Topologia geral

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1: Métricas, Espaços Topológicos e Funções Contínuas

---

1 Métricas

Exercício 1 *Sejam M um espaço métrico e $A \subset M$ um subconjunto não-vazio. Definimos a distância entre um ponto $x \in M$ e o conjunto A por*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a);\ a \in A\}.$$

(a) Se $d(x, A) = 0$, então $x \in A$?

(b) Mostre que
$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y),\ \forall x, y \in M;$$

(c) Mostre que
$$|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y),\ \forall x, y, z \in M.$$

O que isso quer dizer geometricamente?

Exercício 2 *Considere o conjunto M das funções reais integráveis definidas no intervalo $[a, b]$. Dadas duas funções $f, g \in M$ ponha*
$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \tag{1}$$

(a) Mostre que (1) não define uma métrica.

(b) Qual hipótese poderia ser adicionada as funções de M para tornar (1) uma métrica?

(c) Mostre que a relação
$$f \sim g \doteq d(f, g) = 0. \tag{2}$$
é uma relação de equivalência.

(d) Com respeito a relação definida em (3) considere o espaço quociente $N = M/\sim$. Os elementos de N são os conjuntos $[f] \subset M$, com $f \in M$, definidos por

$$[f] = \{h \in M;\ d(f, h) = 0\}.$$

Mostre que a relação $D : N \times N \to \mathbb{R}$ dada por

$$D([f], [g]) = d(f, g),\ f \in [f] \quad e \quad g \in [g], \tag{3}$$

define uma métrica no espaço quociente $N = M/\sim$. (Não esqueça de provar que, de fato, D é uma função!)

Exercício 3 *Uma função $f : M \to N$ entre espaços métricos é dita uma imersão isométrica se*

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y),\ \forall x, y \in M.$$

Uma isometria é uma imersão sobrejetiva.

(a) Mostre que uma imersão isométrica é necessariamente injetiva;

(b) Mostre que qualquer imersão isométrica define uma isometria $f : M \to f(M)$;

(c) Sejam M um espaço métrico, X um conjunto e $f : X \to M$ uma função injetiva. Mostre que a expressão

$$d_f(x, y) \doteq d_M(f(x), f(y))$$

define uma imersão isométrica

(d) Fixados $a, u \in \mathbb{R}^n$, com $||u|| = 1$, mostre que a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = a+tu$ é uma imersão isométrica. (Considere uma métrica no espaço $\mathbb{R}^n$ induzido por uma norma qualquer).

(e) Seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial formado pelas sequências $x = (x_1, x_2, \ldots)$ com apenas um número finito de termos $x_k \neq 0$. Defina em $\mathbb{R}^\infty$ o produto itnerno $< x, y >= \sum_j x_j y_j$. Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ dada por

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

é uma imersão isométrica mas não é uma isometria;

Exercício 4 *Seja $\Delta = \{(x, x);\ x \in M\}$ a diagonal do produto $M \times M$, onde M é um espaço métrico. Mostre que, se $z = (x, y) \notin \Delta$, então $d(z, \Delta) > 0$.*

Exercício 5 *Dado um espaço métrico M, seja $\Phi(M)$ a coleção de subconjuntos $X \subset M$ que cumprem as seguintes condições:*

(i) X é limitado e não vazio;

(ii) $d(a, X) = 0$ se, e somente se, $a \in X$.

Dados $X, Y \in \Phi(M)$, seja $\rho(X, Y)$ o maior dos números

$$\sup_{x \in X} d(x, Y) \quad e \quad \sup_{y \in Y} d(y, X)$$

Prove que ρ define uma métrica em $\Phi(M)$. (O número $\rho(X, Y)$ é conhecido como a distância de Hausdorff entre os conjuntos X e Y)

Exercício 6 *Seja $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ |x| = 1\}$ a esfera unitária n-dimensional. O Espaço projetivo de dimensão n é o conjunto $\mathbb{P}^n$ cujos elementos são os pares não-ordenados $[x] = \{x, -x\}$, com $x \in \mathbb{S}^n$.*

(i) Mostre que $[x] = [y]$ se, e somente se, $y = -x$.

