MATE-7007
Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

10 de Janeiro

Aula de hoje:

- Espaço métrico
- Espaço normado
- Espaço com produto interno

Métrica

Definição (Métrica)

Seja M um conjunto. Uma métrica (ou distância) em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(D1) $d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$.

(D2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(D3) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in M$. (Simetria)

(D4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in M$. (Desigualdade Triangular)

- Um conjunto M munido de uma métrica d é chamado de *Espaço Métrico* e quando seja necessário este será denotado por (M, d).
- Se consideramos num conjunto M duas métricas, digamos d_1 e d_2, então teremos dois espaços métricos $M_1 = (M, d_1)$ e $M_2 = (M, d_2)$.
- Se (M, d) é um espaço métrico e $X \subset M$ é um subconjunto, então podemos considerar o espaço métrico $(X, \widetilde{d})$, sendo $\widetilde{d}$ a restrição de d ao conjunto $X \times X$. (Dizemos que $\widetilde{d}$ é a métrica induzida por d).

EXEMPLOS (TRIVIAIS)

- Dado um conjunto $M \neq \emptyset$ temos a seguinte métrica (discreta, ou 0-1):

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } \; x \neq y, \\ 0, & \text{se } \; x = y. \end{cases}$$

  Este é um exemplo bastante trivial, mas muito útil para contra-exemplos

- Em $\mathbb{R}$ temos a métrica (usual) $d(x,y) = |x - y|$.

Exemplo (Espaço euclidiano)

- Considere $\mathbb{R}^n$ com sua estrutura natural de espaço vetorial real e assuma fixada a base canônica. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, escreveremos

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ e } y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes métricas:

$$d(x,y) = \left[\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2\right]^{1/2}, \; d_s(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \text{ e } d_\infty(x,y) = \max_{1 \le j \le n} |x_j - y_j|.$$

Exercício: Mostre que dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale a desigualdade

$$d_\infty(x,y) \le d(x,y) \le d_s(x,y) \le n d_\infty(x,y).$$

Exemplo (Funções limitadas)

- Sejam X um conjunto arbitrário e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é limitada se existe $K \geq 0$ tal que
$$|f(x)| \leq K, \ \forall x \in X.$$
O conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}$ será denotado por $\mathscr{B}(X; \mathbb{R})$.

Uma métrica em $\mathscr{B}(X; \mathbb{R})$

A função $d : \mathscr{B}(X; \mathbb{R}) \times \mathscr{B}(X; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

define uma métrica em $\mathscr{B}(X; \mathbb{R})$, chamada de *métrica da convergência uniforme*.

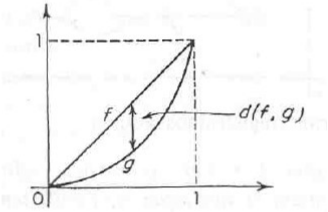
Exemplo (Funções contínuas)

- Sejam $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\mathcal{C}[a,b]$ o espaço das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
- Note que $\mathcal{C}[a,b]$ é um subconjunto (subespaço) de $\mathscr{B}([a,b];\mathbb{R})$. Assim, temos em $\mathcal{C}[a,b]$ a métrica

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Exemplo

Considerando o intervalo $[0,1]$ e as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ temos $d(f,g) = 1/4$.



Exemplo (Espaços de sequências)

- Considere $\mathcal{S} = \{x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}; x_j \in \mathbb{C}\}$ o espaço das sequências numéricas.

Em $\mathcal{S}$ temos a métrica

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

Normas

- Ao longo do curso iremos considerar espaços vetoriais sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). A menos de menção contrária, sempre iremos considerar $\mathbb{C}$.

Definição (Norma)

Uma norma num espaço vetorial V é uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in V$.

