Topologia geral

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2 - Parte 2

Exercício 1 *Considere uma função contínua $f : [0,1] \to [0,1]$. Mostre que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$. (tente não usar argumentos de análise)*

Exercício 2 *Para que um espaço X seja conexo é necessário e suficiente que toda aplicação contínua de X num espaço discreto seja constante.*

Exercício 3 *Mostre que X é conexo se, e somente se, para cada par de pontos $x, y \in X$ existe um conexo contendo x e y.*

Exercício 4 *Dizemos que um espaço X é totalmente desconexo quando seus únicos subconjuntos conexos são $\emptyset$ e seus pontos. Considere num espaço X a relação de equivalência $\sim$ cujas classes são as componentes conexas de X.*

(a) Mostre que $X/\sim$ é totalmente desconexo;

(b) Se X for localmente conexo, então a aplicação quociente $\varphi : X \to X/\sim$ é aberta.

(b) Se X for localmente conexo, então $X \to X/\sim$ é discreto.

Exercício 5 *Mostre que uma topologia induzida por uma pseudométrica p é Hausdorff se, e somente se, p é uma métrica.*

Exercício 6 *Assuma que a temperatura na superfície terrestre é uma função contínua. Prove que em qualquer instante de tempo t, sobre qualquer grande círculo, existe dois pontos antípodas com mesma temperatura.*

Exercício 7 *Suponha X um espaço topológico e $\gamma : [0,1] \to X$ contínua. Assuma que γ é localmente injetiva, ou seja, dado $t \in [0,1]$ existe uma vizinhança de t tal que a restrição de γ a V é injeiva. Mostre que, para cada $x \in X$, o seguinte conjunto é finito:*

$$\gamma^{-1}(x) = \{t \in [0,1]\,;\gamma(t) = x\}$$

Exercício 8 *O que é a um-ponto compactificação de $X = (0,1) \cup (2,3)$?*

Exercício 9 *O que é a um-ponto compactificação de $X = \mathbb{R}^2$?*

Exercício 10 *Considere $p\,X \to Y$ uma aplicação quociente. Mosre que se cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$ é conexo e Y é conexo, então X é conexo.*

Exercício 11 *Se $f : X \to Y$ é contínua e X conexo por caminhos, então $f(X)$ é conexo por caminhos?*

Exercício 12 *Se $f : X \to Y$ é contínua e X conexo por caminhos, então $f(X)$ é conexo?*

Exercício 13 *Se $f : X \to Y$ é contínua e X conexo por caminhos, então $f(X)$ é conexo?*

Exercício 14 *Se $f : X \to Y$ é contínua e X localmente compacto, então $f(X)$ localmente compacto?*

Exercício 15 *Se $\{A_\alpha\}$ é uma coleção de conjuntos conexos por caminhos e $\cap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$, então $\cup_\alpha A_\alpha$ é conexos por caminhos ?*

Exercício 16 *Se $A \subset X$ é conexo por caminhos, então $\overline{A}$ é conexo por caminhos?*

Exercício 17 *Se $A \subset X$ é conexo, o que podemos dizer de $int(A)$ e $\partial(A)$?*

Exercício 18 *Dizemos que uma coleção de subconjuntos $\mathcal{C}$ de X tem a propriedade de interceçãio finita (pif) se dada qualquer subcoleção finita $\{C_1, \ldots, C_n\}$ de $\mathcal{C}$ tivermos $\cap_{j=1}^n C_j \neq \emptyset$.*

Seja X um espaço topológico. Mostre que X é compacto se, e somente se, para toda coleção de fechados que satisfazer pif a interceção $\cap_{C \in \mathcal{C}} C$ é não vazia.

Exercício 19 *Mostre que se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo, então U é conexo por caminhos. (Dica: fixado $x_0 \in U$ considere o conjunto A dos pontos que podem ser ligados a x_0 por caminhos contidos em U)*

Exercício 20 *Sejam X e Y espaços localmente compactos e $f : X \to Y$ um homemorfismo. Mostre que f se estende a um homemorfismo sobre a um-ponto compactificação destes espaços.*