Topologia geral

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2 - Parte 1: Espaços compactos e conexos

Exercício 1 *Considere* $(X, \mathcal{T})$ *um espaços topológico e* $B \subset A \subset X$.

(a) *Se* A *é aberto em* X, *então* B *é aberto em* X *se, e somente se, é aberto em* A;

(b) *Se* A *é fechado em* X, *então* B *é fechado em* X *se, e somente se, é fechado em* A;

Exercício 2 *Considere* $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *e as seguintes coleções:*

- $\mathcal{T}_1$ *que contém* $\emptyset$, $\mathbb{N}$ *e os conjuntos da forma* $\{0, 1, \dots, n\}$, *com* $n \in \mathbb{Z}_+$;
- $\mathcal{T}_2$ *que contém* $\emptyset$ *e os conjuntos da forma* $\{n, n+1, \dots\}$, *com* $n \in \mathbb{Z}_+$;

(a) *Mostre que* $\mathcal{T}_1$ *e* $\mathcal{T}_2$ *são topologias em* $\mathbb{Z}_+$;

(b) *Os espaços* $(\mathbb{Z}_+, \mathcal{T}_1)$ *e* $(\mathbb{Z}_+, \mathcal{T}_2)$ *são homemorfos?*

Exercício 3 *Suponha que* X *e* Y *são espaços homeomorfos. Mostre que para qualquer* $x \in X$ *existe* $y \in Y$ *tais que* $X - \{x\}$ *é homeormorfo a* $Y - \{y\}$.

Exercício 4 *Suponha que* X *é 2-contável. Mostre que toda cobertura por abertos de* X *possui subcobertura enumerável.*

Exercício 5 *Considere o espaço* $X = [0, 2] \times \{0\} \cup [0, 2] \times \{1\} \subset \mathbb{R}^2$. *"Cole" os pontos* $(t, 0)$ *e* $(t, 1)$, *para* $t \in [0, 2] - \{1\}$. *Mostre que o espaço quociente não é Hausdorff.*

Exercício 6 *Considere* X *um espaço topológico e assuma* $A = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ *uma partição finita de* X, *ou seja,*

$$X = \cup_{j=1}^{n} X_j, \;\; X_j \cap X_k = \emptyset, \;\; j \neq k.$$

(a) *Mostre que são equivalentes:*

  (i) *Todos os* X_j*'s são abertos;*

  (ii) *Todos os* X_j*'s são fechados;*

(b) *Se cada* X_j *é conexo, então* A *coincide com a partição de* X *em componentes conexas;*

Exercício 7 *Considere o conjunto*

$$C = [0, 1] \cup \left\{ (\frac{1}{n}, y); \;\; y \in [0, 1], \;\; n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}.$$

Mostre que $X = C \cup (0, 1)$ *é conexo, mas não é conexo por caminhos.*

Exercício 8 *Mostre que* $\{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ *é compacto em* $\mathbb{R}$.

Exercício 9 *Mostre que se* $f : X \to Y$ *é uma injeção contínua no Hausdorff* Y, *então* f *é um mergulho.*

Exercício 10 *Verifique que os seguintes pares de espaços não são homeomorfos:*

(a) $\mathbb{S}^1$ *e* $[0, 1)$

(b) $[0, 1)$ *e* $\mathbb{R}$;

(c) $\mathbb{S}^1$ *e* $\mathbb{S}^2$;

(d) $\mathbb{S}^1$ *e um par de círculos tangentes;*

Exercício 11 *Considere um espaço* X *e* $\{x_n\}$ *uma sequência de* X *que converge para* $x \in X$. *Mostre que o conjunto* $A = \{x\} \cup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *é compacto.*

Exercício 12 *Considere* X *um espaço topológico.*

(a) Se $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to X$ *são contínuas e* $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, *mostre que a seguinte função é contínua:*

$$\gamma : [0,1] \to X, \quad \text{com} \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{se} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \gamma_2(2t-1), & \text{se} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

(b) Se $A, B \subset X$ *são disjuntos e conexos por caminhos tais que* $X = A \cup B$, *então* X *é conexo.*

Exercício 13 *Prove que se* X *e* Y *são homeomorfos então possuem o número de componentes conexas.*

Exercício 14 *Suponha* $A, B \subset X$ *compactos.*

(a) Mostre que $A \cup B$ *é compacto.*

(b) Se X *é Hausdorff, enatão* $A \cap B$ *é compacto.*

Exercício 15 *Se* X *é um espaço connected and compact and* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua, mostre que* $f(X) = [M, m]$.

