MATE-7007
Análise Funcional - Verão 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

31 de Janeiro

Aula de hoje: Operador adjunto de Hilbert

- Teorema de representação de Riesz para Formas Sesquilineares
- Operador adjunto de Hilbert

Espaço de Hilbert

Definição (Produto interno)

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um produto interno em $\mathcal{V}$ é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $\langle x, x \rangle \neq 0$, para todo $x \neq 0$,

(P2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in \mathcal{V}$,

(P3) $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle y, w \rangle$, para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Um espaço vetorial $\mathcal{V}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamado de *Espaço com produto interno* e quando necessário usaremos a notação $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- Em $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sempre iremos considerar a norma induzida; $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Em particular, um espaço com produto interno completo é dito *Espaço de Hilbert*.

Complemento ortogonal

Teorema

Seja M, N subconjuntos de um espaço com produto interno $\mathbb{X}$. Então, as seguintes afirmações são válidas

(a) $M^{\perp}$ sempre é um subespaço vetorial fechado de $\mathbb{X}$.

(b) Se $M \subseteq N$, então $M^{\perp} \supseteq N^{\perp}$.

(c) $M \subseteq M^{\perp\perp}$ onde $M^{\perp\perp} := (M^{\perp})^{\perp}$.

(d) $M^{\perp} = \left[\mathrm{Ger}(M)\right]^{\perp} = \left[\overline{\mathrm{Ger}(M)}\right]^{\perp}$.

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert não trivial e $\beta = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ um conjunto ortonormal. Então as seguintes afirmações são equivalentes

(a) β é base ortotnormal de $\mathcal{H}$.

(b) Se $\xi \in \mathcal{H}$, então a **série de Fourier** de ξ, em relação a base β, converge em $\mathcal{H}$ para ξ (independentemente da ordem na soma), ou seja,

$$\xi = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \langle \xi, e_\alpha\rangle e_\alpha,\ \xi \in \mathcal{H}.$$

(c) Para todo $\xi \in \mathcal{H}$, tem-se

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |\langle x, \alpha\rangle|^2,\ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Representação de Riesz

Teorema (Representação de Riesz)

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Para cada $f \in \mathcal{H}^*$ existe um único $x_f \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Alem disso, $\|f\|_{\mathcal{H}^*} = \|x_f\|_{\mathcal{H}}$.

Observação

Note que:

- O operador $\Psi : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ dado por $\Psi(f) = x_f$ é uma isometria sobrejetiva.
- A norma em $\mathcal{H}^*$ provém do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^*} = \overline{\langle x_f, x_g \rangle_{\mathcal{H}}}.$$

- Todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{H}^{**}$.

Formas Sesquilineares

Definição

Sejam Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços normados sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$.

- Uma forma sesquilinear sobre $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ é uma aplicação $h : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{K}$ tal que, para todo $x, x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, $y, y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, tem-se

(a) $h(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha h(x_1, y) + h(x_2, y)$, (Linear na primeira componente)

(b) $h(x, \alpha y_1 + y_2) = \bar{\alpha} h(x, y_1) + h(x, y_2)$. (Antilinear na segunda componente)

- Dizemos que a forma sesquilinear é limitada se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|h(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \text{ para todo } x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}.$$

  Neste caso definimos

$$\|h\| := \sup_{x,y\neq 0} \frac{|h(x, y)|}{\|x\|\|y\|},$$

  a qual é chamada de norma de h. Em particular,

$$|h(x, y)| \leq \|h\|\|x\|\|y\|.$$

Representação de Riesz para Formas Sesquilineares

Teorema

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert e $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear limitada. Então existe um único operador linear limitado $S_h : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que

$$h(x, y) = \langle S_h x, y\rangle_2, \ \forall (x, y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2.$$

Alem disso, $\|h\| = \|S_h\|_{B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)}$.

Operador adjunto de Hilbert

Teorema

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert. Dado $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, existe um único $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}_1, \ \forall y \in \mathcal{H}_2.$$

Além disso, $\|T^*\| = \|T\|$.

- O operador T^* acima é dito **adjunto (de Hilbert) de** T.
- Nas condições do teorema acima, temos que $T^{**} \doteq (T^*)^* = T$.

Definição

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in B(\mathcal{H})$. Dizemos que T é:

(a) Normal, se $TT^* = T^*T$.

(b) Autoadjunto, se $T^* = T$.

(c) Unitário, se for bijetivo e $T^* = T^{-1}$.

ALGUMAS CARACTERIZAÇÕES

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert e $T, S \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Então,

(a) $(\alpha T + S)^* = \bar{\alpha} T^* + S^*$

(b) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

(c) Se $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, então $(ST)^* = T^*S^*$

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in B(\mathcal{H})$.

(a) T é normal se, e somente se, $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

(b) Se $\mathcal{H}$ é um espaço complexo, então T é autoadjunto se, e somente se, $\langle Tx, x\rangle$ é real para todo $x \in \mathcal{H}$.

(c) T é unitário se, e somente se, é uma isometria sobrejetiva.

(d) Se $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $B(\mathcal{H})$ de operadores autoadjuntos que converge para T, então T é autoadjunto.