Processo Seletivo Estendido 2016

LISTA FUNÇÕES - 2

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Esta lista foi inicialmente elaborada pelo professor Alexandre Trovon (UFPR). A presente versão possui também algumas alterações feitas pelo professor Lucas Pedroso (UFPR)

- Nesta lista de exercícios há problemas algébricos e também de modelagem matemática. Em ambas situações o objetivo é recordar e aprofundar o que foi visto no ensino médio a respeito de funções. Alguns tópicos mais diretamente relacionados ao assunto serão também trabalhados
- Quando julgar necessário, utilize uma calculadora, um computador, ou mesmo uma planilha, para fazer estimativas que deem a você uma ideia numérica.
- Matemática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas ideias com os colegas.
- Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela.

---

1. Observe como fazemos para completar os quadrados das funções $p(x) = x^2+2x+10$ e $q(x) = x^2-x$.

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2+2x+10 \\ p(x) &= x^2+2x+1-1+10 \\ p(x) &= (x+1)^2+9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2-x \\ p(x) &= x^2-2\left(\tfrac{1}{2}\right)x+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ p(x) &= x^2-x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4} \\ p(x) &= \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Utilize essa idéia para completar os quadrados das funções:

(a) $p(x) = x^2+5x+2$
(b) $p(x) = x^2+3x+1$
(c) $p(t) = -3t^2-5t+1$
(d) $p(t) = t^2-2t$
(e) $p(x) = x^2+3x$
(f) $p(x) = x^2+4x-3$
(g) $p(x) = 4x^2+12x+10$
(h) $p(x) = -16x^2+6x$
(i) $p(x) = x^2+4bx+c$
(j) $p(x) = ax^2+ax+b$
(k) $p(x) = \pi(x^2-2x)$
(l) $p(x) = 24(-x^2-3x+1)$

2. Resolva as seguintes equações completando os quadrados:

(a) $3x^2+6x-1=0$
(b) $3x(3x-2)=6x-5$
(c) $y^2-15y-4=0$
(d) $6u^2+7u-3=0$
(e) $x^2-2x+9=0$
(f) $4z^2-4z-1=0$
(g) $p(2p-4)=5$
(h) $(x-2)^2+3x-5=0$
(i) $(3x-2)^2+(x+1)^2=0$
(j) $5y^2-15y+9=0$

