MATE-7007 - Análise Funcional - Verão 2022

Fernando de Ávila Silva

PPGM - UFPR

Segunda prova - 25/02/22

Tempo de resolução: 3 horas e 30 minutos (incluindo o tempo para escanear e enviar as soluções.)

Início: 9:30 Fim: 13:00

(Não irei corrigir provas enviadas após o tempo limite).

Você deve enviar sua prova em um único arquivo no formato PDF para o e-mail fernando.avila@ufpr.br.

- Por favor, coloque no assunto do e-mail "Prova 2-Análise Funcional".
- Não esqueça de colocar seu nome completo na prova, bem como ao nomear o arquivo.

Os critérios de avaliação são:

- Clareza e precisão na argumentação;
- Citação correta de resultados auxiliares;

Observações:

- Resultados provados em sala podem ser utilizados, desde que estes não sejam o objetivo do exercício.
- Mesmo que você não saiba provar um item, elepode ser utilizado para resolver outro item.
- Os símbolos $\mathcal{N}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{H}$ indicam um espaço normado, de Banach e de Hilbert, respectivamente.
- Por $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ denota-se o espaço das transformações lineares limitadas $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$.
  - No caso $\mathcal{N}_2 = \mathbb{K}$, utilizamos a notação $\mathcal{N}^* = B(\mathcal{N}, \mathbb{K})$.
  - Quando $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$, utilizamos a notação $B(\mathcal{N})$.

QUESTÕES

Exercício 1 *Considere $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal. Considere o operador $P_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por*

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j.$$

Mostre que P_n converge pontualmente para I, quando $n \to \infty$, mas que não converge em $B(\mathcal{H})$.

Exercício 2 *Dizemos que $b : \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \to \mathbb{K}$ é uma aplicação bilinear separadamente contínua se as funções*

$$b(\cdot, \eta) : \mathcal{B}_1 \to \mathbb{K} \quad e \quad b(\xi, \cdot) : \mathcal{B}_2 \to \mathbb{K},$$

dadas por

$$\mathcal{B}_1 \ni \xi \mapsto b(\xi, \eta) \quad e \quad \mathcal{B}_2 \ni \xi \mapsto b(\xi, \eta)$$

são lineares e contínuas, para cada $\eta \in \mathcal{B}_2$ e cada $\xi \in \mathcal{B}_1$.

(a) *Mostre que se b é contínua em $(0, 0)$, então o é em $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.*

(b) *Mostre que toda aplicação bilinear separadamente contínua é contínua.*

Dica: *Continuidade via sequências convergentes + Banach-Steinhaus.*

Exercício 3 *Considere $\mathcal{N}$ um espaço normado e as seguintes definições:*

- *$\{x_n\} \subset \mathcal{N}$ converge fracamente para x_0 se $f(x_n) \to f(x_0)$, $\forall f \in \mathcal{N}^*$. Notação $x_n \xrightarrow{w} x_0$;*
- *$\{x_n\} \subset \mathcal{N}$ é dita fracamente de Cauchy se para todo $f \in \mathcal{N}^*$ a sequência $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy;*
- *$\mathcal{N}$ é fracamente completo se toda sequência fracamente de Cauchy converge fracamente em $\mathcal{N}$.*

(a) *Mostre que se $x_n \xrightarrow{w} x_0$ e $y_n \xrightarrow{w} y_0$ então:*

(a1) $x_n + y_n \xrightarrow{w} x_0 + y_0$;
(a2) $\alpha x_n \xrightarrow{w} \alpha x_0$, *para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$.*

(b) *Verifique que se $\{x_n\}$ é* ***fracamente de Cauchy****, então existe $\lim f(x_n)$, para cada $f \in \mathcal{N}^*$.*

(c) *Mostre que se $\mathcal{N}$ é reflexivo, então $\mathcal{N}$ é fracamente completo.*

Exercício 4 *Sejam $\mathcal{B}$ um espaço de Banach, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ subespaços de $\mathcal{B}$ e Considere*

$$T : \mathcal{X} \to \mathcal{B} \quad e \quad S : \mathcal{Y} \to \mathcal{B}, \tag{1}$$

dois operadores lineares e fechados. Dizemos que T é S-limitado se existem $a, b \geqslant 0$ tais que

$$\|Tx\| \leqslant a\|Sx\| + b\|x\|, \ \forall x \in \mathcal{Y}.$$

Sejam T e S lineares e fechados como em (1) e suponha que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(S - \lambda I)^{-1}$ é contínuo em $\mathcal{B}$.

(a) *Mostre que o operador $T \circ (S - \lambda I)^{-1}$ é fechado.*

(b) *Mostre que $T \circ (S - \lambda I)^{-1}$ é contínuo.*

(c) *Conclua que T é S-limitado.*