Exercício 16 *Mostre que a fronteira de qualquer compacto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *é compacta.*

Exercício 17 *Para quais conjuntos* X *o espaço* $(X, \mathcal{T}_{co-finita})$ *é compacto?*

Exercício 18 *Sejam* X, Y *epaços topológicos e* $f : X \to Y$ *contínua. Dizemos que* f *é compatível com uma relação de equivalência* E *em* X *quando* xEy *implica em* $f(x) = f(y)$. *Mostre então que existe uma única* $\overline{f} : X/E \to Y$ *tal que* $\overline{f} \circ p = f$, *sendo* p *a aplicação quociente. Mostre que* $\overline{f}$ *é contínua.*

Exercício 19 *Sejam* X *um espaço topológico e* S *um subespaço de* X. *Uma retração* $r : X \to S$ *é uma função contínua de* X *sobre* S *tal que* $r(x) = x$, *para todo* $x \in S$. *Neste caso, dizemos que* S *é um retrato de* X.

(a) um ponto é um retrato do espaço que o contém.

(b) todo retrato de um espaço de Hausdorff é um subconjunto fechado.

(c) *um retrato de um espaço conexo é conexo.*

(d) *o conjunto* $\{0,1\}$ *não é um retrato de* $[0,1]$.

Exercício 20 *Sejam* X *um espaço topológico e* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções contínuas* $f_n : X \to M$, *com* M *espaço métrico. Supondo que* $\{f_n\}$ *converge (ponto a ponto) para* $f : X \to M$ *mostre que* f *é contínua em* x_0 *se, e somente se, para qualquer* $\epsilon > 0$ *existam um* $n_0 \in \mathbb{N}$, *e uma vizinhança* V *de* x_0 *tal que* $d(f_n(x), f(x))| < \epsilon$ *para cada* $x \in V$.

Exercício 21 *Sejam* X, Y *espaços topológicos. Uma aplicação* $f : X \to Y$ *diz-se própria quando é contínua , fechada e, para cada* $y \in Y$, *a imagem inversa* $f^{-1}(y)$ *é compacta.*

(a) f *é própria se, e somente se,* $f(X)$ *é fechado e* $f : X \to f(X)$ *é própria.*

(b) *se* X *é compacto e* Y *Hausdorff, então toda aplicação contínua* $f : X \to Y$ *é própria.*

Exercício 22 *Seja* G *um grupo topológico e dois subconjuntos* $A, B \subset G$. *Defina* $A \cdot B$ *como o conjuntos dos pontos* $a \cdot b$ *para* $a \in A$ *e* $b \in B$. *Considere ainda* A^{-1} *o conjunto dos pontos* a^{-1}, *com* $a \in A$.

(a) *Uma vizinhaça* V *da identidade* e *é dita simétrica se* $V = V^{-1}$. *Considere* U *uma vizinhança de* e. *Mostre que existe uma vizinhança simétrica* V *de* e *tal que* $V \cdot V \subset U$.

(b) *Mostre que* G *é Hausdorff.*

(c) *Mostre que se* A *é um fechado e* $x \notin A$, *então existem abertos disjuntos contendo* A *e* x.

(d) *Seja* G *um grupo topológico conexo. Se uma vizinhança do neutro* e *de* G *possui base enumerável, então* G *tem base enumerável.*

Exercício 23 *Sejam* $\mathcal{T}_1$ *e* $\mathcal{T}_2$ *duas topologias em* X *tais que* $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_1$. *Quais as relações entre os conexos destas topologias? E sobre os compactos?*

Exercício 24 *Considere* $\{A_n\}$ *uma família de conexos,* $n \in \mathbb{N}$. *Mostre que se* $A_n \cap A_{n+1}$ *para cada* n, *então* $\cup_n A_n$ *é conexo.*