3. Deduza a fórmula para a solução da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

4. Use a fórmula para a solução da equação quadrática para resolver as seguintes equações:

(a) $5x^2 + 6x - 1 = 0$

(b) $2x^2 = 18x + 5$

(c) $x(2x - 3) = 2x - 6$

(d) $6x^2 - 7x + 2 = 0$

(e) $2x^2 = 13(x - 1) + 3$

(f) $2x^2 - 6x - 1 = 0$

(g) $1200y^2 = 10y + 1$

(h) $x^2 + 2bx - c^2 = 0$

(i) $x^2 - 6ax + 3a^2 = 0$

(j) $\pi u^2 + (\pi^2 - 1)u - \pi = 0$

(k) $x(x - \sqrt{2} + 4) = 4(x + 1)$

(l) $3x^2 = 5(x - 1)^2$

5. Resolva a expressão $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 9x + 20} = 1$.

6. Em cada item, encontre o conjunto S das soluções reais da equação ou inequação dada.

(a) $|x^2 - 5x - 3| \leq 3$

(b) $|2x^2 + 5x + 1| = 1$

(c) $|2x^2 + 5x + 1| = -1$

(d) $|x^2 - 1| \geq 2x$

(e) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$

(f) $|-x^2 + 2x + 5| > 2$

(g) $x^2 - |5x + 6| = 0$

(h) $x^2 - |2x + 1| = 2$

(i) $|2x^2 - 6| = x$

7. Determine os valores de K para os quais as equações terão raízes reais e iguais.

(a) $5x^2 - 4x - (5 + K) = 0$

(b) $(K + 2)x^2 + 3x + (K + 3) = 0$

(c) $x^2 + 3 - K(2x - 2) = 0$

(d) $(K + 2)x^2 + 5Kx - 2 = 0$

(e) $x^2 - x(2 + 3K) + 7 = 0$

(f) $(K - 1)x^2 + 2x + (K + 1) = 0$

8. Fatore as seguintes expressões quadráticas

(a) $x^2 - 3x$ e $2x^2 + x$

(b) $\pi x^2 + 3\pi$ e $17x^2 + 51x$

(c) $\sqrt{2}x^2 + 2x$ e $\sqrt{\pi}x^2 - \pi$

(d) $x^2 - 9$ e $x^2 - 49$

(e) $x^2 - 3$ e $x^2 - 1$

(f) $x^2 - 2$ e $x^2 - \pi$

(g) $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$ e $4x^2 - 2x + \dfrac{1}{4}$

(h) $x^2 + x + \dfrac{1}{4}$ e $x^2 + x - 6$

(i) $x^{14} - 6x^7 + 9$ e $x^2 - 3x - 40$

(j) $3x^2 - 5x - 2$ e $8x^2 + 2x - 1$

(k) $2x^2 - 5bx - 3b^2$ e $x^2 - 4x - 21$

(l) $x^4 - 2x^2 + 1$ e $x^6 - 4x^3 - 21$

9. Prove as *relações de Girard* para equações do segundo grau: se $ax^2 + bx + c = 0$ possui raízes x_1 e x_2, então $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

10. Mostre que uma equação do segundo grau que tem x_1 e x_2 como raízes é a equação $x^2 - Sx + P = 0$, onde $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

11. Obtenha uma equação do segundo grau que possua as raízes:

(a) 2 e 3

(b) $\dfrac{1}{2}$ e $-\dfrac{3}{2}$

(c) $0,4$ e 5

(d) 1 e $-\sqrt{2}$

(e) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$

12. Resolva as inequações, expressando a solução em forma de intervalo (quando possível).

(a) $|x^2+2x+1|<0$

(b) $|(x-2)^2|>0$

(c) $x|x+1|>0$ e $x|x+1|<0$

(d) $\sqrt{3x^2}>0$

(e) $\sqrt{4x^2+12x+9}>2$

(f) $\sqrt{2|x|-1}>0$

(g) $3|x|+1>0$ e $3|x|+1<0$

(h) $\dfrac{3}{x}<5$

(i) $\dfrac{2}{x-1}<4$

(j) $\dfrac{x}{(3-x)^2}<2$

(k) $\dfrac{2}{x}-3<\dfrac{4}{x}+1$

(l) $\dfrac{2x-3}{x+2}<\dfrac{1}{3}$

(m) $\dfrac{x-3}{x-1}>x-4$

(n) $\dfrac{x-2}{x+3}<\dfrac{x+1}{x}$

13. Obtenha um número $\delta>0$, tal que se $|x-1|<\delta$ então $|x^2-1|<\dfrac{1}{10}$.

14. Nos itens a seguir, determine para quais valores de x o trinômio é maior que zero, e para quais valores de x é menor que zero através da fatoração do trinômio (completar quadrados) e expresse a resposta na notação de intervalo. Veja o seguinte exemplo:

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 \qquad \text{(completamos o quadrado)} \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Assim, $x^2+x+1>0$ se, e somente se, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, isto é, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2>-\frac{3}{4}$. Como $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$ para todo $x\in I\!R$, a expressão $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2>-\frac{3}{4}$ é válida para todo $x\in I\!R$. Portanto, $x^2+x+1>0$ para $x\in]-\infty,+\infty[$. Por outro lado, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2<-\frac{3}{4}$ não tem solução, já que o membro esquerdo da desigualdade é um número positivo. Logo a solução para $x^2+x+1<0$ é $\emptyset$, o conjunto vazio.

