# MATE-7007
# Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

## 12 de Janeiro

Aula de hoje: Topologia dos espaços métricos

- Conjuntos abertos, fechados e funções contínuas.
- Sequências convergentes e de Cauchy.
- Compacidade
- Espaços métricos completos
- Teorema do Ponto fixo de Banach para contrações.

# MÉTRICA

## DEFINIÇÃO (MÉTRICA)

Seja $M$ um conjunto. Uma métrica (ou distância) em $M$ é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(D1) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$.

(D1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M$. (Simetria)

(D4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M$. (Desigualdade Triangular)

- Um conjunto $M$ munido de uma métrica $d$ é chamado de *Espaço Métrico* e quando seja necessário este será denotado por $(M, d)$.

## Espaços normados

### Definição (Norma)

Uma norma num espaço vetorial $V$ é uma função $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0, \ \forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\mathcal{N}(\lambda \cdot x) = |\lambda|\mathcal{N}(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;

(N3) $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y), \ \forall x, y \in V$.

- O par $(V, \mathcal{N})$ é dito ser um *espaço normado*. Por vezes, utilizaremos a notação $\mathcal{N}(x) = \|x\|_{\mathcal{N}}$.
- 
- Num espaço normado $(V, \mathcal{N})$ tem-se a métrica (induzida por $\mathcal{N}$):

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\mathcal{N}}$$

# Espaços com produto interno

## Definição (Produto interno)

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um produto interno em $\mathcal{V}$ é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $\langle x, x \rangle \neq 0$, para todo $x \neq 0$,

(P2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in \mathcal{V}$,

(P3) $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle y, w \rangle$, para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Um espaço vetorial $\mathcal{V}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamado de *Espaço com produto interno* e quando necessário usaremos a notação $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- Em $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sempre iremos considerar a norma induzida:

$$\mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

- Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$, para todo $x, y \in \mathcal{V}$. A igualdade é válida se, e somente se, $\{x, y\}$ é l.d.

## Bolas

### Definição

Considere $(M,d)$ um espaço métrico e $A \subset M$.

- Dados $x_0 \in M$ e $r > 0$ definimos os conjuntos:

$$\begin{aligned} B_r(x_0) &= \{x \in M;\ d(x,x_0) < r\} \ \ \text{(bola aberta)} \\ \overline{B}_r(x_0) &= \{x \in M;\ d(x,x_0) \leq r\} \ \ \text{(bola fechada)} \\ \mathbb{S}_r(x_0) &= \{x \in M;\ d(x,x_0) = r\} \ \ \text{(esfera)} \end{aligned}$$

- Um ponto $x_0 \in M$ é dito ponto interior de $A$ se existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subset A$.
- O conjunto dos pontos interiores de $A$ será denotado por $int(A)$.
- Dizemos que $A$ é um conjunto aberto se $A = int(A)$.
- Um subconjunto $F \subset M$ é dito fechado se $F^C = X/F$ é aberto.

## ALGUMAS OBSERVAÇÕES

- Note que $int(A) \subset A$.
- Uma vizinhança de um ponto $x_0 \in M$ é um conjunto aberto $V$ tal que $x_0 \in V$.
- Dados $x, y \in M$, com $x \neq y$, existem $r, s > 0$ tais que
$$B_r(x) \cap B_s(y) = \emptyset.$$
- Toda bola aberta é um conjunto aberto.
- Se $X \subset M$, então os conjuntos abertos de $X$, com respeito a topologia induzida, não são (em geral) abertos em $M$.

Exercício: Quais são os conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados num espaço métrico?

## Topologia métrica

### Teorema

Seja $(M, d)$ um espaço métrico, então:

(a) Os conjuntos $M$ e $\emptyset$ são abertos.

(b) A interseção de um número finito de conjuntos abertos é aberto.

(c) A união de uma coleção arbitrária de conjuntos abertos é aberto.

- A coleção $\Omega$ de todos os abertos de $M$ define uma topologia neste espaço chamada de *topologia métrica*. Em particular, tal topologia é Hausdorff.

# Ponto de acumulação

## Definição

Considere $(M, d)$ um espaço métrico e $A \subset M$.

(a) Dizemos que $p \in M$ é um ponto aderente ao conjunto $A$ se

$$B_\epsilon(p) \cap A \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0.$$

(b) O conjunto dos pontos aderentes ao $A$ é chamado de fecho de $A$ e denotado por $\overline{A}$.

(c) Dizemos que $p \in M$ é um ponto de acumulação do conjunto $A$ se

$$B_\epsilon(p) \cap (A \setminus \{p\}) \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0.$$

(d) O conjunto dos pontos de acumulação $A$ é chamado de **derivado** de A e denotado por $A'$.

Exercício: Um conjunto $F$ é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.

# SEPARABILIDADE

## DEFINIÇÃO

Seja $(M, d)$ um espaço métrico.

(a) Dizemos que $A \subset M$ é denso em $M$ se $\overline{A} = M$.

(b) Dizemos que $M$ é separável se admite um subconjunto denso contável (contável = finito ou enumerável).

