ÁLGEBRA LINEAR

CM 005 - Eng. Industrial Madereira

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA: Produto interno

Esta lista está baseada nos exercícios do livro *Álgebra Linear com Amplicações* de Steven J. Leon.

Resolva os exercícios:

(1) (Páginas: 156, 157) Todos, exceto: $8, 9, 11$

(2) (Páginas: 172, 173) Todos até o 18

Observação 1 *Equação (1) para questão 3 da página 172:*

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{3} x_i y_i w_i$$

Observação 2 *Equação (3) para questão 7 da página 172:*

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Observação 3 *Equação (6) para questão 9 da página 172:*

$$< f, g >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

Observação 4 *Equação (5) para questão 11 da página 172:*

$$< p, q >= \sum_{i=1}^{n} p(x_i)q(x_i)$$

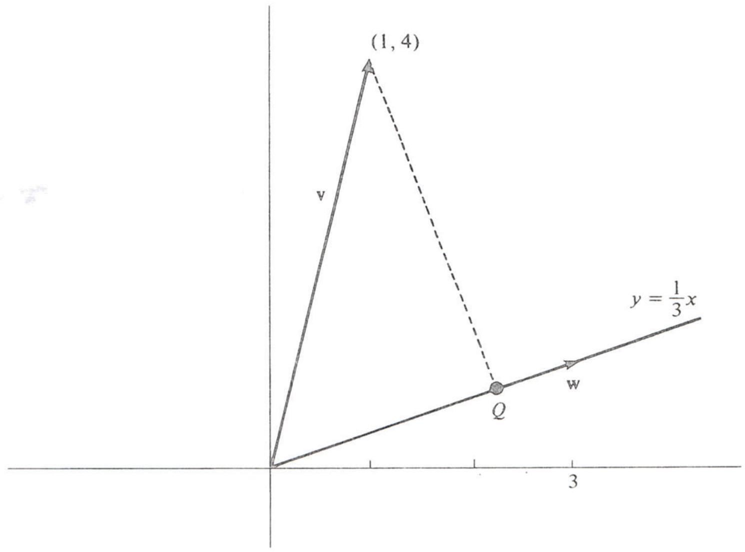


FIG. 5.1.3

SOLUÇÃO. O vetor $\mathbf{N} = (1, 2, 2)^T$ é normal ao plano e o plano contém a origem. Seja $\mathbf{v} = (2, 0, 0)^T$. A distância d de $(2, 0, 0)$ ao plano é, simplesmente, o valor absoluto da projeção escalar de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{N}$. Logo,

$$d = \frac{|\mathbf{v}^T\mathbf{N}|}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{2}{3}$$

□

ORTOGONALIDADE EM R^n

Todas as definições que foram dadas para R^2 e R^3 podem ser generalizadas para R^n. De fato, se $\mathbf{x} \in R^n$, o comprimento euclidiano de $\mathbf{x}$ é definido por

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

e o ângulo θ entre dois vetores não-nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$$

Os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ditos *ortogonais* se $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$. O símbolo "$\perp$" é utilizado muitas vezes para indicar ortogonalidade. Então, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais, escreveremos $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. As projeções vetoriais e escalares são definidas em R^n da mesma maneira que em R^2. Uma das aplicações principais desses conceitos é a solução de problemas de mínimos quadráticos. Estudaremos problemas de mínimos quadráticos na Seção 4.

EXERCÍCIOS

1. Encontre o ângulo entre cada par de vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ a seguir.

(a) $\mathbf{v} = (2, 1, 3)^T$, $\mathbf{w} = (6, 3, 9)^T$
(b) $\mathbf{v} = (2, -3)^T$, $\mathbf{w} = (3, 2)^T$
(c) $\mathbf{v} = (4, 1)^T$, $\mathbf{w} = (3, 2)^T$
(d) $\mathbf{v} = (-2, 3, 1)^T$, $\mathbf{w} = (1, 2, 4)^T$

2. Para cada par de vetores no Exercício 1, encontre a projeção escalar de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{w}$. Encontre, também, a projeção vetorial de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{w}$.

3. Para cada par de vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ a seguir, encontre a projeção $\mathbf{p}$ de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{y}$ e verifique que $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ são ortogonais.

