MATE-7007
Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

26 de Janeiro

Aula de hoje: Espaços de Hilbert

- Ortogonalidade
- Projeção ortogonal
- Desigualdade de Bessel

Espaço de Hilbert

Definição (Produto interno)

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um produto interno em $\mathcal{V}$ é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $\langle x, x \rangle \neq 0$, para todo $x \neq 0$,

(P2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in \mathcal{V}$,

(P3) $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle y, w \rangle$, para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Um espaço vetorial $\mathcal{V}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamado de *Espaço com produto interno* e quando necessário usaremos a notação $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- Em $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sempre iremos considerar a norma induzida; $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Em particular, um espaço com produto interno completo é dito *Espaço de Hilbert*.

Ortogonalidade

Definição

Seja $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno.

- Dizemos que dois vetores $x, y \in \mathcal{V}$ são ortogonais se $\langle x, y\rangle = 0$. Neste caso, escrevemos $x \perp y$.
- Um vetor x é ortogonal a um subconjunto $A \subset \mathcal{V}$ se $x \perp a$, para todo $a \in A$.
- Um conjunto $A \subset \mathcal{V}$ é dito ortogonal se $x \perp y$, para todo $x, y \in A$, com $x \neq y$. Se, além disso, tivermos $\|x\| = 1$, para todo $x \in A$, então dizemos que A é ortonormal.
- Dados dois conjuntos $A, B \subset \mathcal{V}$ escrevemos $A \perp B$ se $x \perp y$, para todo $x \in A$ e para todo $y \in B$. Se A e B são subespaços, então diremos que eles são ortogonais.
- Dado $A \subset \mathcal{V}$, defini-se o complemento ortogonal de A pondo

$$A^{\perp} = \{x \in \mathcal{V};\ x \perp y,\ \forall y \in A\}.$$

Algumas observações

Seja $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno

- Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são duas sequências que convergem para x e y, respectivamente. Então
$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle.$$
- Se x e y são ambos não nulos e $x \perp y$, então $\{x, y\}$ é L.I.
- Todo conjunto ortogonal A, que não contém o vetor nulo, é L.I.
- Se $x \perp y$, para todo $y \in \mathcal{V}$, então $x = 0$.
- Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto ortogonal. Então:
$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \text{ (Pitágoras)}$$
- Se A é um subconjunto ortogonal de vetores não nulos, temos que $B = \{x/\|x\| : x \in A\}$ é um subconjunto ortonormal e $\mathrm{Ger}(B) = \mathrm{Ger}(A)$.

Complemento ortogonal

Teorema

Seja M, N subconjuntos de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$. Então, as seguintes afirmações são válidas

(a) $M^\perp$ sempre é um subespaço vetorial fechado de $\mathbb{X}$.

(b) Se $M \subseteq N$, então $M^\perp \supseteq N^\perp$.

(c) $M \subseteq M^{\perp\perp}$ onde $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$.

(d) $M^\perp = \left[\mathrm{Ger}(M)\right]^\perp = \left[\overline{\mathrm{Ger}(M)}\right]^\perp$.

Exemplos

- Em ℓ^2 temos o conjunto ortonormal $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.
- Consideremos o espaço $C[-\pi, \pi]$ com o produto interno

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)\, dt.$$

Então o conjunto $A = \{x_n(t) = \sin(nt) : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortogonal. Uma vez que $\|x_n\|^2 = \pi$, então o conjunto $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$ é um conjunto ortonormal.

Minimizante

Definição

Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial.

- Um segmento ligando dois vetores $x, y \in \mathbb{X}$ é o conjunto

$$[x, y] \doteq \{z \in \mathbb{X};\ z = \alpha x + (1-\alpha)y,\ 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

- Um conjunto $M \subset \mathbb{X}$ é dito convexo se para quaisquer $x, y \in M$ tivermos $[x, y] \subset M$.

Teorema (Projeção Ortogonal)

Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno e $M \neq \emptyset$ um subconjunto convexo e completo (com a métrica induzida pelo produto interno). Então, para cada $x \in \mathbb{X}$ existe um único $y_x \in M$ tal que

$$\|x - y_x\| = \inf\{\|x - y\|,\ y \in M\}.$$

- A norma $\|\cdot\|$ num espaço normado $\mathcal{N}$ é induzida por um produto interno se, e somente se, ela satisfaz a identidade

$$\|\xi + \eta\|^2 + \|\xi - \eta\|^2 = 2\|\xi\|^2 + 2\|\eta\|^2,\ \forall \xi, \eta \in \mathcal{N}.$$

Projeção ortogonal

Definição

Seja M um subconjunto convexo, completo e não vazio do espaço com produto interno $\mathbb{X}$. Definimos o *Operador Projeção Ortogonal de* $\mathbb{X}$ *sobre* M, à aplicação $P = P_M : \mathbb{X} \to M$ definida por $Px = y_x$ onde y_x é do teorema anterior. Isto é, para cada $x \in \mathbb{X}$, Px é o único elemento em M tal que

$$\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

- Note que $Px = x$ para todo $x \in M$.

Teorema

Sejam W é um subespaço vetorial completo de $\mathbb{X}$ e $P = P_W$ o operador projeção ortogonal sobre W. Então, para cada $x \in \mathbb{X}$ temos que Px é o único elemento de W tal que $x - Px \perp W$.

Observação

- Note que se W é um subespaço de dimensão finita, então fixada uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_m\}$ de W temos que

$$Px = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Exemplo

Consideremos $W = \mathrm{Ger}\{e_1, \dots, e_m\}$ onde $e_i = (\delta_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$, então a projeção ortogonal $P : \ell^2 \to W$ é dada por

$$Px = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots), \quad \text{onde } x = (x_n) \in \ell^2.$$

Definição

Dizemos que um espaço vetorial $\mathbb{X}$ é soma direta dos subespaços vetoriais Y e Z, e escrevemos $\mathbb{X} = Y \oplus Z$, se

(a) $X = Y + Z := \{y + z : y \in Y, \ z \in Z\}$.

(b) $Y \cap Z = \{0\}$

Teorema

Se Z é um subespaço vetorial completo de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$, então

$$\mathbb{X} = Z \oplus Z^{\perp}$$

Além disso, $Z = Z^{\perp\perp}$.

Teorema

Seja $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal de $\mathbb{X}$. Então, então para cada $x \in \mathbb{X}$ temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

- Note que $\langle x, e_n\rangle \to 0$, quando $n \to \infty$.
- Se $\mathbb{X}$ é Hilbert, então $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$ é convergente.

Teorema

Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ um conjunto ortonormal de $\mathbb{X}$. Então, então para cada $x \in \mathbb{X}$, o conjunto

$$J = \{\alpha \in \mathcal{I}; \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\}$$

é contável.