## EXEMPLOS

(a) $\mathbb{R}$ é separável, pois $\mathbb{Q}$ é um subconjunto denso enumerável em $\mathbb{R}$.

(b) $\ell^p$ é separável para todo $p \geq 1$.

(c) $\ell^\infty$ não é separável.

Exercício: Obtenha uma condição necessária e suficiente para um espaço métrico com a métrica 0-1 ser separável.

# Funções contínuas

## Definição

Sejam $(M, d_M)$ e $(N, d_N)$ dois espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que $f$ é contínua num ponto $p \in M$ se: dado $\epsilon > 0$ existir $\delta = \delta(\epsilon, p)$ tais que

$$d_M(x, p) \leq \delta \Longrightarrow d_N(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

- Diremos que $f$ é **contínua em** $M$ (ou apenas contínua) quando for contínua em todos os pontos de $M$.

## Teorema

Sejam $(M, d_M)$ e $(N, d_N)$ dois espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $f$ é contínua;

(b) dado qualquer aberto $Y \subset N$, tem-se que $f^{-1}(Y)$ é um aberto de $M$.

## Sequência convergente

Dizemos que uma sequência $\{x_n\} \subset M$ converge para $x \in M$ se: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B_\epsilon(x), \ \forall n \geq n_0.$$

- Utilizaremos a notação

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \text{ ou simplesmente, } x_n \to x.$$

- Exercício: Se $x_n \to x$ e $x_n \to y$, então $x = y$.

## Sequência de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\} \subset M$ é de Cauchy se: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \implies d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

## Algumas observações (Exercício)

- Toda sequência convergente é de Cauchy. A recíproca, em geral, não é verdadeira.
- Toda sequência de Cauchy é limitada.
- Sejam $x_0 \in M$ e $A \subset M$. Então, $x_0 \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma sequência $\{x_n\} \subset A$ tal que $x_n \to x_0$.
- $F \subset M$ é fechado se, e somente se, toda sequência $\{x_n\} \subset F$ convergente convergir para um ponto de $F$.
- Sejam $M$ e $N$ espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Então, $f$ é contínua em $p \in M$ se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\}$ em $M$ que converge para $p$ tem-se que $\{f(x_n)\}$ converge para $f(p)$ em $N$.

Exercício: Função contínua manda sequência de Cauchy em sequência de Cauchy?

### Definição (Compacidade)

Um subconjunto $K$ do espaço métrico $M$ é dito compacto, se toda sequência $\{x_n\}$ em $K$ possui uma subsequência convergente para algum elemento de $K$.

### Teorema

Seja $f : M \to N$ uma função contínua.

(a) Se $K \subseteq M$ é compacto, então $f(K)$ é compacto.

(b) Se $N = \mathbb{R}$ e $K \subseteq M$ é compacto, então existe $x_0 \in K$ tal que

$$|f(x)| \leq |f(x_0)|, \quad \forall x \in K.$$

### Teorema

Todo subconjunto compacto em um espaço métrico é limitado e fechado

- **Muito importante:** Não vale a volta!

## Espaço métrico completo

### Definição

Um espaço métrico $M$ é dito completo se toda sequência de Cauchy é convergente. Em particular:

- Um espaço normado completo é dito *Espaço de Banach*
- Um espaço com produto interno completo é dito *Espaço de Hilbert*

### Exemplos

(a) $\mathbb{K}^n$ é completo.

(b) Todo espaço normado de dimensão finita é Banach.

(c) Todo espaço de dimensão finita com produto interno é Hilbert.

(d) $\ell^p$ é Banach $(1 \leq p \leq \infty)$.

(e) O espaço $C[a,b]$ não é Banach em relação a norma $\|f\| = \int_a^b |f(t)|dt$.

(f) Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo.

### Teorema (Ponto de fixo de Banach para contrações)

Seja $(M, d)$ um espaço métrico completo. Se $f : M \to M$ é uma contração, isto é, existe $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

então $f$ tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $\hat{x} \in M$ tal que $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

## Aplicação: Existência e unicidade para alguns P.V.I's

- Para $r > 0$ consideremos o intervalo $I_r(t_0) = [t_0 - r, t_0 + r]$ e o retângulo $R = I_a(t_0) \times I_b(x_0)$, $a, b > 0$.

### Teorema

Seja $f : R \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $R$ e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe $K > 0$ tal que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in I_b(x_0),\ t \in I_a(t_0).$$

Nestas condições, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tem uma única solução em algum subintervalo de $I_a(t_0)$.

## DEMONSTRAÇÃO:

- Considere $0 < \alpha < \min\{a, b/M, 1/K\}$, sendo $M = \sup\{|f(t,x)| : (t,x) \in R\}$.
- Seja $\mathcal{F}$ o espaço **métrico completo** $C(I_\alpha(t_0), I_b(x_0))$ com sua norma usual

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in I_\alpha(t_0)} |x(t)|.$$

### AFIRMAÇÃO:

O operador

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad x \in C(I_\alpha(t_0), I_b(x_0)).$$

é uma contração $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.