(a) $\mathbf{x} = (3, 4)^T$, $\quad \mathbf{y} = (1, 0)^T$
(b) $\mathbf{x} = (3, 5)^T$, $\quad \mathbf{y} = (1, 1)^T$
(c) $\mathbf{x} = (2, 4, 3)^T$, $\quad \mathbf{y} = (1, 1, 1)^T$
(d) $\mathbf{x} = (2, -5, 4)^T$, $\quad \mathbf{y} = (1, 2, -1)^T$

4. Encontre o ponto mais próximo de (5, 2) que pertence à reta $y = 2x$.

5. Encontre o ponto mais próximo de (5, 2) que pertence à reta $y = 2x + 1$.

6. Encontre a distância do ponto (1, 2) à reta $4x - 3y = 0$.

7. Em cada um dos itens a seguir, encontre a equação do plano normal ao vetor $\mathbf{N}$ dado que contém o ponto P_0.

(a) $\mathbf{N} = (2, 4, 3)^T$, $\quad P_0 = (0, 0, 0)$
(b) $\mathbf{N} = (-3, 6, 2)^T$, $\quad P_0 = (4, 2, -5)$
(c) $\mathbf{N} = (0, 0, 1)^T$, $\quad P_0 = (3, 2, 4)$

8. Encontre a distância do ponto (1, 1, 1) ao plano $2x + 2y + z = 0$.

9. Encontre a distância do ponto (2, 1, −2) ao plano $6(x - 1) + 2(y - 3) + 3(z + 4) = 0$.

10. Se $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ e $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$ são vetores arbitrários em R^2, prove que:

(a) $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \geq 0$ $\qquad$ (b) $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$
(c) $\mathbf{x}^T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z}$

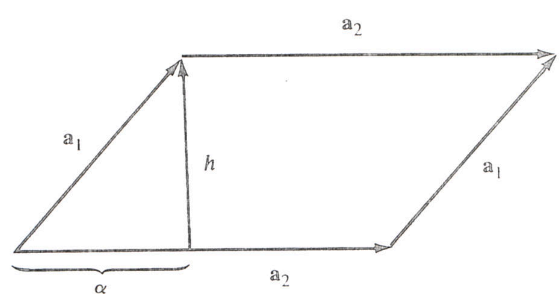
11. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dois vetores quaisquer em R^2, mostre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$ e, portanto, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Quando a igualdade é válida? Interprete geometricamente essa desigualdade.

12. Sejam l_1 a reta $y = m_1x + b_1$, $m_1 \neq 0$, e l a reta $y = mx + b$. Mostre que l é perpendicular a l_1 se e somente se $m = -1/m_1$.

13. Sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ vetores em R^3. Se $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_2 \perp \mathbf{x}_3$, é necessariamente verdade que $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_3$? Prove.

14. Seja A uma matriz 2×2 com vetores colunas $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ linearmente independentes. Se $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são usados para formar um paralelogramo P de altura h (ver a figura seguir), mostre que:

(a) $h^2\|\mathbf{a}_2\|^2 = \|\mathbf{a}_1\|^2\|\mathbf{a}_2\|^2 - (\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2)^2$
(b) Área de $P = |\det(A)|$



2 SUBESPAÇOS ORTOGONAIS

Seja A uma matriz $m \times n$ e seja $\mathbf{x} \in N(A)$. Como $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, temos

(1) $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

EXERCÍCIOS

1. Sejam $\mathbf{x} = (-1, -1, 1, 1)^T$ e $\mathbf{y} = (1, 1, 5, -3)^T$. Mostre que $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Calcule $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{y}\|_2$, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2$ verifique a validade do teorema de Pitágoras.

2. Seja $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)^T$ e $\mathbf{y} = (8, 2, 2, 0)^T$.
(a) Encontre o ângulo θ entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(b) Encontre a projeção vetorial $\mathbf{p}$ de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{y}$.
(c) Verifique que $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ é ortogonal a $\mathbf{p}$.
(d) Calcule $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|_2$, $\|\mathbf{p}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_2$ e verifique a validade do teorema de Pitágoras.

3. Seja $\mathbf{w} = (1/4, 1/2, 1/4)^T$ e use a Equação (1) para definir um produto interno em R^3. Sejam $\mathbf{x} =$ $(1, 1, 1)^T$ e $\mathbf{y} = (-5, 1, 3)^T$.
(a) Mostre que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais em relação a esse produto interno com peso.
(b) Calcule os valores de $\|\mathbf{x}\|$ e $\|\mathbf{y}\|$ para esse produto interno.

4. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Determine o valor de cada uma das expressões a seguir.
(a) $\langle A, B \rangle$ (b) $\|A\|_F$ (c) $\|B\|_F$ (d) $\|A + B\|_F$

5. Mostre que a Equação (2) define um produto interno em $R^{m \times n}$.

6. Mostre que o produto interno definido pela Equação (3) satisfaz as duas últimas condições definição de produto interno.

