MATE-7007
Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

7 DE FEVEREIRO

Aula de hoje: Aplicações do Teorema de Hahn-Banach

- Aplicações do Teorema de Hahn-Banach
- Operador Adjunto em espaços normados
- Espaços Reflexivos

O teorema de Hahn-Banach-complexo

Teorema(Hahn-Banach-$\mathbb{C}$)

Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial real ou complexo e $p : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Se f é um funcional linear definido sobre um subespaço Z de $\mathbb{X}$ tal que

$$|f(x)| \leq p(x) \text{ para todo } x \in Z,$$

então f tem uma extensão linear $\tilde{f}$ tal que,

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{X}.$$

Teorema

Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Todo funcional linear limitado f definido sobre um subespaço Z de $\mathbb{X}$ tem uma extensão linear limitada $\tilde{f}$ definida em todo $\mathbb{X}$ tal que

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

Teorema

Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado.

(a) Dado $x_0 \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, existe $F \in \mathbb{X}^*$ tal que

$$\|F\| = 1 \text{ e } F(x_0) = \|x_0\|.$$

(b) Para $x \in \mathbb{X}$ tem-se

$$\|x\| = \sup_{0 \neq f \in \mathbb{X}^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Portanto, se $f(x_0) = 0$, $\forall f \in \mathbb{X}^*$, então $x_0 = 0$.

(c) Seja Y um subespaço fechado próprio de $\mathbb{X}$. Dado $x_0 \in \mathbb{X} \setminus Y$, existe $F \in \mathbb{X}^*$ tal que

$$\|F\| = 1, \quad F|_Y \equiv 0, \quad F(x_0) = d(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|.$$

(d) Se $\mathbb{X}$ é não trivial e $B(\mathbb{X}, \mathcal{N})$ é Banch, então $\mathcal{N}$ é Banach.

(e) Se $\mathbb{X}^*$ é separável, então $\mathbb{X}$ é separável.

Operador adjunto de Banach

Teorema

Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dois espaços normados. Dado $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ fica bem definida a aplicação linear

$$T^a : \mathcal{N}_2^* \to \mathcal{N}_1^*,$$

tal que para cada $g \in \mathcal{N}_2^*$ associa a um elemento $T^a g \in \mathcal{N}_1^*$ definido por

$$(T^a g)(\xi) = g(T\xi), \ \forall \in \mathcal{N}_1.$$

Mais ainda, $T^a \in B(\mathcal{N}_2^*, \mathcal{N}_1^*)$ e

$$\|T^a\|_{B(\mathcal{N}_2^*, \mathcal{N}_1^*)} = \|T\|_{B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)}.$$

Definição

Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dois espaços normados. Dado $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, o operardor $T^a \in B(\mathcal{N}_2^*, \mathcal{N}_1^*)$ definido acima é dito **o operador adjunto de Banach** de T.

Exercício

Sejam $T, S \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. Então:

(a) $(T+S)^a = T^a + S^a$;

(b) $(\lambda T)^a = \lambda T^a$;

(c) Se a composta $T \circ S$ está bem definida, então $(T \circ S)^a = S^a \circ T^a$.

(d) Se $T^{-1} \in B(\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1)$, então $(T^{-1})^a = (T^a)^{-1}$.

Comparação com o adjunto de Hilbert

Relembrando

- Dado $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, existe um único $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}_1, \ \forall y \in \mathcal{H}_2.$$

  Além disso, $\|T^*\| = \|T\|$.

- Pela representação de Riez, ficam bem definidos $\Psi_j : \mathcal{H}_j^* \to \mathcal{H}_j$, definido s por

$$\mathcal{H}_j^* \ni f \mapsto x_f \in \mathcal{H}_j,$$

Teorema

Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e Ψ_j os operadores de representação de Riez. Então,

$$T^a = \Psi_1^{-1} \circ T^* \circ \Psi_2.$$

Aplicação canônica

Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado. Considere a aplicação

$$\Lambda : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{**}$$

tal que a cada $x \in \mathcal{N}$ associa um $\Lambda x \in \mathcal{N}^{**}$ da seguinte forma:

$$(\Lambda x)f \doteq f(x), \ \forall f \in \ \mathcal{N}^{*}.$$

- A aplicação Λ está bem definida.
- Λ é linear.
- Λ é uma isometria.

Definição

Dizemos que um espço normado $\mathcal{N}$ é reflexivo se a aplicação Λ é sobrejetiva.

- Todo espaço normado reflexivo é completo.
- Todo espaço de Hilbert é reflexivo

EXEMPLOS

- ℓ^p é reflexivo para $1 < p < \infty$.
- O subespaço normado $\ell_0^\infty = \{x = (x_n) : x_n \to 0\}$ de ℓ^∞ não é reflexivo.
- O espaço vetorial $C[a, b]$ com a norma

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

não é reflexivo, pois não é completo.