Topologia geral

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3

Exercício 1 *Mostre que num espaço regular, um par de pontos distintos possui vizinhanças disjuntas e fechadas.*

Exercício 2 *Mostre que num espaço normal, um par de conjuntos fechados e disjuntos possui vizinhanças cujos fechos são disjuntos.*

Exercício 3 *Seja* $p : X \to Y$ *uma função contínua, fechada e sobrejetiva. Mostre que se* X *é normal, então* Y *é normal.*

Exercício 4 *Seja* $p : X \to Y$ *uma função contínua, fechada e sobrejetiva tal que* $p^{-1}(\{y\})$ *é compacto para cada* $y \in Y$*.*

(a) X *Hausdorff implica* Y *Hausdorff;*

(b) X *regular implica* Y *regular;*

(c) X *localmente compacto implica* Y *localmente compacto;*

Exercício 5 *Mostre que todo subespaço fechado de um espaço normal é também normal;*

Exercício 6 *Considere* X *um espaço compacto e Hausdorff. Mostre que* X *é metrizável se, e somente se, possui base contável.*

Exercício 7 *Um* G_δ *conjunto de um espaço* X *é um conjunto* A *que é igual a interseção contável de abertos de* X*. Mostre que num epaço* T_1 *e 1-contável, todo conjunto* $\{x\}$ *é* G_δ*.*

Exercício 8 *Seja* X *um espaço normal. Mostre que existe uma função* $f : X \to [0,1]$ *contínua, com* $f(x) = 0$ *para* $x \in A$ *e* $f(x) > 0$ *se* $x \notin A$ *se, e somente se,* A *é um conjunto* G_δ *fechado.*

Exercício 9 *Considere* X *um espaço topológico.*

(a) Se X *é* E_1 e $A \subset X$*, então* A *é* E_1*;*

(b) Produto enumerável de E_1 *é* E_1*;*

(c) Se X *é* E_2 e $A \subset X$*, então* A *é* E_2*;*

(d) Produto enumerável de E_2 *é* E_2*;*

Exercício 10 *Produto de espaços regulares é um espaço regular.*