(a) x^2-2x-3

(b) x^2+x-42

(c) $2x^2-x-1$

(d) x^2-9

(e) $16x^2-2x$

(f) x^2+3x

(g) x^2+x+1

(h) x^2+1

(i) $-x^2$

(j) $-x^2+2x-2$

(k) x^2+3x+3

(l) $2x^2+x+1$

(m) x^2+x-1

15. Resolva as desigualdades, expressando a solução na forma de intervalo, quando possível.

(a) $x(x-3)(6-x) < 0$

(b) $\dfrac{(x+1)(2x-3)}{x+5} \geq 0$

(c) $|5x| > 1$

(d) $|3x-4| \geq 2$

(e) $\dfrac{|x-1|(x^2-2)}{x-1} > 0$

(f) $|x-3| > x+1$

(g) $\dfrac{(x^2+1)(x^4+1)}{(x^2+2)(x^6+6)} > 0$

(h) $|x-1| - |x-3| \geq \dfrac{|x-1|}{2}$

(i) $\dfrac{6-x-x^2}{(x^2+x+1)(x+4)(x-6)^2} \geq 0$

(j) $\dfrac{(x^2-5x+4)(x+2)}{(x^2+3)(2x+1)} \geq 0$

16. Seja $g(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$, calcule:

(a) $g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ (b) $\dfrac{1}{g(a)}$ (c) $g(a^2)$ (d) $[g(a)]^2$ (e) $g(\sqrt{a})$ (f) $f(x) = \sqrt{g(a)}$

17. Calcular $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, fazendo as simplificações possíveis, supondo que $x \neq a$, em cada um dos itens a seguir:

(a) $f(x) = x^2 - 4$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(d) $f(x) = 4x^4$

18. Classifique as funções seguintes como injetora, sobrejetora, bijetora ou nem injetora nem sobrejetora.

(a) $f : I\!R \to I\!R$ tal que $f(x) = 2x - 1$
(b) $g : I\!R \to I\!R_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$
(c) $h : I\!R \to I\!R_+$ tal que $h(x) = |x-1|$
(d) $m : I\!N \to I\!N$ tal que $m(x) = 3x + 2$
(e) $p : I\!R^* \to I\!R^*$ tal que $p(x) = \dfrac{1}{x}$ (onde $I\!R^* = I\!R - \{0\}$)
(f) $q : I\!R \to I\!R$ tal que $q(x) = x^3$
(g) $r : I\!R \to I\!R$ tal que $r(x) = |x|(x-1)$

19. Determine o domínio das seguintes funções

(a) $f(x) = \sqrt{x+5}$

(b) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+2}{x+1}}$

(d) $f(x) = 4\sqrt{\dfrac{-8x+12}{x+5}}$

(e) $f(x) = \sqrt{5+4x-x^2}$

(f) $f(x) = \sqrt{x-x^3}$

(g) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$

(h) $\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}}$

20. Seja $f : A \to I\!R_+$. Determine o domínio A para as seguintes funções:

(a) $f(x) = 3x + 1$

(b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(c) $f(x) = \dfrac{2x-5}{1-x}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

(e) $f(x) = |3-x| - 1$

(f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{10}}$

21. As funções

$$f : I\!R \longrightarrow I\!R \qquad\qquad f : I\!R - \{1\} \longrightarrow I\!R$$
$$x \longmapsto x+1 \qquad \text{e} \qquad x \longmapsto \frac{x^2-1}{x-1}$$

são iguais? Explique.

22. Determinar os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m-1)x^2 + (2m+3)x + m$ tenha dois zeros reais e distintos.

