CM 095 - Topologia geral

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Primeira prova - 23/01/17

- Resultados provados em sala podem ser utilizados, desde que estes não sejam o objetivo do exercício. Você deve deixar claro onde está usando cada um destes resultados;

Exercício 1 *Mostre que:*

10 pontos - (a) *se* $(X, \mathcal{T}_X)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *são espaços topológicos Hausdorff, então* $X \times Y$ *é Hausdorff;*

10 pontos - (b) *se* $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ *é uma família de topologias em* X*, então* $\mathcal{T} = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{T}_\alpha$ *define uma topologia em* X*;*

Exercício 2 *Seja* $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico. A fronteira de um subconjunto* $A \subset X$ *é o conjunto*

$$\partial(A) = \overline{A} - int(A).$$

10 pontos - (a) *Mostre que* $x \in \partial(A)$ *se, e somente se, toda vizinhança de* x *possui pontos de* A *e de* A^c*.*

5 pontos - (b) *A função característica de um subconjunto* $S \subset X$ *é a função* $\xi_S : X \to \mathbb{R}$ *defeinida por*

$$\xi_S(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \notin S, \\ 1, & se \quad x \in S. \end{cases}$$

Mostre que os pontos de descontinuidade de ξ_S *são aqueles pertencentes a fronteira de* S*.*

5 pontos - (c) *Considere* $X = \mathbb{R}$ *com a topologia usual e* $\mathbb{Q}$ *o subconjunto dos números racionais. Quais são os pontos de descontinuidade de* $\xi_{\mathbb{Q}}$*?*

Exercício 3 *Uma pseudométrica num conjunto* M *é uma função real* $p : M \times M \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$p(x,x) = 0, \;\; p(x,y) = p(y,x) \geqslant 0 \quad e \quad p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z),$$

para quaisquer $x, y, z \in M$*.*

10 pontos - (a) *Sejam* p *uma pseudométrica num conjunto* M *e dois pontos* $x, y \in M$*. Mostre que a seguinte relação é de equivalência:*

$$x \sim y \doteq p(x,y) = 0. \tag{1}$$

10 pontos - (b) Com respeito a relação definida em (1) considere o espaço quociente $N = M/\sim$. Os elementos de N são os conjuntos $[x] \subset M$, com $x \in M$, definidos por

$$[x] = \{t \in M;\ p(x,t) = 0\}.$$

Mostre que a expressão

$$d([x],[y]) = p(x,y),\ x \in [x] \quad e \quad y \in [y],$$

define uma métrica no espaço quociente $N = M/\sim$. (Não esqueça de provar que, de fato, d é uma função $d : N \times N \to \mathbb{R}$.)

Exercício 4 *Considere as seguintes definições:*

1. *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito **normal** quando para quaisquer conjuntos F e G fechados e disjuntos, existem abertos $U, V \in \mathcal{T}$ tais que $F \subset U$ e $G \subset V$;*

2. *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito **regular** quando dados um aberto $A \in \mathcal{T}$ e $x \in A$, existe um aberto U com $x \in U$ e $\overline{U} \subset A$;*

10 pontos - (a) Mostre que todo espaço métrico é normal.

Dica *dados dois conjuntos fechados e disjuntos F, G, considere a função $\varphi : M \to [0,1]$ dada por*

$$\varphi(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)}.$$

5 pontos - (b) Mostre que se X é regular, então: dados um fechado F de X e $x \notin F$ existem abertos U, V de X tais que $x \in U$, $F \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

5 pontos - (c) Conclua que todo espaço Hausdorff normal X é regular;

Exercício 5 (20 pontos) *Considere os conjuntos*

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ |x| = 1\} \quad e \quad \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$$

como subespaços com respeito a topologia padrão de $\mathbb{R}^{n+1}$.

- Considere em $\mathbb{S}^n$ a relação de equivalência $\sim_1$:

$$\eta \sim_1 \xi \Leftrightarrow \eta = \xi \ \text{ ou } \ \xi = -\eta$$

- Considere em $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ a relação de equivalência $\sim_2$:

$$x \sim_2 y \Leftrightarrow x = \lambda y \ \text{ para algum } \ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Mostre que os espaços quocientes

$$\mathbb{S}^n/\sim_1 \quad \text{e} \quad (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim_2$$

são homeomorfos.

Dica Obtenha uma função contínua $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{S}^n$ que preserve classes de equivalência.