MATE-7007
Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

19 de Janeiro

Aula de hoje: Espaços normados - Operadores lineares

- Dimensão e base
- Operadores lineares limitados

Espaços normados

Definição (Norma)

Uma norma num espaço vetorial V é uma função $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0,\ \forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\mathcal{N}(\lambda \cdot x) = |\lambda|\mathcal{N}(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;

(N3) $\mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y),\ \forall x, y \in V$.

- O par $(V, \mathcal{N})$ é dito ser um *espaço normado*. Por vezes, utilizaremos a notação $\mathcal{N}(x) = \|x\|_{\mathcal{N}}$.
- Num espaço normado $(V, \mathcal{N})$ tem-se a métrica (induzida por $\mathcal{N}$):

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\mathcal{N}}.$$

- Um espaço normado completo é dito *espaço de Banach*.

Definição

Considere $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

- Um subconjunto (não vazio) $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ é dito subespaço vetorial se: $\alpha\xi + \eta \in \mathcal{W}$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e para todo $\xi, \eta \in \mathcal{W}$.
- Um vetor $\xi \in \mathcal{V}$ é dito uma combinação linear de elementos de $A \subseteq \mathcal{V}$ se existem $\xi_1, \ldots, \xi_n \in A$ e escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $\xi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j$.
- Dado $A \subset \mathcal{V}$ defini-se o subespaço

$$Ger(A) = \{\xi \in \mathcal{V};\ \xi \text{ é combinação linear (finita) de elementos de } A\}.$$

- Dizemos que os vetores $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ em $\mathcal{V}$ são linearmente dependentes (L.D.), se existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ não simultaneamente nulos tais que $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \xi_j = 0$. Por outro lado, se $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \xi_j = 0$ implicar em $\alpha_j = 0$, para cada j, então dizemos que tais vetores são linearmente independentes (L.I.).
- Um subconjunto A de $\mathcal{V}$ é dito linearmente independente, se qualquer coleção finita de elementos de A é linearmente independente.
- Uma base de Hamel do espaço vetorial $\mathcal{V}$ é um subconjunto linearmente independente $\mathcal{E}$ tal que

$$Ger(\mathcal{E}) = \mathcal{V}.$$

Exemplos

Teorema

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial. Então:

(a) $\mathcal{V}$ tem uma base de Hamel.

(b) Todas as bases de $\mathcal{V}$ tem a mesma cardinalidade.

(c) Todo conjunto linearmente independente em $\mathcal{V}$ pode ser completada para formar uma base.

- Considere $\mathcal{P}$ o espaço vetorial dos polinômios $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O conjunto

$$\mathcal{E} = \{p_j(t) = t^j,\ j \in \mathbb{N}_0\}$$

é uma base de Hamel em $\mathcal{P}$.

Séries

Definição

Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado e $\{\xi_j\}_{j\in\ N}$ uma sequência em $\mathcal{N}$.

- Dizemos que a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \xi_j$ converge em $\mathcal{N}$ se a sequência das somas parciais $\{\sum_{j=1}^{n} \xi_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente.
- Dizemos que a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \xi_j$ é absolutamente convergente se a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \|\xi_j\|$ é convergente.

Teorema

Um espaço normado $\mathcal{N}$ é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente em $\mathcal{N}$ é convergente.

Base de Schauder

Definição

Uma base de Schauder num espaço normado $\mathcal{N}$ é uma sequência $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{N}$ satisfazendo a seguinte propriedade: para cada $\xi \in \mathcal{N}$ existe uma **única** sequência $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ tal que

$$\xi = \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j \xi_j \doteq \lim_{j\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j \xi_j.$$

- Exercício: Uma base de Schauder é necessariamente um conjunto L.I.
- Exercício: Todo espaço normado que possui uma base de Schauder é separável.
- Para $1 \leq p < \infty$ temos em ℓ^p a base de Schauder $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, na qual $e_n = \{e_{n,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e

$$e_{n,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \ n = j, \\ 0, & \text{se } \ n \neq j. \end{cases}$$

Normas equivalentes

Definição

Duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ são equivalentes num espaço normado $\mathcal{N}$ se existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tal que

$$c_1\|x\|_0 \leq \|x\| \leq c_2\|x\|_0, \quad \forall x \in \mathcal{N}.$$

Teorema

Seja $\mathcal{N}$ um espaço de dimensão finita.

(a) Todas as normas definidas em $\mathcal{N}$ são equivalentes.

(b) $\mathcal{N}$ é completo com qualquer norma.

(c) Qualquer subconjunto fechado e limitado de $\mathcal{N}$ é compacto.

Lema de Riesz

Lema (de Riesz)

Seja $\mathcal{W}$ um subespaço próprio e fechado de uma espaço normado $\mathcal{N}$. Então, para cada $\theta \in]0,1[$ existe $\xi_\theta \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{W}$ com $\|\xi_\theta\| = 1$ tal que

$$\inf_{\eta \in \mathcal{W}} \|\xi_\theta - \eta\| \geq \theta.$$

Teorema

Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado. A bola fechada $\overline{B}_1(0)$ é compacta se, e somente se, $\mathcal{N}$ tem dimensão finita.

Operadores lineares

Definição

Um operador linear (transformação linear) entre dois espaços vetoriais X e Y é uma função $T : X \to Y$ tal que

$$T(\alpha\xi + \eta) = \alpha T(\xi) + T(\eta), \ \forall \xi, \eta \in X, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

- Note que $T(0) = 0$.
- O conjunto de todas as transformações lineares $T : X \to Y$ é um espaço vetorial, com as operações usuais.

Teorema

Seja $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear entre espaços normados. São equivalentes:

(a) $\sup_{\|\eta\|_1 \leq 1} \|T\eta\|_2 < \infty$.

(b) Existe $C > 0$ tal que $\|T\xi\|_2 \leq C\|\xi\|_1$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$.

(c) T é uniformemente contínuo.

(d) T é contínuo.

(e) T é contínuo em 0.

Operadores lineares limitados

Definição

- Um operador linear contínuo é também chamado de limitado.
- O espaço dos operadores lineares limitados $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ será denotado por $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. No caso $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$, escreve-se apenas $B(\mathcal{N})$.
- Note que $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço vetorial munido das operações usuais.

Exemplos

- Se $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é linear e $dim(\mathcal{N}_1) < \infty$, então T é limitado.
- O operador integral $T : C[0,1] \to C[0,1]$ dado por

$$(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\, ds,$$

  é um operador limitado.
- O operador derivada $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$, dado por $Tx = x'$ é linear, mas não é limitado.