23. Determinar os valores de m para que a equação do segundo grau $(m+2)x^2+(3-2m)x+(m-1) = 0$ tenha raízes reais.

24. Determinar os valores de m para que a função $f(x) = mx^2 + (m+1)x + (m+1)$ tenha um zero real duplo.

25. Determinar os valores de m para que a equação $mx^2 + (2m-1)x + (m-2) = 0$ não tenha raízes reais.

26. Determine m na função $f(x) = 3x^2 - 4x + m$ de modo que se tenha $\text{Im}(f) = [2, +\infty[$.

27. Construir o gráfico e determinar o conjunto imagem das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -2 & \text{se} \quad x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{se} \quad x \neq -2 \\ 3 & \text{se} \quad x = -2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad 0 \leq x < 2 \\ -x^2+9 & \text{se} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & \text{se} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ x^2-2x+1 & \text{se} \quad 0 < x \leq 2 \\ -1 & \text{se} \quad x < -2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} -|x+2| & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2-4x & \text{se} \quad -2 \leq x < 0 \\ -4 & \text{se} \quad x < -2 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$

28. Determinar os vértices e a imagem das parábolas

(a) $y = 4x^2 - 4$ (b) $y = -x^2 + 3x$

(c) $y = 2x^2 - 5x + 2$ (d) $y = -x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

(e) $y = -x^2 + x - \dfrac{2}{9}$ (f) $y = x^2 - \dfrac{7}{3}x - 2$

29. Para as seguintes funções f, encontre o discriminante de $f(x) = 0$ e determine se as raízes são reais e diferentes, reais e iguais, ou não existem. Esboce o gráfico de $f(x)$ sem desenhar mais de quatro pontos.

(a) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ (b) $f(x) = x^2 + x + 1$

(c) $f(x) = 4x^2 - x - 5$ (d) $f(x) = 7x^2 - 5x - 2$

(e) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \dfrac{1}{4}$ (f) $f(x) = x^2 - ax - 1$

(g) $f(x) = 3x^2 + \pi x + 4$ (h) $f(x) = x^2 - 2ax + a^2$

(i) $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3}$ (j) $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$

30. Em cada item, encontre o conjunto S das soluções reais da equação ou inequação dada.

(a) $|3x+4| = 3$ (b) $|3x+4| = x$ (c) $|3x+4| = -x$

(d) $|4x-1| \leq 3$ (e) $|4x-1| > 5$ (f) $|-4x-4| > 8x$

(g) $|2x-4| = |4x+3|$ (h) $|x| - |3x+4| = 2x$ (i) $|3x+7| > |3x+8|$

31. Encontre as soluções reais das inequações abaixo.

(a) $\dfrac{1-3x}{2-3x} \geq 0$ (b) $\dfrac{1-3x}{2-3x} > 2$ (c) $(4x-1)(3x+2)(5x+1) \leq 0$

(d) $\dfrac{2x+4}{x^2-5} > 0$ (e) $\dfrac{(2x+1)(x-2)}{|3x+4|} \geq 0$ (f) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)} < 0$

(g) $\dfrac{|3x+2|}{4x} \geq 0$ (h) $\dfrac{|3x+2|}{4x} \geq 1$

32. Escreva cada uma das funções abaixo como uma função afim por partes.

(a) $f(x) = |3x+1| - |4x-2|$ (b) $g(x) = |-2x-2| + 3|x-2|$

(c) $h(x) = |3x-1| + |3x-2|$ (d) $i(x) = |x-1| + |x| + |x+1|$

33. Encontre as soluções reais das inequações abaixo.

(a) $\dfrac{2x^2-x-3}{x+2} < 0$ (b) $\dfrac{-2x^2+4x-3}{x^2-3x-4} > 0$ (c) $\dfrac{3x-4}{x^2-2x+1} \leq 0$

(d) $\dfrac{3x+5}{-2x^2+5x+3} \geq 0$ (e) $\dfrac{-x^2+5x-6}{x^2+x-2} \leq 0$ (f) $\dfrac{x^2-2x-6}{2x-8} < 0$

(g) $\dfrac{x^2+4x-1}{x+3} > 1$ (h) $\dfrac{x^2+4x-1}{x^2+3x-4} \leq 1$ (i) $\dfrac{3x^2+3x-1}{2x-1} \geq x$

34. Sabe-se que um triângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro a é retângulo. Se os catetos são x e y, expresse y como função de x. Expresse a área desse triângulo como função de x.