- O par $(V, \|\cdot\|)$ é dito ser um *espaço normado*.
- Se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado e W é um subespaço vetorial de V, então temos o espaço normado $(W, \|\cdot\|_W)$, sendo $\|\cdot\|_W$ a restrição de $\|\cdot\|$ sobre W.
- Exercício: Num espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ tem-se a métrica (induzida por $\|\cdot\|$):

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\mathcal{N}}$$

Desigualdade de Hölder

Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências de números reais não negativos tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^q < \infty,$$

sendo $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{1/q}$$

Desigualdade de Minkowski

Sejam $p \geq 1$ um número real, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências de números reais não negativos tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty \ \text{e} \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^p < \infty.$$

Então,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p \right)^{1/p}.$$

EXEMPLOS (BÁSICOS)

- Em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) temos as seguintes métricas:

$$\|x\|_p = \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right]^{1/p}, \ (p \geq 1), \ \|x\|_s = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \ \text{ e } \ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

- No espaço das funções contínuas $\mathcal{C}[a,b]$ temos a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

- Se denotarmos por $\mathcal{R}[a,b]$ o espaço das funções Riemann integráveis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então a aplicação

$$f \mapsto \int_a^b |f(t)| dt$$

não define uma norma em $\mathcal{R}[a,b]$.

Exemplos (espaços de sequências)

Os espaços ℓ^p

Seja $1 \leq p < \infty$ fixado e considere o conjunto

$$\ell^p = \left\{ x = \{x_n\} \in \mathcal{S} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

- Em ℓ^p temos a norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

O espaço ℓ^∞

Considere o subespaço vetorial

$$\ell^\infty = \{x = \{x_n\} \in \mathcal{S}; \{x_n\} \text{ é limitada}\}$$

- Em ℓ^∞ temos a norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Definição (Produto interno)

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um produto interno em $\mathcal{V}$ é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $\langle x, x \rangle \neq 0$, para todo $x \neq 0$,

(P2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in \mathcal{V}$,

(P3) $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle y, w \rangle$, para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Um espaço vetorial $\mathcal{V}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamado de *Espaço com produto interno* e quando necessário usaremos a notação $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- Note que $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$, para todo $x, y \in \mathcal{V}$. Em particular,

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

Exercício: É verdade que $\langle x, y \rangle = 0$ implica em $x = y$?

Exemplos

- Em $\mathcal{C}[a,b]$ temos o produto interno

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

- Em $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) temos o produto interno

$$\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}.$$

- Em

$$\ell^2 = \left\{ x=\{x_n\}\in\mathcal{S} : \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty \right\}$$

temos o produto interno

$$\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\overline{y_j}.$$

ALGUMAS OBSERVAÇÕES

TEOREMA

Seja $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. Para cada $x \in \mathcal{V}$ considere o número real

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

(a) Vale a desigualdade (Cauchy-Schwarz) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$, para todo $x, y \in \mathcal{V}$. A igualdade é válida se, e somente se, $\{x, y\}$ é l.d.

(b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in \mathcal{V}$. A igualdade é válida se, e somente se, $x = 0$ ou $x = ty$, para algum $t \geq 0$.

(c) A função $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in \mathcal{V}$, define uma norma (induzida) em $\mathcal{V}$.

- Em $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sempre iremos considerar (a menos de menção contrária) a norma induzida.
- Dizemos que dois vetores $x, y \in \mathcal{V}$ são ortogonais se $\langle x, y\rangle = 0$. Neste caso, utilizaremos a notação $x \perp y$.

Lei do Paralelogramo

Teorema

A norma $\|\cdot\|$ num espaço normado $\mathcal{N}$ é induzida por um produto interno se, e somente se, ela satisfaz a identidade

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \ \forall x, y \in \mathcal{N}.$$

Aplicação:

- A norma em ℓ^p provem de um produto interno se, e somente se, $p = 2$.
- A norma $\|\cdot\|_p$ em $\mathbb{K}^n$ provem de um produto interno se, e somente se, $p = 2$.
- A norma do sup em $C[-1, 1]$ não provém de um produto interno.