

MATE-7007

Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



16 DE FEVEREIRO

Aula de hoje: Teorema do gráfico fechado

GRÁFICOS DE OPERADORES LINEARES

O ESPAÇO $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$

Dados dois espaços normados \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 obtêm-se o espaço $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ com a estrutura natural

$$(x, y) + (\eta, \xi) = (x + \eta, y + \xi) \text{ e } \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Além disso, $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ torna-se um espaço normado com a norma

$$\|(x, y)\| = \|x\|_{\mathcal{N}_1} + \|y\|_{\mathcal{N}_2}.$$

DEFINIÇÃO

Sejam \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 dois espaços normados e $T : Dom(T) \subseteq \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ um operador linear. O gráfico de T é o espaço vetorial

$$\mathcal{G}_T = \{(x, Tx); x \in Dom(T)\} \subset \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2.$$

Em particular, diz-se que T é um operador linear fechado se seu gráfico \mathcal{G}_T é um subespaço fechado de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.

PROPOSIÇÃO

PROPOSIÇÃO

Sejam \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 dois espaços normados e $T : \text{Dom}(T) \subseteq \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ um operador linear limitado.

- (a) Se $\text{Dom}(T)$ é fechado, então T é fechado.
- (b) Se T é fechado e \mathcal{N}_2 é completo, então $\text{Dom}(T)$ é fechado.

TEOREMA (GRÁFICO FECHADO)

Um operador linear $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ é limitado se, e somente se, é fechado.