35. Um retângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro a tem lados x e y, sendo que y está sobre o diâmetro a. Expresse y em função de x. Expresse a área do retângulo em função de x.

36. Expresse o lado do quadrado inscrito em um triângulo retângulo ABC, em função da base a e da altura h.

37. Determine o menor valor de b em $B = \{y \in I\!R \,|\, y \geq b\}$ de modo que a função $f : I\!R \to B$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ seja sobrejetora.

38. Determine o maior valor de a em $A = \{x \in I\!R \,|\, x \leq a\}$ de modo que a função $f : A \to I\!R$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ seja injetora.

39. Qual deve ser o valor de c para que o vértice da parábola $y = x^2 - 8x + c$ esteja sobre o eixo dos x?

40. Qual deve ser o valor de k para que $y = 2x^2 - kx + 8$ tenha duas raízes reais e iguais?

41. Dentre todos os números reais x e z tais que $2x+z=8$ determine aqueles cujo produto é máximo.

42. Dentre todos os números de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

43. Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e o vértice que está fora dos eixos pertencente à reta $y=-4x+5$.

44. Um arame de comprimento ℓ deve ser cortado em dois pedaços. Um pedaço será usado para formar um círculo, e outro, um quadrado. Onde se deve cortar o arame, para que a soma das áreas das figuras seja a menor possível?

45. Prove que somando-se 1 ao produto de quatro números naturais consecutivos o resultado será sempre um quadrado perfeito.

46. Se a distância de frenagem d (em metros) de um carro a velocidade de c km/h é dada, aproximadamente, por $d=v+\dfrac{v^2}{20}$, para quais velocidades o espaço de frenagem é inferior a 20m?

47. Considerando que a resistência elétrica R (em Ohms) para um fio de metal puro está relacionado com a temperatura T (em °C) pela fórmula $R=R_0(1+\alpha T)$ onde α, R_0 são constantes positivas, pede-se:

(a) Para que temperatura tem-se que $R=R_0$?
(b) Se a resistência é considerada 0 para $T=-273°C$, determine o valor de α.
(c) Se a prata tem resistência $1,25$ ohms a 0°C a que temperatura sua resistência atinge $2,0$ ohms?

48. As dosagens para adultos e para crianças devem ser especificadas nos produtos farmacêuticos. Duas das fórmulas para se especificar as dosagens para crianças a partir das dosagens para adultos são a de Cowling, dada por $y=\dfrac{1}{24}(t+1)\alpha$ e a de Friend, dada por $y=\dfrac{2}{25}t\alpha$ onde α representa a dosagem para adulto, em mg, e t representa a idade da criança, em anos.

(a) Se $\alpha=100$mg, represente graficamente as expressões das dosagens infantis usando as fórmulas de Cowling e de Friend.
(b) Para que idade as duas fórmulas especificam a mesma dosagem?

Respostas:

1. (a) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$
(b) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$
(c) $-3\left[\left(t+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{37}{36}\right]$
(d) $(t-1)^2-1$
(e) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$
(f) $(x+2)^2-7$
(g) $(2x+3)^2+1$
(h) $-\left(4x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{16}$
(i) $(x+2b)^2+c-4b^2$
(j) $a\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{b}{a}\right]$
(k) $\pi(x-1)^2-\pi$
(l) $-24\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}\right]$

2. (a) $-1\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (b) $\frac{2\pm i}{3}$ (c) $\frac{15\pm\sqrt{241}}{2}$ (d) $\frac{-3}{2}$ ou $\frac{1}{3}$
(e) $1\pm2\sqrt{2}i$

(f) $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(g) $1 \pm \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