(ii) Mostre que

$$d([x], [y]) = \min\{|x - y|, |x + y|\}$$

define uma métrica sobre $\mathbb{P}^n$;

(iii) *Mostre que a aplicação natural* $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, *dada por* $\pi(x) = [x]$, *cumpre a condição*

$$d(\pi(x), \pi(y)) \leqslant d(x, y).$$

(iv) *Se* $X \subset \mathbb{S}^n$ *é tal que* $diam(X) \leqslant \sqrt{2}$, *então a restrição de* π *sobre* X *é uma imersão isométrica de* X *em* $\mathbb{P}^n$. *(O diâmetro de um conjunto limitado é o número* $diam(X) = \sup\{d(x, y);\ x, y \in M\}$*);*

Exercício 7 *Uma família* $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de subconjuntos de um espaço métrico* M *chama-se localmente finita quando cada ponto de* M *é centro de uma bola que intersecta apenas um número finito de conjuntos* C_λ.

(i) *Mostre que as bolas de centro* 0 *e raio inteiro em* $\mathbb{R}^n$ *não formam uma família localmente finita, porém seus complementares sim;*

(ii) *Se* $\mathcal{C}$ *é localmente finita, então cada ponto de* M *pertence no máximo, a um número finito de conjuntos* C_λ*;*

(iii) *Seja* $f : M \to N$ *contínua. Se* $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ *é localmente finita em* N, *então* $(f^{-1}(C_\lambda))$ *é localmente finita em* M*;*

Exercício 8 *Considere o conjunto* $\mathcal{F}(X, M)$ *de todas as funções definidas num conjunto arbitrário* X *tomando valores no espaço métrico* M. *Dadas* $f, g \in \mathcal{F}(X, M)$, *defina o valor*

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_M(f(x), g(x)) \tag{4}$$

e a relação

$$f \sim g \doteq d(f, g) < \infty \tag{5}$$

(i) *A expressão* (4) *define uma métrica em* $\mathcal{F}(X, M)$*?*

(ii) *Mostre que* (5) *define uma relação de equivalência em* $\mathcal{F}(X, M)$*;*

(iii) *Fixada* $f \in \mathcal{F}(X, M)$ *denote por* $\mathcal{B}_f(X, M)$ *a classe de* f. *Mostre que*

$$\boldsymbol{d}(g, h) = \sup_{x \in X} d_M(g(x), h(x))$$

define uma métrica em $\mathcal{B}_f(X, M)$.

(iv) *Conclua que* $\mathcal{F}(X, M)$ *se escreve como a reunião de espaços métricos dois a dois disjuntos;*

2 Topologias

Exercício 9 *Sejam* X *um conjunto e* $\mathcal{B}$ *uma base para uma topologia em* $\mathcal{T}$. *Mostre que* $\mathcal{T}$ *é igual a coleção de todas as uniões de elementos de* $\mathcal{B}$*;*

Exercício 10 *Sejam* X *e* Y *dois espaços topológicos e as projeção* $\pi_1 : X \times Y \to X$ *e* $\pi_2 : X \times Y \to Y$.

(i) *Mostre que se* $U \in \mathcal{T}_X$ *e* $V \in \mathcal{T}_Y$, *então* $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ *and* $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$*;*

(ii) *mostre que ambas projeções são aplicações abertas;*

Exercício 11 *Seja* $(M, \mathcal{T})$ *um espaço topológico. Uma coleção* $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ *é dita uma subbase para* $\mathcal{T}$ *se as interseções finitas de membros de* $\mathcal{S}$ *formam uma base para* $\mathcal{T}$*. Utilizando as notaçãoes do exercício acima, mostre que o conjunto*

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U);\ U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V);\ V \in \mathcal{T}_Y\}$$

subbase para a topologia produto de $X \times Y$*.*

Exercício 12 *Mostre que as seguintes priedades são topológicas:*

(i) ser 1*-contável;*

(ii) ser Hausdorff;

Exercício 13 *Mostre que se* $\mathcal{A}$ *é uma base para uma topologia em* X*, então a topologia gerada por* $\mathcal{A}$ *é igual a interceção de todas as topologias de* X *que contém* $\mathcal{A}$*;*

Exercício 14 *Suponha que* $\mathcal{T}_1$ *e* $\mathcal{T}_2$ *são topologias em* X *com* $\mathcal{T}_1$ *estritamente mais fina do que* $\mathcal{T}_2$*. Se* $Y \subset X$*, o que podemos dizer sobre as topologias induzidas em* Y*?*

