

LISTA 0: Conjuntos e Funções

1 Conjuntos

Exercício 1 Prove que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Exercício 2 Sejam $A, B \subset E$. Prove que:

$$\begin{aligned}A \cap B = \emptyset &\Leftrightarrow A \subset B^c, \\A \cup B = E &\Leftrightarrow A^c \subset B.\end{aligned}$$

Exercício 3 Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B^c = \emptyset$.

Exercício 4 Dê um exemplo de conjuntos A, B e C tais que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.

Exercício 5 Se $A, X \subset E$ são tais que $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = E$, então $X = A^c$.

Exercício 6 Prove as seguintes afirmações:

$$\begin{aligned}(a) \quad (A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C); & (c) \quad (A - B) \times C &= (A \times C) - (B \times C); \\(b) \quad (A \cap B) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C); & (d) \quad A \subset A', B \subset B' &\Rightarrow A \times B \subset A' \times B';\end{aligned}$$

Exercício 7 Sejam L e M dois conjuntos de índices e duas famílias de conjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$, $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$,

$$\{A_\lambda \cup B_\mu\}_{(\lambda, \mu) \in L \times M} \quad \text{e} \quad \{A_\lambda \cap B_\mu\}_{(\lambda, \mu) \in L \times M}.$$

(a) Exiba um exemplo para o caso em que L e M são finitos;

(b) Exiba um exemplo para o caso em que L e M são infinitos;

(c) Prove as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) &= \bigcup_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\mu) \\ \left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) &= \bigcap_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)\end{aligned}$$

Exercício 8 Seja $\{A_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ uma família de conjuntos com índices em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Exiba uma demonstração, ou um contra-exemplo, para a seguinte igualdade:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,j} \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \right)$$

Exercício 9 Para cada elemento $n \in \mathbb{N}$ defina $A_n = \{(n+1)k, \forall k \in \mathbb{N}\}$.

(a) Determine $A_1 \times A_2$;

(b) Determine

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ e } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Exercício 10 Dada uma sequência de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, considere os conjuntos

$$\limsup A_n \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \text{ e } \liminf A_n \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right).$$

(a) Prove que $\limsup A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A_n para uma infinidade de valores de n ;

(b) Prove que $\liminf A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a todo A_n , salvo para uma quantidade finita de valores de n ;

(c) Prove que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;

(d) Se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n , então

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_n.$$

(e) Se $A_{n+1} \subset A_n$ para todo n , então

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_n.$$

(f) Exiba um exemplo em que $\liminf A_n \neq \limsup A_n$;

2 Funções

Exercício 11 Dados conjuntos A e B , suponha que existam funções injetivas $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$. Prove que existe uma bijeção $h : A \rightarrow B$.

Exercício 12 Considere uma função $f : X \rightarrow Y$. Mostre que f é injetiva se, e somente se, existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f$ é a função identidade de X , ou seja, $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in X$.

Exercício 13 Considere uma função $f : X \rightarrow Y$. Mostre que f é sobrejetiva se, e somente se, existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g$ é a função identidade de Y , ou seja, $(f \circ g)(y) = y, \forall y \in Y$.

Exercício 14 Considere uma função $f : X \rightarrow Y$, conjuntos $A \subset X$ e $B \subset Y$.

(a) Mostre que $f[f^{-1}[B]] \subset B$ e $f^{-1}[f[A]] \supset A$;

(b) Mostre um exemplo onde não vale $f[f^{-1}[B]] = B$, ou $f^{-1}[f[A]] = A$;

(c) Mostre que se f é sobrejetiva, então $f[f^{-1}[B]] = B$.

Exercício 15 Considere um conjunto A e uma coleção de subconjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in M}$, sendo M um conjunto de índices. Dada uma função $f : A \rightarrow B$, mostre que:

(a) $f[\bigcup A_\lambda] = \bigcup f[A_\lambda]$;

(b) $f[\cap A_\lambda] \subset \cap f[A_\lambda]$;

(c) *Obtenha um exemplo em que $f[\cap A_\lambda] \neq \cap f[A_\lambda]$;*

Supondo $\{B_\mu\}_{\mu \in L}$ uma coleção de subconjunto de B , para uma família de índices L . Mostre que:

(d) $f^{-1}[\cup B_\mu] = \cup f^{-1}[B_\mu]$;

(f) $f^{-1}[\cap B_\mu] = \cap f^{-1}[B_\mu]$;