MATE-7007
Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

17 de Janeiro

Aula de hoje: Espaços normados - Completamento

- Completamento de espaços métricos.

MÉTRICA

DEFINIÇÃO (MÉTRICA)

Seja M um conjunto. Uma métrica (ou distância) em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(D1) $d(x,y) \geq 0, \ \forall x,y \in M$.

(D1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(D3) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x,y \in M$. (Simetria)

(D4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x,y,z \in M$. (Desigualdade Triangular)

- Um conjunto M munido de uma métrica d é chamado de *Espaço Métrico* e quando seja necessário este será denotado por (M,d).

Espaços normados

Definição (Norma)

Uma norma num espaço vetorial V é uma função $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0,\ \forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\mathcal{N}(\lambda \cdot x) = |\lambda|\mathcal{N}(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;

(N3) $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y),\ \forall x, y \in V$.

- O par $(V, \mathcal{N})$ é dito ser um *espaço normado*. Por vezes, utilizaremos a notação $\mathcal{N}(x) = \|x\|_{\mathcal{N}}$.
- Num espaço normado $(V, \mathcal{N})$ tem-se a métrica (induzida por $\mathcal{N}$):

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\mathcal{N}}$$

Espaços com produto interno

Definição (Produto interno)

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um produto interno em $\mathcal{V}$ é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $\langle x, x \rangle \neq 0$, para todo $x \neq 0$,

(P2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in \mathcal{V}$,

(P3) $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle y, w \rangle$, para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Um espaço vetorial $\mathcal{V}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamado de *Espaço com produto interno* e quando necessário usaremos a notação $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- Em $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sempre iremos considerar a norma induzida:

$$\mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

- Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$, para todo $x, y \in \mathcal{V}$. A igualdade é válida se, e somente se, $\{x, y\}$ é l.d.

Sequências convergentes e de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\} \subset M$ converge para $x \in M$ se: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B_\epsilon(x), \; \forall n \geq n_0.$$

Sequência de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\} \subset M$ é de Cauchy se: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \implies d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Definição

Um espaço métrico M é dito completo se toda sequência de Cauchy é convergente. Em particular:

- Um espaço normado completo é dito *Espaço de Banach*
- Um espaço com produto interno completo é dito *Espaço de Hilbert*

Completamento de espaços métricos

Definição:

Sejam (M, d_M), (N, d_N) espaços métricos. Uma isometria de M em N é uma aplicação $T : M \to N$ que preserva distâncias, isto é,

$$d_N(Tx_1, Tx_2) = d_M(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in M.$$

Caso esta aplicação seja sobrejetora dizemos que os espaços M e N são isométricos.

Teorema (Completamento de Espaços Métricos):

Para todo espaço métrico (M, d) existe um espaço métrico completo $(\widehat{M}, \widehat{d})$ tal que M é isométrico com um subespaço denso de $\widehat{M}$. O espaço $\widehat{M}$ é único exceto por isometrias, isto é, se existir outro espaço completo $\widetilde{M}$ que contem um subespaço denso e isométrico com M, então $\widehat{M}$ e $\widetilde{M}$ são isométricos.

Demonstração:

Passos da demonstração:

(A1) Construção de um espaço métrico $(\widehat{M}, \widehat{d})$

(A2) Construção de uma isometria $T : M \to \widehat{M}$, com $\overline{T(M)} = \widehat{M}$.

(A3) Prova da completitude de $\widehat{M}$.

(A4) Unicidade de $\widehat{M}$, exceto por isometrias.

- Utilizaremos continuamente a seguinte desigualdade:

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2), \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in M.$$

- Dizemos que duas sequências de Cauchy em M, $\{x_n\}$ e $\{x_n'\}$, são equivalentes e escrevemos $\{x_n\} \sim \{x_n'\}$ se
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n') = 0.$$
- Consideremos o conjunto das classes de equivalência
$$\widehat{M} = \{\hat{x} = [\{x_n\}] : \{x_n\} \text{ é uma sequencia de Cauchy}\}$$
- Definamos
$$\widehat{d}(\hat{x}, \hat{y}) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n), \quad \hat{x} = [\{x_n\}],\ \hat{y} = [\{y_n\}].$$
- Afirmação: $\widehat{d}$ é uma métrica em $\widehat{M}$.
- Afirmação: A aplicação $T : M \to \widehat{M}$ dada por
$$T(a) = [\{a, a, \ldots\}], \quad a \in M,$$
é uma isometria e $T(M)$ é denso em $\widehat{M}$.

Completamento de espaços normados

Definição:

Sejam X e Y espaços vetoriais.

- Dizemos que a aplicação $T : X \to Y$ é um isomorfismo se T é uma bijeção linear, isto é, é uma função bijetiva tal que $T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Nestas condições os espaços X e Y são ditos isomorfos.
- Dizemos que $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ são isometricamente isomorfos se existe um isomorfismo isométrico entre estes espaços, isto é, se existe um isomorfismo $T : X \to Y$ que preserva normas:
$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Teorema (Completamento de Espaços Normados):

Para todo espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$ existe um espaço normado completo $(\widehat{X}, \|\cdot\|_{\widehat{X}})$ tal que X é isometricamente isomorfo com um subespaço denso de $\widehat{X}$. O espaço $\widehat{X}$ é único exceto por isomorfismos isométricos, isto é, se existir outro espaço completo $\widetilde{X}$ tal que possui um subespaço denso isometricamente isomorfo com X, então $\widetilde{X}$ e $\widehat{X}$ são isometricamente isomorfos.

Completamento de espaços com produto interno

Definição:

Dois espaços com produto interno X e Y são ditos isometricamente isomorfos se existe um isomorfismo $T : X \to Y$ que preserva produtos internos:

$$\langle Tx, Ty \rangle_Y = \langle x, y \rangle_X, \ \forall x, y \in X.$$

Teorema:

Para todo espaço com produto interno X existe um espaço com produto interno completo $\widehat{X}$ tal que X é isometricamente isomorfo com um subespaço denso de $\widehat{X}$. O espaço $\widehat{X}$ é único exceto por isomorfismos isométricos, isto é, se existir outro espaço com produto interno completo $\widetilde{X}$ tal que possui um subespaço denso isometricamente isomorfo com X, então $\widehat{X}$ e $\widetilde{X}$ são isometricamente isomorfos.

Exemplo: $L^p[a,b]$ como completamento de $C[a,b]$

- O espaço $C[a,b]$ não é completo com a norma

$$\|f\|_p := \left\{ \int_a^b |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}, \quad f \in C[a,b].$$

- Podemos definir o espaço $L^p[a,b]$ como o completamento de $C[a,b]$ com esta norma, e neste caso $C[a,b]$ pode ser considerado um subespaço denso de $L^p[a,b]$.
- Em particular, para $p = 2$, a norma $\|\cdot\|_2$ em $C[a,b]$ é induzida pelo produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad f, g \in C[a,b],$$

Assim, $L^2[a,b]$ é um espaço de Hilbert que é o completamento $C[a,b]$, com respeito ao produto interno acima.