Exercício 15 *Sejam* X *um espaço topológico e* $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *uma coleção de conjuntos fechados.*

(i) Mostre que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ *é um conjunto fechado; O mesmo vale para a união?*

(ii) Se Y *é outro espaço topológico, mostre que uma função* $f : X \to Y$ *é contínua se, e somente se,* F *fechado em* Y *implica* $f^{-1}(F)$ *fechado em* X*;*

Exercício 16 *Uma coleção* $\mathcal{V}$ *de abertos de um espaço topológico* X *chama-se um sistema fundamental de vizinhanças abertas (SFVA) de um ponto* $x \in X$ *quando:*

(i) todo $V \in \mathcal{V}$ *contém* x*;*

(ii) todo aberto A *em* X *que contém* x *deve conter algum* $V \in \mathcal{V}$*;*

Prove que num espaço métrico, as bolas abertas $B(x, 1/n)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, formam um (SFVA) de* x*.*

Exercício 17 *Considere* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) e considre* $\mathcal{T}$ *uma topologia em* V*. Dizemos que* V *é um espaço vetorial topológico se:*

(i) para cada $x \in V$ *o conjunto* $\{x\}$ *é fechado;*

(ii) as operações $(x, y) \mapsto x + y$ *e* $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ *são contínuas.*

Fixados $a \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$*, mostre que as aplicações* $T_a : V \to V$ *e* $M_\lambda : V \to V$ *dadas por*

$$T_a(x) = a + x \quad e \quad M_\lambda(x) = \lambda \cdot x$$

são homeomorfismos de V *sobre* V*.*

Exercício 18 *Mostre que um espaço topológico* X *é Hausdorff se, e somente se, a diagonal*

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$$

é um subconjunto fechado de $X \times X$*;*

Exercício 19 *Indicaremos por* $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ *o conjunto das funções contínuas* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *munido da topologia fina de Whitney, definida do seguinte modo: dadas* $f \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$ *e uma função contínua positiva* $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, *pomos*

$$B(f, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{W}(\mathbb{R});\ |f(x) - g(x)| < \varepsilon(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Em seguida, declaramos um subconjunto $A \subset \mathcal{W}(\mathbb{R})$ *aberto quando, para toda* $f \in A$, *existe uma função contínua e positiva* $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *tal que* $B(f, \varepsilon) \subset A$. *Mostre que que os abertos assim definidos constituem uma topologia em* $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ *.*

Exercício 20 *Seja* S *um espaço com topologia induzida pela aplicação* $f : S \to X$, *com* X *um espaço topológico.*

(a) *Se* X *é metrizável, então* S *é metrizável se, e somente se* f *é bijetiva;*

(b) *Supondo* X *Hausdorff,* S *é Hausdorff se, e somente se,* f *é bijetiva;*

Exercício 21 *Considere* $M(n)$ *o conjunto das matrizes reais* $n \times n$.

(a) *Obtenha uma correspondência bijetiva entre* $M(n)$ *e* $\mathbb{R}^{n^2}$ *e mostre que* $M(n)$ *é um espaço métrico, através desta correspondência;*

(b) *Mostre que as aplicações* $\det : M(n) \to \mathbb{R}$ *e* $Prod : M(n) \times M(n) \to M(n)$ *são contínuas;*

(c) *o conjunto* $G(n)$ *das matrizes* $A \in M(n)$ *com* $\det(A) \neq 0$ *é aberto;*

(d) *A aplicação* $r : G(n) \to G(n)$ *que a cada* $A \in G(n)$ *associa sua inversa* A^{-1} *é contínua;*

(e) *O conjunto* $O(n)$ *das matrizes ortogonais é compacto;*

(f) $G(n)$ *é conexo. Quais são as (duas) componentes?*

Exercício 22 *Dizemos que um subconjunto* S *de um espaço topológico* X *é denso em* X *se* $\widehat{S} = X$.

