $\mathbb{X}$ é o subespaço de ℓ^∞ cujos elementos são as sequências que no máximo tem um número finito de termos não nulos.

23. Se (x_n) é uma sequência num espaço normado $\mathbb{X}$. Se para cada $f \in \mathbb{X}'$ a sequência $(f(x_n))$ é limitada, prove que (x_n) é limitada.

24. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Banach e (T_n) uma sequência em $B(\mathbb{X};\mathbb{Y})$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

   (a) $(\|T_n\|)$ é limitado.

   (b) $(\|T_n x\|)$ é limitado para cada $x \in \mathbb{X}$.

   (c) $(\|g(T_n x)\|)$ é limitado para cada $(x, g) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}'$.

   (d) $(\|g \circ T_n\|)$ é limitado para cada $g \in \mathbb{Y}'$.

25. Se $y = (y_n)$ é uma sequência de números reais tal que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converge para todo $x = (x_n) \in \ell_0^\infty$, mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$.

26. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado. Mostre que T é fracamente contínuo, isto é, se $x_n \rightharpoonup x$ então $Tx_n \rightharpoonup Tx$.

27. Seja (x_n) uma sequência que converge fraco para x num espaço de Hilbert $\mathbb{X}$. Se $\|x_n\| \to \|x\|$ mostre que (x_n) converge forte para x.

28. Um subconjunto U do espaço normado $\mathbb{X}$ é dito *aberto fraco sequencial* se tem a seguinte propriedade: Se $x \in U$ e (x_n) é uma sequencia em $\mathbb{X}$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ então existe n_0 tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Mostre que todo subconjunto aberto fraco sequencial é um conjunto aberto.

29. Mostre que a sequência (e_n) em ℓ^1, onde $e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$, não converge fracamente. Que pode afirmar, sobre a validade do corolário 5.5.4 quando $p = 1$?

30. Mostre a seguinte versão do teorema da limitação uniforme: Considere $\mathbb{X}$ é um espaço de Banach e $\mathbb{Y}$ é um espaço normado. Se $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma família em $B(\mathbb{X};\mathbb{Y})$ tal que $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} |g(T_\lambda x)| < \infty$ para todo $x \in \mathbb{X}$ e $g \in \mathbb{Y}'$, então $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| < \infty$. Este resultado generaliza a versão anterior?

31. Seja $\mathbb{X}$ m espaço de Banach considere (T_n), T, (S_n) e S elementos de $B(\mathbb{X};\mathbb{X})$. Mostre que
    (a) Se $T_n \to T$ forte e $S_n \to S$ fraco então $S_nT_n \to ST$ fraco.
    (b) Se $T_n \to T$ fraco e $S_n \to S$ forte então $S_nT_n \to ST$ fraco.

32. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados. Se $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é um operador linear que leva sequências fortemente convergentes para 0 em sequências fracamente convergentes para 0, mostre que T é contínuo.

33. Uma sequência (x_n) no espaço normado $\mathbb{X}$ se diz fracamente limitada se $(f(x_n))$ for limitada para cada $f \in \mathbb{X}'$. Mostre que uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, é fracamente limitada.

34. Seja (x_n) uma sequência no espaço normado $\mathbb{X}$ e D um subconjunto denso em $\mathbb{X}'$. Mostre que $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, (x_n) é limitada e $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in D$.

35. Se $\phi_n \rightharpoonup \phi$ em $C[a,b]$, mostre que $\phi_n(t) \to \phi(t)$ para cada $t \in [a,b]$.

36. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Considere a sequência (f_n) em $(\ell^p)'$ definida por $f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_n$.
    (a) Se $p < \infty$, mostre que (f_n) e fraca* convergente, porém não converge forte.
    (b) Se $p = \infty$, mostre que (f_n) é limitada porém não possui subsequencia fraca* convergente.

