MATE-7007
Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

14 DE FEVEREIRO

Aula de hoje: Convergência fraca* e Teorema da aplicação aberta

- Convergência fraca*
- Teorema de Banach-Alaoglu (caso separável)
- Teorema da aplicação aberta

Topologia fraca*

Definição

Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{N}^*$. Dizemos que f_n converge fraco* para $f \in \mathcal{N}^*$ se:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \forall x \in \mathcal{N}.$$

Neste caso, escreve-se $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Lema

Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach. Uma sequência $\{f_n\}$ em $\mathcal{B}'$ converge fraco* para algum $f \in \mathbb{X}'$ se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

(i) $\{\|f_n\|\}$ é limitada.

(ii) $\{f_n(z)\}$ é de Cauchy para todo $z \in M$, onde M é algum subconjunto total de $\mathcal{B}$.

Teorema de Alaoglu

Teorema (Compacidade sequencial fraca)

Num espaço reflexivo $\mathcal{N}$ toda sequência sequência limitada admite uma subsequência fracamente convergente.

Teorema de Alaoglu

Se $\mathcal{N}$ é um espaço normado, então a bola fechada

$$B_1^*(0) = \{f \in \mathcal{N}^*;\ \|f\| \leq 1\}$$

é um espaço topológico de Hausdorff compacto na topologia fraca*.

Teorema de Alaoglu (separável)

Se $\mathcal{N}$ é separável , então toda sequência limitada em $\mathcal{N}^*$ possui uma subsequência fraca* convergente.

Aplicação aberta

Definição

Sejam $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ espaços métricos. Uma função $f : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_1$ é dita aberta, se leva abertos em abertos, isto é, se U é um subconjunto aberto de $\mathcal{N}_1$, então $f(U)$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{N}_2$.

Proposição

Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ espaços de Banach e $T : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ um operador linear limitado. Se T é sobrejetivo então existe $r > 0$ tal que $\widehat{B}_r(0) \subseteq T(B_1(0))$, onde B e $\widehat{B}$ denotam bolas abertas em $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente.

Teorema (aplicação aberta)

Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ espaços de Banach e $T : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ um operador linear limitado. Se T é sobrejetivo, então é uma aplicação aberta. Em particular, se T é bijetivo, então T^{-1} é contínuo.