(h) $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(i) $\dfrac{1 \pm i}{2}$

(j) $\dfrac{15 \pm 3\sqrt{5}}{10}$

4. (a) $\dfrac{-3 \pm \sqrt{14}}{5}$

(b) $\dfrac{9 \pm \sqrt{91}}{2}$

(c) $\dfrac{5 \pm \sqrt{23}i}{4}$

(d) $\dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{2}{3}$

(e) $\dfrac{13 \pm \sqrt{89}}{4}$

(f) $\dfrac{3 \pm \sqrt{11}}{2}$

(g) $-\dfrac{1}{40}$ ou $\dfrac{1}{30}$

(h) $-b \pm \sqrt{b^2 + c^2}$

(i) $a(3 \pm \sqrt{6})$

(j) $-\pi$ ou $\dfrac{1}{\pi}$

(k) $2\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$

(l) $\dfrac{5 \pm \sqrt{15}}{2}$

5. $x = 1$, $x = 4$ ou $x = 5$.

6. (a) $S = [-1, 0] \cup [5, 6]$.

(b) $S = \left\{-\dfrac{5}{2}, -2, -\dfrac{1}{2}, 0\right\}$.

(c) $S = \emptyset$.

(d) $S = \left(-\infty, -1 + \sqrt{2}\right] \cup \left[1 + \sqrt{2}, \infty\right)$.

(e) $S = \{-3, -2, 2, 3\}$.

(f) $S = (-\infty, 1 - 2\sqrt{2}) \cup (-1, 3) \cup (1 + 2\sqrt{2}, \infty)$.

(g) $S = \{-3, -2, -1, 6\}$.

(h) $S = \left\{-1 - \sqrt{2}, 3\right\}$.

(i) $S = \left\{\dfrac{3}{2}, 2\right\}$.

7. (a) $K = \frac{-29}{5}$

(b) $K = \frac{-5 \pm \sqrt{10}}{2}$

(c) $K = 3$ e $k = -1$

(d) $\nexists\ K$

(e) $K = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{3}$

(f) $K = \pm\sqrt{2}$

8. (a) $x(x-3)$ e $x(2x+1)$

(b) $\pi(x^2+3)$ e $17x(x+3)$

(c) $\sqrt{2}x(x+\sqrt{2})$ e $\sqrt{\pi}(x^2 - \sqrt{\pi})$

(d) $(x-3)(x+3)$ e $(x-7)(x+7)$

(e) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ e $(x-1)(x+1)$

(f) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ e $(x-\sqrt{\pi})(x+\sqrt{\pi})$

(g) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$ e $\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^2$

(h) $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$ e $(x-2)(x+3)$

(i) $(x^7 - 3)^2$ e $(x+5)(x-8)$

(j) $3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)(x-2)$ e $8\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{4}\right)$

(k) $(x - 3b)(2x + b)$ e $(x+3)(x-7)$

(l) $(x^2-1)^2$ e $(x^3+3)(x^3-7)$

11. (a) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

(b) $x^2 + x - \frac{3}{4}$.

(c) Não há uma equação do segundo grau que possua 3 raízes.

(d) $x^2 - (1-\sqrt{2})x - \sqrt{2}$.

(e) $x^2 - 2x - 2$.

12. (a) $\emptyset$

(b) $\mathbb{R} - \{2\}$

(c) $\emptyset$

(d) $\mathbb{R} - \{0\}$

(e) $\left(-\infty, -\dfrac{5}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

(f) $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

(g) $\emptyset$

(h) $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$

(i) $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

(j) $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$

(k) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$

(l) $\left(-2, \frac{11}{5}\right)$

(m) $(-\infty, 1) \cup (3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2})$

(n) $\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$

14. (a) $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$. O trinômio é negativo para $x \in (-1, 3)$.

(b) $x^2 + x - 42 = (x+7)(x-6)$. O trinômio é negativo para $x \in (-7, 6)$.

