MATE-7007
Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

21 de fevereiro

Aula de hoje: Teoria espectral

Espectro

- Todos os espaços normados serão considerados sobre $\mathbb{C}$.

Definição

Considere $T : Dom(T) \subseteq \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ um operador linear. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, defini-se $T_\lambda : Dom(T) \subseteq \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ pondo

$$T_\lambda(\eta) = T\eta - \lambda\eta,$$

ou seja, $T_\lambda = T - \lambda I$. O inverso de T_λ, quando existe, será denotado por $R_\lambda(T)$, isto é,

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}.$$

Neste caso, dizemos que R_λ é o **operador resolvente de T.**

- Por vezes escreveremos apenas R_λ.

Valor regular, conjunto resolvente e espectro

Definição

Considere $T : Dom(T) \subseteq \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ um operador linear. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma valor regular de T se valem as seguintes condições:

(R1) existe R_λ;

(R2) R_λ é limitado;

(R3) R_λ está definido num subespaço denso de $\mathcal{N}$.

Introduz-se também os conjuntos

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{ é valor regular de } T\}$$

e

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T),$$

chamados de **conjunto resolvente** de T e **espectro** de T, respectivamente.

Classificação espectral

Definição

O espectro $\sigma(T)$ de um operador linear $T : Dom(T) \subseteq \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ dividi-se (de forma disjunta) em:

(A) Espectro pontual (cujos elementos são ditos autovalores):

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \text{ não existe } R_\lambda\}.$$

(B) Espectro contínuo:

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \text{ vale (R1) e (R3), mas não vale (R2) }\}.$$

(C) Espectro residual:

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \text{ vale (R1), mas não vale (R3) }\}.$$

UMA TABELA DE CLASSIFICAÇÃO

Satisfaz	Não satisfaz	$\lambda \in \cdots$
R1 R2 R3		$\rho(T)$
	R1	$\rho_p(T)$
R1 R3	R2	$\sigma_c(T)$
R1	R3	$\sigma_r(T)$

IMPORTANTE:

- Podemos ter $\sigma(T) \neq \sigma_p(T)$!

Operadores limitados em espaços de Banach

Lema

Sejam $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ linear e $\lambda \in \rho(T)$. Se vale uma das seguintes propriedades,

(i) T é fechado, ou

(ii) T é limitado,

então $R_\lambda(T)$ está definido em todo espaço $\mathcal{B}$ e é limitado.

Observação

Note então que se $T \in B(\mathcal{B})$ e $T_\lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ é bijetor, então $R_\lambda(T) \in B(\mathcal{B})$.

Resolvente

Teorema (Resolvente fechado)

Se $T \in B(\mathcal{B})$, então $\rho(T)$ é aberto e, consequentemente, $\sigma(T)$ é fechado.

Teorema (Rrepresentação do resolvente)

Sejam $T \in B(\mathcal{B})$ e $\lambda_0 \in \rho(T)$. Então, para qualquer λ pertencente ao disco aberto

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|},$$

vale a identidade

$$R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1},$$

sendo está série convergente em $B(\mathcal{B})$.

Teorema

Se $T \in B(\mathcal{B})$, então $\sigma(T)$ é compacto e vale

$$\sigma(T) \subset D_{\|T\|}(0) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < \|T\|\}.$$

Raio espectral

Teorema

Sejam $T \in B(\mathcal{B})$ e $r_\sigma(T)$ seu raio espectral, isto é,

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Vale que

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|.$$

Equação resolvente e comutatividade

- Dados $T, S \in B(\mathcal{B})$ defini-se

$$[T, S] = T \circ S - S \circ T.$$

- Em particular, diremos que T e S comutam se $[T, S] = 0$.

Teorema

Sejam $T \in B(\mathcal{B})$ e $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Então, temos as seguintes propriedades:

(a) $R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu \circ R_\lambda$.

(b) R_μ comuta com qualquer $S \in B(\mathcal{B})$ que comute com T.

(b) R_μ comuta com R_λ.