MATE-7007
Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

11 DE FEVEREIRO

Aula de hoje: Limitação Uniforme e Convergência Fraca

- Teorema de Baire
- Princípio da Limitação Uniforme (Banach-Steinhaus)
- Convergência Fraca

QUANTIFICANDO CONJUNTOS....

DEFINIÇÃO

Sejam $\mathscr{X}$ um espaço topológico e $\mathcal{A} \subset \mathscr{X}$ um subconjunto. Dizemos que $\mathcal{A}$ é:

(i) **raro** em $\mathscr{X}$ se $int(\overline{\mathcal{A}}) = \emptyset$;

(ii) **magro** em $\mathscr{X}$ se ele está contido numa união contável de conjuntos raros.

- $\mathbb{Q}$ é magro em $\mathbb{R}$.
- Em $\mathscr{X} = C[a, b]$, tem-se que o conjunto $\mathcal{A}$ das funções que possuem derivada em algum ponto é magro.

TEOREMA (CATEGORIA DE BAIRE)

Seja $M \neq \emptyset$ espaço métrico completo. Se $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de subconjuntos fechados de M tal que

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

então $\operatorname{int}(F_k) \neq \emptyset$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Isto é, espaços métricos completos não vazios são conjuntos "não magros".

Limitação Uniforme

Teorema (Pricípio da Limitação Uniforme)

Seja $\{T_\lambda\}_{\lambda \in J}$ uma coleção de operadores em $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ que é pontualmente limitada, isto é, para cada $\xi \in \mathcal{B}$ tem-se

$$\sup_{\lambda \in J}\{\|T_\lambda \xi\|\} < \infty.$$

Nestas condições, tal família é uniformemente limitada, ou seja,

$$\sup_{\lambda \in J}\{\|T_\lambda\|\} < \infty.$$

- Note que a hipótese **pontualmente limitada** diz que, para cada $x \in \mathcal{B}$, existe C_x satisfazendo

$$\|T_\lambda x\| \leq C_x, \ \forall \lambda \in J.$$

- Por outro lado, a conclusão diz que existe $C > 0$ satsifazendo

$$\|T_\lambda\| \leq C, \ \forall \lambda \in J.$$

Teorema de Banach-Steinhaus

Teorema (Banach-Steinhaus)

Seja $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $B(\mathcal{B},\mathcal{N})$ satisfazendo a seguinte propriedade:

- ⋆ para cada $\xi \in \mathcal{B}$, existe o limite $\lim_{j\to\infty} T_j\xi$.

Nestas condições, $\sup_{j\in\mathbb{N}} \|T_j\| < \infty$. Mais ainda, a aplicação $T : \mathcal{B} \to \mathcal{N}$ dada por

$$T\xi \doteq \lim_{j\to\infty} T_j\xi$$

pertence a $B(\mathcal{B},\mathcal{N})$. Além disso,

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

Convergência fraca

Definição

Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ uma sequência e $x \in \mathcal{N}$ um ponto qualquer.

- Dizemos que $\{x_n\}$ converge fortemente para x se $\|x_n - x\| \to 0$. Neste caso, escreveremos $x_n \xrightarrow{\text{s}} x_0$.
- Dizemos que $\{x_n\}$ converge **fracamente** para x se vale a seguinte propriedade.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0), \ \forall f \in \mathcal{N}^*.$$

Neste caso, escreveremos $x_n \xrightarrow{\text{w}} x_0$.

Teorema

Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ uma sequência e $x \in \mathcal{N}$ um ponto qualquer.

(a) $x_n \xrightarrow{w} x$ e $x_n \xrightarrow{w} y$, então $x = y$.

(b) Se $x_n \xrightarrow{w} x$, então $\{x_n\}$ é limitada.

(c) $x_n \xrightarrow{s} x \Longrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$

Observação

Em geral, convergência fraca não implica convergência forte. Por exemplo, basta considerar sequência ortonormal $\{e_n\}$ num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Proposição

Se $dim(\mathcal{N}) < \infty$, então convergência fraca implica em convergência forte.

Convergências em espaços de Operadores lineares

Definição

Dados dois espaços normados $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ defini-se:

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2) = \{T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2; \ \text{tal que} \ \ T \ \ \text{é linear}\}$$
$$\mathcal{B}(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2) = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2); \ \text{tal que} \ \ T \ \ \text{é limitado}\}.$$

Dados uma sequência $\{T_n\}$ em $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)$ e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)$ dizemos que:

(i) $\{T_n\}$ converge uniformemente para T, se $T_n \to T$ forte em $\mathcal{B}(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)$;

(ii) $\{T_n\}$ converge pontualmente para T, se $T_n x \to Tx$ em $\mathcal{N}_2$ para cada $x \in \mathcal{N}_1$;

(iii) $\{T_n\}$ converge pontualmente fraco para T, se $T_n x \to Tx$ fracamente em $\mathcal{N}_2$ para cada $x \in \mathcal{N}_1$.

- Note que $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$

Topologia fraca*

Definição

Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{N}^*$. Dizemos que f_n converge fraco* para $f \in \mathcal{N}^*$ se:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \ \forall x \in \mathcal{N}.$$

Neste caso, escreve-se $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

- Note que em $\mathcal{N}^*$ vale:

$$\text{convergência uniforme} \implies \text{convergência fraca} \implies \text{convergência fraca*}.$$

Teorema (Compacidade sequencial fraca)

Num espaço reflexivo $\mathcal{N}$ toda sequência sequência limitada admite uma subsequência fracamente convergente.

Teorema (Compacidade sequencial fraca*) - (Alaoglu-separável)

Se $\mathcal{N}$ é separável , então toda sequência limitada em $\mathcal{N}^*$ possui uma subsequência fraca* convergente.