7. Para $C[0, 1]$ com produto interno definido por (3), calcule:

(a) $\langle e^x, e^{-x} \rangle$ (b) $\langle x, \operatorname{sen} \pi x \rangle$ (c) $\langle x^2, x^3 \rangle$

8. Para $C[0, 1]$ com produto interno definido por (3), considere os vetores 1 e x.
(a) Encontre o ângulo θ entre 1 e x.
(b) Determine a projeção vetorial $\mathbf{p}$ de 1 sobre x e verifique que $1 - \mathbf{p}$ é ortogonal a $\mathbf{p}$.
(c) Calcule $\|1 - \mathbf{p}\|$, $\|\mathbf{p}\|$, $\|1\|$ e verifique a validade do teorema de Pitágoras.

9. Para $C[-\pi, \pi]$ com produto interno definido por (6), mostre que $\cos mx$ e $\operatorname{sen} nx$ são ortogo e que ambos são vetores unitários. Determine a distância entre os dois vetores.

10. Mostre que as funções x e x^2 são ortogonais em P_5 em relação ao produto interno definido (5), onde $x_i = (i - 3)/2$ para $i = 1, \ldots, 5$.

11. Considere em P_5 o produto interno como no Exercício 10 e a norma definida por

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle} = \left\{ \sum_{i=1}^{5} [p(x_i)]^2 \right\}^{1/2}$$

Calcule:
(a) $\|x\|$ (b) $\|x^2\|$ (c) a distância entre x e x^2

12. Se V é um espaço munido de um produto interno, mostre que

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

satisfaz as duas primeiras propriedades na definição de norma.

13. Mostre que

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

define uma norma em R^n.

14. Mostre

define

15. Calcul

(a) $\mathbf{x} =$

16. Sejam
norma

17. Sejam
tância

18. Consi

Encon

19. Seja $\mathbf{x}$

20. Seja $\mathbf{x}$

21. Dê un

22. Mostr

23. Mostr

24. Mostr

Interp

25. O resu
nos. D

26. Deter
(a) $\|$.
(b) $\|$.
(c) $\|$.

27. Seja $\mathbf{x}$

Dê ex

28. Deser

29. Consi
seja a

14. Mostre que

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

define uma norma em R^n.

15. Calcule $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_\infty$ para cada um dos vetores a seguir pertencentes a R^3.

(a) $\mathbf{x} = (-3, 4, 0)^T$ (b) $\mathbf{x} = (-1, -1, 2)^T$ (c) $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$

16. Sejam $\mathbf{x} = (5, 2, 4)^T$ e $\mathbf{y} = (3, 3, 2)^T$. Calcule $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$. Para qual dessas normas os dois vetores estão mais próximos? Para qual eles estão mais longe?

17. Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dois vetores em um espaço com produto interno. Mostre que, se $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, então a distância entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é

$$\left(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right)^{1/2}$$

18. Considere R^n com o produto interno

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$$

Encontre uma fórmula para a distância entre dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ e $\mathbf{y}$ $(y_1, \ldots, y_n)^T$.

19. Seja $\mathbf{x} \in R^n$. Mostre que $\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2$.

20. Seja $\mathbf{x} \in R^2$. Mostre que $\|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1$.

[***Sugestão:*** Escreva $\mathbf{x}$ na forma $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ e use a desigualdade triangular.]

21. Dê um exemplo de um vetor não-nulo $\mathbf{x} \in R^2$ para o qual

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_1$$

22. Mostre que, em qualquer espaço vetorial normado,

$$\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$$

23. Mostre que, quaisquer que sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em um espaço vetorial normado,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \ge \big|\, \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \,\big|$$

24. Mostre que, quaisquer que sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em um espaço vetorial munido de um produto interno,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

Interprete geometricamente esse resultado para o espaço vetorial R^2.

25. O resultado do Exercício 24 não é válido para normas que não estão associadas a produtos internos. Dê um exemplo disso em R^2 para a norma $\|\cdot\|_1$.

26. Determine se as expressões a seguir definem ou não normas em $C[a, b]$.

(a) $\|f\| = |f(a)| + |f(b)|$

(b) $\|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx$

(c) $\|f\| = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$

27. Seja $\mathbf{x} \in R^n$. Mostre que:

(a) $\|\mathbf{x}\|_1 \le n\|\mathbf{x}\|_\infty$ (b) $\|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\, \|\mathbf{x}\|_\infty$

Dê exemplos de vetores em R^n para os quais as igualdades nos itens (a) e (b) são válidas.

28. Desenhe o conjunto de pontos $(x_1, x_2) = x^T$ em R^2 para os quais:

(a) $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ (b) $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ (c) $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$

29. Considere o espaço vetorial R^n com o produto interno $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$. Mostre que, qualquer que seja a matriz A $m \times n$, temos:

(a) $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y} \rangle$ (b) $\langle A^TA\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|A\mathbf{x}\|^2$