MATE-7007
Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

31 de Janeiro

Aula de hoje: Bases de Hilbert e Representação de Funcionais

- Bases de Hilbert
- Representação de Funcionais

Espaço de Hilbert

Definição (Produto interno)

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um produto interno em $\mathcal{V}$ é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $\langle x, x \rangle \neq 0$, para todo $x \neq 0$,

(P2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in \mathcal{V}$,

(P3) $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle y, w \rangle$, para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Um espaço vetorial $\mathcal{V}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamado de *Espaço com produto interno* e quando necessário usaremos a notação $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- Em $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sempre iremos considerar a norma induzida; $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Em particular, um espaço com produto interno completo é dito *Espaço de Hilbert*.

Ortogonalidade

Definição

Seja $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno.

- Dizemos que dois vetores $x, y \in \mathcal{V}$ são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$. Neste caso, escrevemos $x \perp y$.
- Um vetor x é ortogonal a um subconjunto $A \subset \mathcal{V}$ se $x \perp a$, para todo $a \in A$.
- Um conjunto $A \subset \mathcal{V}$ é dito ortogonal se $x \perp y$, para todo $x, y \in A$, com $x \neq y$. Se, além disso, tivermos $||x|| = 1$, para todo $x \in A$, então dizemos que A é ortonormal.
- Dados dois conjuntos $A, B \subset \mathcal{V}$ escrevemos $A \perp B$ se $x \perp y$, para todo $x \in A$ e para todo $y \in B$. Se A e B são subespaços, então diremos que eles são ortogonais.
- Dado $A \subset \mathcal{V}$, defini-se o complemento ortogonal de A pondo

$$A^{\perp} = \{x \in \mathcal{V};\ x \perp y,\ \forall y \in A\}.$$

Algumas observações

Seja $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno

- Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são duas sequências que convergem para x e y, respectivamente. Então
$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle.$$
- Se x e y são ambos não nulos e $x \perp y$, então $\{x, y\}$ é L.I.
- Todo conjunto ortogonal A, que não contém o vetor nulo, é L.I.
- Se $x \perp y$, para todo $y \in \mathcal{V}$, então $x = 0$.
- Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto ortogonal. Então:
$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2 \quad \text{(Pitágoras)}$$
- Se A é um subconjunto ortogonal de vetores não nulos, temos que $B = \{x/\|x\| : x \in A\}$ é um subconjunto ortonormal e $\mathrm{Ger}(B) = \mathrm{Ger}(A)$.

Complemento ortogonal

Teorema

Seja M, N subconjuntos de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$. Então, as seguintes afirmações são válidas

(a) $M^\perp$ sempre é um subespaço vetorial fechado de $\mathbb{X}$.

(b) Se $M \subseteq N$, então $M^\perp \supseteq N^\perp$.

(c) $M \subseteq M^{\perp\perp}$ onde $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$.

(d) $M^\perp = \left[\mathrm{Ger}(M)\right]^\perp = \left[\overline{\mathrm{Ger}(M)}\right]^\perp$.

Definição

Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial.

- Um segmento ligando dois vetores $x, y \in \mathbb{X}$ é o conjunto
$$[x, y] \doteq \{z \in \mathbb{X};\ z = \alpha x + (1 - \alpha)y,\ 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$
- Um conjunto $M \subset \mathbb{X}$ é dito convexo se para quaisquer $x, y \in M$ tivermos $[x, y] \subset M$.

Teorema (Projeção Ortogonal)

Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno e $M \neq \emptyset$ um subconjunto convexo e completo (com a métrica induzida pelo produto interno). Então, para cada $x \in \mathbb{X}$ existe um único $y_x \in M$ tal que
$$\|x - y_x\| = \inf\{\|x - y\|,\ y \in M\}.$$

Definição

Seja M um subconjunto convexo, completo e não vazio do espaço com produto interno $\mathbb{X}$. Definimos o *Operador Projeção Ortogonal de $\mathbb{X}$ sobre M*, à aplicação $P = P_M : \mathbb{X} \to M$ definida por $Px = y_x$ onde y_x é do teorema anterior. Isto é, para cada $x \in \mathbb{X}$, Px é o único elemento em M tal que
$$\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

TEOREMA

Sejam W é um subespaço vetorial completo de $\mathbb{X}$ e $P = P_W$ o operador projeção ortogonal sobre W. Então, para cada $x \in \mathbb{X}$ temos que Px é o único elemento de W tal que $x - Px \perp W$.