(c) $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$. O trinômio é negativo para $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

(d) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$. O trinômio é negativo para $x \in (-3, 3)$.

(e) $16x^2 - 2x = 2x(8x-1)$. O trinômio é negativo para $x \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$.

(f) $x^2 + 3x = x(x+3)$. O trinômio é negativo para $x \in (-3, 0)$.

(g) $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. O trinômio nunca é negativo.

(h) $x^2 + 1$. O trinômio nunca é negativo.

(i) $-x^2$. O trinômio é negativo para $x \in \mathbb{R}$

(j) $-x^2 + 2x - 2 = -(x-1)^2 - 1$. O trinômio é negativo para $x \in \mathbb{R}$

(k) $x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. O trinômio nunca é negativo.

(l) $2x^2 + x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$. O trinômio nunca é negativo.

(m) $x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$. O trinômio é negativo para $x \in \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

15. (a) $x \in (0, 3) \cup (6, +\infty)$

(b) $x \in (-5, -1] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

(c) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$

(d) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$

(e) $x \in [-\sqrt{2}, 1) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

(f) $x \in (-\infty, 1)$

(g) $x \in \mathbb{R}$

(h) $x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$

(i) $x \in (-\infty, -4) \cup [-3, 2]$

(j) $x \in (-\infty, -2] \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right] \cup [4, +\infty)$

16. (a) $\frac{a^2}{1 + 4a^2}$

(b) $a^2 + 4$

(c) $\frac{1}{a^4 + 4}$

(d) $\frac{1}{a^4 + 8a^2 + 16}$

(e) $\frac{1}{a + 4}$

(f) $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4}}$

17. (a) $x+a$ (b) x^2+ax+a^2 (c) $\dfrac{-1}{ax}$ (d) $4(x+a)(x^2+a^2)$

18. (a) Bijetora.
(b) Nem injetora nem sobrejetora.
(c) Injetora.
(d) Bijetora.
(e) Bijetora.
(f) Bijetora.
(g) Nem injetora nem sobrejetora.

19. (a) $[-5,+\infty)$
(b) $[-2,2]$
(c) $(-1,2]$
(d) $(-5,\dfrac{3}{2}]$
(e) $[-1,5]$
(f) $(-\infty,-1]\cup[0,1]$
(g) $(-\sqrt{2},0]$
(h) $[-3,-1)\cup[1,+\infty)$

20. (a) $\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$
(b) $(0,2]\cup[3,+\infty)$
(c) $\left(1,\dfrac{5}{2}\right]$
(d) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$
(e) $(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$
(f) $[0,+\infty)$

21. Não, pois possuem domínios diferentes.

22. $m>\dfrac{-9}{16}$.

23. $m\leq\dfrac{17}{16}$.

24. $m=\dfrac{-4}{3}$ e $m=\frac{1}{3}$.

25. $m<\dfrac{-1}{4}$.

26. $m=\dfrac{10}{3}$.

28. (a) $v=(0,-4)$ e $I(f)=[-4,+\infty)$
(b) $v=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ e $I(f)=\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$
(c) $v=\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{-9}{8}\right)$ e $I(f)=\left[-\dfrac{9}{8},+\infty\right)$
(d) $v=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{25}{16}\right)$ e $I(f)=\left(-\infty,\dfrac{25}{16}\right]$
(e) $v=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{36}\right)$ e $I(f)=\left(-\infty,\dfrac{1}{36}\right]$
(f) $v=\left(\dfrac{7}{6},-\dfrac{121}{36}\right)$ e $I(f)=\left[-\dfrac{121}{36},+\infty\right)$

29. (a) $\Delta=0$, raízes reais e iguais.
(b) $\Delta=-3$, não possui raízes reais.
(c) $\Delta=81$, raízes reais e diferentes.
(d) $\Delta=81$, raízes reais e diferentes.
(e) $\Delta=1$, raízes reais e diferentes.
(f) $\Delta=a^2+4$, raízes reais e diferentes.
(g) $\Delta=\pi^2-48$, não possui raízes reais.
(h) $\Delta=0$, raízes reais e iguais.
(i) $\Delta=16$, raízes reais e diferentes.
(j) $\Delta=0$, raízes reais e iguais.