37. Considere (f_n) uma sequencia no espaço dual $\mathbb{X}'$. Mostre que
    (a) Se $f_n \rightharpoonup f$ então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

(b) Se $\mathbb{X}$ é reflexivo e $f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$ então $f_n \rightharpoonup f$.

38. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços métricos e $h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função bijetiva. Mostre que h é uma aplicação aberta se, e somente se, h^{-1} é contínua.

39. Considere $\mathbb{X}$ o subespaço de ℓ^∞ cujos elementos são as sequências que tem no máximo um numero finito de entradas não nulas. Mostre que o operador linear $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots),$$

é uma aplicação aberta. T^{-1} é uma aplicação aberta?

40. Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado onde $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ são espaços de Banach. Se T é bijetivo, mostre que existem constantes positivas $c_1,\ c_2$ tal que

$$c_1\|x\| \le \|Tx\| \le c_2\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

41. Considere $\mathbb{X}$ um espaço de Banach com cada uma das normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Se para toda sequência (x_n) em $\mathbb{X}$ tal que $\|x_n\|_1 \to 0$ implica que $\|x_n\|_2 \to 0$, mostre que estas normas são equivalentes.

42. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados. Mostre que a projeção $P : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, $P(x, y) = x$ é uma aplicação aberta.

43. Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado e $f \in \mathbb{X}'$. Se $f \not\equiv 0$ mostre que f é uma aplicação aberta nos seguintes casos:

    (a) Quando $\mathbb{X}$ é um espaço de Banach, com o uso do teorema da aplicação aberta.

    (b) Quando $\mathbb{X}$ não é um espaço de Banach, usando a definição.

44. Consideremos o espaço vetorial $C^1[0,1]$ com a norma $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Mostre que o operador diferenciação $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ dada por $Tf = f'$ é uma aplicação aberta.

45. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços de Banach e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado e injetivo. Mostre que sua inversa: $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ é um operador linear limitado, se e somente se, $\mathrm{Im}(T)$ é fechado.

46. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear fechado. Mostre que

    (a) Se $A \subseteq \mathbb{X}$ é compacto, então $T(A)$ é fechado.

    (b) Se $B \subseteq \mathbb{Y}$ é compacto, então $T^{-1}(B) := \{x \in \mathbb{X} : Tx \in B\}$ é fechado.

47. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T \in B(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$. Se (x_n) é uma sequência em $\mathbb{X}$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ e $Tx_n \to y$, mostre que $y = Tx$.

48. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear fechado. Mostre que

   (a) O núcleo, $N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$, é fechado.

   (b) Se $L \in B(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$, então $T + L : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to Y$ é fechado.

49. Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T : D(T) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é um operador linear fechado injetivo. Mostre que

   (a) T^{-1} é um operador fechado.

   (b) Se T^{-1} é limitado e $\mathbb{X}$ é completo, então $\mathrm{Im}(T)$ é fechado.

   (c) Se $\mathrm{Im}(T)$ é fechado e $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ são completos, então T^{-1} é limitado.

50. Considere o operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$$

   Mostre que

   (a) T é limitado e calcule sua norma.

   (b) $\mathrm{Im}(T)$ não é fechado.

   (c) T é injetiva, porém $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \subseteq \ell^2 \to \ell^2$ não é limitado.

   (d) Se trocamos ℓ^2 por ℓ^p com $1 \leq p \leq \infty$ valem os resultados anteriores?

51. Considere o operador identidade $I : C[a.b] \subset L^1(a, b) \to C[a.b]$. Mostre que I é um operador fechado, porém não é limitado.

52. Use o Teorema do gráfico fechado para mostrar a segunda afirmação do Teorema 5.6.2.

53. Use a teoria de operadores fechados para mostrar o seguinte resultado: seja (x_n) uma sequência em $C^1[0, 1]$ tal que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge uniformemente para uma função x no intervalo $[0, 1]$. Se a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$ converge uniformemente no intervalo $[0, 1]$, mostre que $x \in C^1[0, 1]$ e que

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$