(a) *Mostre que um subgrupo aditivo* G *de* $\mathbb{R}$ *é denso em* $\mathbb{R}$ *se, e somente se, zero é ponto de acumulação de* G*;*

(b) *Se o subgrupo* G *de* $\mathbb{R}$ *não for denso, então existe* $a \geqslant 0$ *tal que* $G = \{am,\ m \in \mathbb{Z}\}$*;*

(c) *Mostre que se* θ *é um número irracional, então* $A = \{m + n\theta,\ n.m \in \mathbb{Z}\}$ *é denso em* $\mathbb{R}$*;*

3 Continuidade

Exercício 23 *Mostre que o gráfico de uma função contínua* $f : M \to N$, *entre espaços métricos, é homeomorfo ao domínio de* f. *(Siga os passos abaixo)*

(a) *pondo* $G(f) = \{(x, f(x));\ x \in M\} \subset M \times N$ *considere a função* $\widehat{f}(x) = (x, f(x))$*;*

(b) *obtenha a inversa de* $\widehat{f}$*;*

Como aplicação, mostre que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *é homeomorfo à hipérbole* $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$.

Exercício 24 *Sejam* X *e* Y *dois espaços topológicos. Mostre que as projeções* $\pi_X : X \times Y \to X$ *e* $\pi_Y : X \times Y \to Y$ *são abertas;*

Exercício 25 *Sejam* M, N *espaços métricos e* $f, g : M \to N$ *duas funções.*

(a) *Se ambas são contínuas num ponto $a \in M$ e $f(a) \neq g(a)$. Mostre que existe uma bola aberta B, de centro a, tal que $f(B) \cap g(B) = \emptyset$. Em particular, se $x \in B$ então $f(x) \neq g(x)$.*

(b) *Suponha que f e g são contínuas em M. Dado $a \in M$ suponha que toda bola de cetnro a contenha um ponto x tal que $f(x) = g(x)$. Mostre que $f(a) = g(a)$. Usando este fato, mostre que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e $f(x) = g(x)$ para todo x racional, então $f = g$.*

Exercício 26 *Um grupo metrizável é um espaço métrico G munido de uma estrutura de grupo tal que as operações*

$$m : G \times G \to G,\ m(x,y) = x \cdot y \quad e \quad f : G \to G,\ f(x) = x^{-1}$$

são contínuas. Prove as seguintes afirmações:

(a) *Seja G um espaço métrico com estrutura de grupo. G é um grupo metrizável se, e somente se, a aplicação*

$$q : G \times G \to G,\ q(x,y) = x \cdot y^{-1}$$

é contínua.

(b) *São grupos metrizáveis: o grupo aditivo de um espaço vetorial normado (em particular $\mathbb{R}^n$), o grupo aditivo $\mathbb{S}^1$ dos complexos de módulo 1 e o grupo das matrizes reais $n \times n$ invertíveis.*

(c) *Sejam G e H grupos metrizáveis. Um homomorfismo $f : G \to H$ é contínuo se, e somente se, é contínuo no elementro neutro $e \in G$.*

Exercício 27 *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função.*

(a) *Mostre que f é contínua se, e somente se, a topologia de X é mais fina do que a induzida por f;*

(b) *Se f é contínua e bijetiva, então será um homeomorfismo se, e somente se, a topologia de X coincide com a induzida por f;*

Exercício 28 *Sejam Y um espaço com a topologia trivial e X um espaço topológico qualquer. Mostre que qualquer função $f : X \to Y$ é contínua;*

Exercício 29 *Sejam X um espaço com a topologia discreta e Y um espaço topológico qualquer. Mostre que qualquer função $f : X \to Y$ é contínua;*

Exercício 30 *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Dizemos que f é compatível com uma relação de equivalência $\sim$ em X se $a \sim b$ implica $f(a) = f(b)$.*

(a) *Mostre que f é compatível com $\sim$ se, e somente se, f é constante sobre cada classe de equivalência determinada por $\sim$;*

(b) *Se f é compatível com $\sim$, então existe única função $\overline{f} : X/\sim \to Y$ tal que $\overline{f} \circ \phi = f$, sendo $\phi : X \to X/\sim$ a aplicação quociente;*

(c) *Mostre que $\overline{f}$ é contínua;*

Exercício 31 *Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas do espaço topológico X no espaço topológico Hausdorff Y. Mostre que o conjunto*

$$F = \{x \in X;\ f(x) = g(x)\}$$

é fechado.