30.

(a) $S=\left\{-\frac{7}{3},-\frac{1}{3}\right\}$.

(b) $S=\emptyset$.

(c) $S=\{-2,-1\}$.

(d) $S=\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

(e) $S=(-\infty,-1)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$.

(f) $S=(-\infty,1)$.

(g) $S=\left\{-\frac{7}{2},\frac{1}{6}\right\}$.

(h) $S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

(i) $S=\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$.

31. (a) $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$.

(b) $x\in\left(\frac{2}{3},1\right)$.

(c) $x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right]$.

(d) $x\in\left(-\sqrt{5},-2\right)\cup\left(\sqrt{5},\infty\right)$.

(e) $x\in\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{4}{3},-\frac{1}{2}\right]\cup[2,\infty)$.

(f) $x\in(-4,-3)\cup(-2,-1)$.

(g) $x\in\left\{-\frac{2}{3}\right\}\cup(0,\infty)$.

(h) $x\in(0,2]$.

32. (a) $f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{se } x<-\frac{1}{3} \\ 7x-1 & \text{se } -\frac{1}{3}\le x<\frac{1}{2} \\ 3-x & \text{se } x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$

(b) $g(x)=\begin{cases} 4-5x & \text{se } x\le -1 \\ 8-x & \text{se } -1<x<2 \\ 5x-4 & \text{se } x\ge 2\end{cases}$

(c) $h(x)=\begin{cases} 3-6x & \text{se } x<\frac{1}{3} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3} \\ 6x-3 & \text{se } x\ge\frac{2}{3}\end{cases}$

(d) $i(x)=\begin{cases} -3x & \text{se } x<-1 \\ 2-x & \text{se } -1\le x<0 \\ x+2 & \text{se } 0\le x<1 \\ 3x & \text{se } x\ge 1\end{cases}$

33. (a) $x\in(-\infty,-2)\cup\left(-1,\frac{3}{2}\right)$.

(b) $x\in(-1,4)$.

(c) $x\in(-\infty,1)\cup\left(1,\frac{4}{3}\right]$.

(d) $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right]\cup\left(-\frac{1}{2},3\right)$.

(e) $x\in(-\infty,-2)\cup(1,2]\cup[3,\infty)$.

(f) $x\in(-\infty,1-\sqrt{7})\cup(1+\sqrt{7},4)$.

(g) $x\in(-4,-3)\cup(1,\infty)$.

(h) $x\in(-\infty,-4)\cup[-3,1)$.

(i) $x\in\left[-2-\sqrt{5},-2+\sqrt{5}\right]\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

34. $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $A=\dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$.

35. $y=\sqrt{a^2-4x^2}$, $A=x\sqrt{a^2-4x^2}$.

36. $L=\dfrac{ah}{a+h}$.

37. $b=2$.

38. $a=\dfrac{3}{4}$.

39. $c=16$.

40. $k = \pm 8$.

41. $x = 2$ e $z = 4$.

42. $x = y = 3$.

43. Retângulo com vértices $(0,0)$, $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$, $\left(\frac{5}{8}, \frac{5}{2}\right)$, $\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

44. A uma distância de $\frac{4l}{4+\pi}$ $\left(\text{ou } \frac{\pi l}{4+\pi}\right)$ da extremidade.

46. $v = 10(-1 \pm \sqrt{5}) \cong 12,36 km/h$.

47. (a) $T = 0$. (b) $\alpha = \frac{1}{273}$. (c) $T = 163,8°\text{C}$.

48. (b) $t = \frac{25}{23}$ anos.