MATE-7007
Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

24 de Janeiro

Aula de hoje: Operadores lineares limitados

- Operadores lineares limitados
- Espaço dual

Espaços normados

Definição (Norma)

Uma norma num espaço vetorial V é uma função $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0, \ \forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\mathcal{N}(\lambda \cdot x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;

(N3) $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y), \ \forall x, y \in V$.

- O par $(V, \mathcal{N})$ é dito ser um *espaço normado*. Por vezes, utilizaremos a notação $\mathcal{N}(x) = \|x\|_{\mathcal{N}}$.
- Num espaço normado $(V, \mathcal{N})$ tem-se a métrica (induzida por $\mathcal{N}$):

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\mathcal{N}}.$$

- Um espaço normado completo é dito *espaço de Banach*.

Definição

Um operador linear (transformação linear) entre dois espaços vetoriais X e Y é uma função $T : X \to Y$ tal que $T(\alpha\xi + \eta) = \alpha T(\xi) + T(\eta)$, $\forall \xi, \eta \in X$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Teorema

Seja $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear entre espaços normados. São equivalentes:

(a) $\sup_{\|\eta\|_1 \leq 1} \|T\eta\|_2 < \infty$.

(b) Existe $C > 0$ tal que $\|T\xi\|_2 \leq C\|\xi\|_1$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$.

(c) T é uniformemente contínuo.

(d) T é contínuo.

(e) T é contínuo em 0.

Definição

- Um operador linear contínuo é também chamado de limitado.
- O espaço dos operadores lineares limitados $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ será denotado por $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. No caso $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$, escreve-se apenas $B(\mathcal{N})$.
- Note que $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço vetorial munido das operações usuais.

O ESPAÇO $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$

TEOREMA

Para cada $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ defina

$$\|T\|_{B(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)} = \sup_{\eta \neq 0} \frac{\|T\eta\|_2}{\|\eta\|_1}.$$

(a) $\|\cdot\|_{B(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)}$ é uma norma em $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.

(b) Valem as igualdades

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \inf_{\eta \in \mathcal{N}_1} \{C > 0;\ \|T\eta\|_2 \leq C\|\eta\|_1\}.$$

(c) Se $\mathcal{N}_2$ é um espaço de Banach, então $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é Banach.

TEOREMA (EXTENSÃO CONTÍNUA)

Sejam $T : W \to \mathcal{B}$ um operador linear limitado, no qual $W \subset \mathcal{N}$ é um subespaço denso. Nestas condições T possui uma única extensão $\widetilde{T} \in B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$. Além disso, temos $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.

EXEMPLOS

- O operador integral $T : C[0,1] \to C[0,1]$ dado por
$$(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\, ds,$$
é um operador limitado e $\|T\| = 1$.
- Considere $J = [0,1]$, $R = J \times J$ e $\kappa : R \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O operador linear $T : C[0,1] \to C[0,1]$, dado por
$$(Tx)(t) = \int_0^1 x(s)\kappa(t,s)\, ds$$
é contínuo.
- Considere $T : C[-1,1] \to \mathbb{K}$, dado por $Tf = f(0)$, e assuma $C[-1,1]$ munido da norma da integral. Neste caso, T não é limitado.

Espaço dual

Definição

Se $\mathcal{N}$ é um espaço normado, então o espaço de Banach $B(\mathcal{N}, \mathbb{K})$ será denotado por $\mathcal{N}^*$ e será chamado de **espaço dual** de $\mathcal{N}$. Cada elemento de $\mathcal{N}^*$ é dito um **funcional linear contínuo**.

Exemplos

- O funcional linear $f : C[a,b] \to \mathbb{K}$ dado por

$$f(x) = \int_a^b x(s)\, ds,$$

  pertence a $C[a,b]^*$.
- O dual de $\mathbb{R}^n$ é $\mathbb{R}^n$.
- O dual de ℓ^1 é ℓ^∞.
- Para $1 < p < \infty$, o dual de ℓ^p é ℓ^q, sendo $1/p + 1/q = 1$.