MATE-7007 - Análise Funcional - Verão 2022

Fernando de Ávila Silva

PPGM - UFPR

Primeira prova - 4/02/22

Tempo de resolução: 3 horas e 30 minutos (incluindo o tempo para escanear e enviar as soluções.)

Início: 9:00 Fim: 12:30

(Não irei corrigir provas enviadas após o tempo limite).

Você deve enviar sua prova em um único arquivo no formato PDF para o e-mail fernando.avila@ufpr.br.

- Por favor, coloque no assunto do e-mail "Prova 1-Análise Funcional".
- Não esqueça de colocar seu nome completo na prova, bem como ao nomear o arquivo.

Os critérios de avaliação são:

- Clareza e precisão na argumentação;
- Citação correta de resultados auxiliares;

Observações:

- Resultados provados em sala podem ser utilizados, desde que estes não sejam o objetivo do exercício.
- Mesmo que você não saiba provar um item, elepode ser utilizado para resolver outro item.
- Os símbolos $\mathcal{N}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{H}$ indicam um espaço normado, de Banach e de Hilbert, respectivamente.
- Por $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ denota-se o espaço das transformações lineares limitadas $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$.
  - No caso $\mathcal{N}_2 = \mathbb{K}$, utilizamos a notação $\mathcal{N}^* = B(\mathcal{N}, \mathbb{K})$.
  - Quando $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$, utilizamos a notação $B(\mathcal{N})$.
- Talvez seja útil lembrar que se $0 \leq r < 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1/(1-r)$.

QUESTÕES

Exercício 1 (10 pontos cada item) *Sejam* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ *uma sequência de números reais não negativos e* $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $0 < R \leqslant \infty$, *isto é, converge para* $|z| < R$. *Considere ainda* $A \in B(\mathcal{B})$ *satisfazendo* $\|A\| < R$.

(a) *Mostre que a aplicação*

$$\mathcal{B} \ni \eta \mapsto T\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \eta$$

pertence a $B(\mathcal{B})$.

(b) *Mostre que a sequência* $T_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k$ *converge para* T.

(c) *Supondo* $\|A\| < 1$, *verifique que o operador definido por* $T = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ *pertence a* $B(\mathcal{B})$. *Conclua que* $T = (I - A)^{-1}$ *(aqui* I *indica o operador identidade).*

(d) *Verifique que se* $L \in \mathscr{S}$ *e* $S \in B(\mathcal{B})$ *são tais que*

$$\|L - S\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|},$$

então $S \in \mathscr{S}$.

(e) *Conclua que o conjunto*

$$\mathscr{S} = \{L \in B(\mathcal{B}) \ \ \textit{invertíveis tais que } L^{-1} \in B(\mathcal{B})\}$$

é um aberto em $B(\mathcal{B})$.

Exercício 2 (10 pontos cada item) *Sejam* $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *uma sequência e* x_0 *um vetor num epaço de Hilbert* $\mathcal{H}$. *Dizemos que* $\{x_n\}_{j\in\mathbb{N}}$ *converge* ***fracamente*** *para* x_0 *(notação* $x_n \xrightarrow{w} x_0$*) se*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0), \ \forall f \in \mathcal{H}^*.$$

(a) *Mostre que se* $\{x_n\}_{j\in\mathbb{N}}$ *converge na norma de* $\mathcal{H}$, *então converge fracamente.*

(b) *Mostre que* $x_n \xrightarrow{w} x_0$ *se, e somente se,*

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \textit{tem-se} \quad < x_n, h > \longrightarrow < x_0, h > .$$

(c) *Mostre que se* $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *é ortonormal, então* $e_j \xrightarrow{w} 0$.

Exercício 3 (10 pontos) *Seja* $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *um espaço com produto interno. Mostre que se* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *são duas sequências em* $\mathcal{V}$ *que convergem para* x *e* y, *respectivamente, então*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Exercício 4 (10 pontos) *Seja* k *uma função contínua* $k : [0,1] \to [0,\infty)$. *Mostre que* $T : C[0,1] \to C[0,1]$ *dado por*

$$Tf(t) = \int_0^1 k(t-s)f(s)\,ds, \ \ t \in [0,1],$$

é um operador linear limitado e que $\|T\| = \int_0^1 k(\tau)\,d\tau$. *(Considere em* $C[0,1]$ *a norma do sup.)*