DEFINIÇÃO

Dizemos que um espaço vetorial $\mathbb{X}$ é soma direta dos subespaços vetoriais Y e Z, e escrevemos $\mathbb{X} = Y \oplus Z$, se

(a) $X = Y + Z := \{y + z : y \in Y,\ z \in Z\}$.

(b) $Y \cap Z = \{0\}$

TEOREMA

Se Z é um subespaço vetorial completo de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$, então

$$\mathbb{X} = Z \oplus Z^{\perp}$$

Além disso, $Z = Z^{\perp\perp}$.

RELEMBRANDO

- Se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ um conjunto ortonormal de $\mathcal{H}$, então

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

- Em particular, para cada $x \in \mathcal{H}$, o conjunto

$$J = \{\alpha \in \mathcal{I}; \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\}$$

  é contável.
- Cada um dos números $\langle x, e_\alpha\rangle$ será chamado de **coeficiente de Fourier** de x.
- A série

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$$

  é dita **série de Fourier** de x, em relação a $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$.

CONJUNTOS ORTONORMAIS TOTAIS

DEFINIÇÃO

Sejam $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno e $M \subset \mathbb{X}$ um subconjunto.

- Dizemos que M é **total** se $\overline{Ger(M)} = X$, ou seja, $Ger(M)$ é denso em $\mathbb{X}$.
- Dizemos que M é **ortonormal total** se é simultaneamente ortonormal e total.
- Num Hilbert um conjunto **ortonormal total** será chamado de **Base de Hilbert.**

PROPOSIÇÃO

Sejam $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno e $M \subset \mathbb{X}$ um subconjunto.

(a) Se M é total, então $M^{\perp} = \{0\}$.

(b) Se $\mathbb{X}$ é Hilbert e $M^{\perp} = \{0\}$, então M é total.

TEOREMA(IDENTIDADE DE PARSEVAL)

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\beta = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ um conjunto ortonormal. Então, β é uma base se, e somente se,

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |\langle x, \alpha\rangle|^2, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Teorema

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert não trivial.

(a) $\mathcal{H}$ tem uma base de Hilbert.

(b) Todas as bases de Hilbert em $\mathcal{H}$ tem a mesma cardinalidade.

(c) Todo subconjunto ortonormal pode ser estendido a uma base de Hilbert.

Definição

A **dimensão de Hilbert** (ou simplesmente dimensão) de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é definida como a cardinalidade de uma de suas bases ortornormais.

Resumindo

Teorema

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert não trivial e $\beta = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ um conjunto ortonormal. Então as seguintes afirmações são equivalentes

(a) β é base ortotnormal de $\mathcal{H}$.

(b) Se $\xi \in \mathcal{H}$, então a **série de Fourier** de ξ, em relação a base β, converge em $\mathcal{H}$ para ξ (independentemente da ordem na soma), ou seja,

$$\xi = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \langle \xi, e_\alpha \rangle e_\alpha, \ \xi \in \mathcal{H}.$$

(c) Para todo $\xi \in \mathcal{H}$, tem-se

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} |\langle x, \alpha \rangle|^2, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Separabilidade

Teorema

Um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é separável, se e somente se, tem uma base de Hilbert contável.

Teorema

Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert de dimensão infinita e separável, então ele é isometricamente isomorfo com $\ell^2(\mathbb{K})$ onde $\mathbb{K}$ é o corpo de escalares sobre o qual $\mathcal{H}$ esta definido.

Representação de Riesz

Teorema (Representação de Riesz)

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Para cada $f \in \mathcal{H}^*$ existe um único $x_f \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Alem disso, $\|f\|_{\mathcal{H}^*} = \|x_f\|_{\mathcal{H}}$.

Observação

Note que:

- O operador $\Psi : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ dado por $\Psi(f) = x_f$ é uma isometria sobrejetiva.
- A norma em $\mathcal{H}^*$ provém do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^*} = \overline{\langle x_f, x_g \rangle_{\mathcal{H}}}.$$

- Todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{H}^{**}$.