ÁLGEBRA LINEAR

CM 005 - Eng. Industrial Madereira

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1: Sistemas Lineares

Esta lista está baseada nos exercícios do livro *Álgebra Linear com Amplicações* de Steven J. Leon.

---

1 Sistemas Lineares

Exercício 1 *Use o método da substituição para resolver os seguintes sistemas.*

$$(a)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 \\ \quad\ \ 2x_2 = 6 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ \quad\ 2x_2 + x_3 = 5 \\ \quad\quad\quad 3x_3 = 9 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ +x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_4 = 4 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_5 = 2 \end{cases}$$

Exercício 2 *Escreva cada um dos sistemas do exercício* (1) *de forma matricial, isto é, na forma* $A \cdot x = b$. *Por exemplo, o item (a) se escreve como:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exercício 3 *Considere os sistemas (a) e (b) do exercício* (1).

(i) Determine as matrizes inversas obtidas no exercício (2);

(ii) Verifique que as soluções obtidas no exercício (1) *são dadas por*

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Exercício 4 *Para cada um dos sistemas a seguir, interprete cada equação como uma reta no plano* $\mathbb{R}^2$. *Faça um esboço dessas retas e determine geometricamente as soluções.*

$$(a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ -2x_1 - 4x_2 = 4 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

Exercício 5 *Resolva os sistemas lineares utilizando as operações elementares sobre as linhas:*

(I) Trocar duas linhas

(II) Multiplicar uma linha por um número real não nulo;

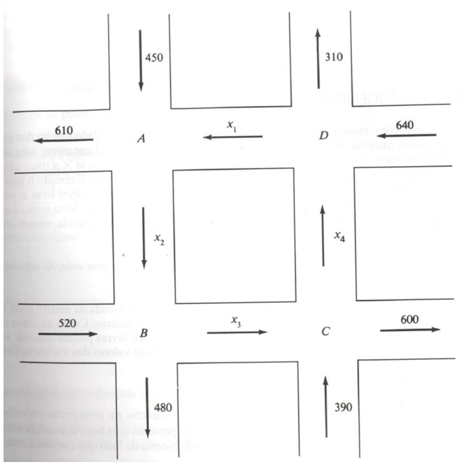
(III) Substituir uma linha por sua soma com um múltiplo de outra linha;

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ -6x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Exercício 6 *Resolva os sistemas dos exercícios* (1), (4) *e* (5) *utilizando as relativas matrizes aumentadas.*

Exercício 7 *Em uma certa seção do centro de determinada cidade, dois conjuntos de ruas de mão única se cruzam conforme a ilustração abaixo. A média do número de veículos por hora que entram e saem dessa seção em certo horário é dada na figura. Determine a quantidade de veículos* x_1, x_2, x_3 *e* x_4.

Dica: No cruzamento A entram $x_1 + 450$ *veículos e saem* $x_2 + 610$, *logo* $x_1 + 450 = x_2 + 610$.



Exercício 8 *Considere um sistema linear da forma*

$$\begin{cases} -m_1x_1 + x_2 = b_1 \\ -m_2x_1 + x_2 = b_2 \end{cases},$$

sendo m_1, m_2, b_1 *e* b_2 *são constantes.*

(a) Mostre que o sistema tem uma única solução se $m_1 \neq m_2$.

(b) Se $m_1 = m_2$, *mostre que o sistema só é compatível se* $b_1 = b_2$.

(c) Interprete geometricamente os itens (a) e (b).

Exercício 9 *Considere um sistema linear da forma*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}.$$

Explique por este sistema é compatível.

Exercício 10 *Suponha que* $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ *é uma solução do sistema Considere um sistema linear da forma*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Verifique que para qualquer número real* α, *o par* $(\alpha c_1, \alpha c_2)$ *é também solução do sistema;*

(b) *Se* $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ *é outra solução do sistema, então* $(c_1 + d_1, c_2 + d_2)$ *é também uma solução?*

Exercício 11 *Considere o sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 3 + \alpha x_3 = \beta \end{cases}.$$

(a) *Para quais valores de* α *e* β *o sistema tem infinitas soluções?*

(b) *Para quais valores de* α *e* β *o sistema não possui soluções?*