ÁLGEBRA LINEAR

CM 005 - Eng. Industrial Madereira

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2: Operações com matrizes

Esta lista está baseada nos exercícios do livro *Álgebra Linear com Amplicações* de Steven J. Leon.

Resolva os exercícios:

(1) (Páginas: 36 - 37 - 38) $1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18$

(2) (Páginas: 46 - 47 - 48) $7, 8, 9, 10, 11, 17, 21$

EXERCÍCIOS

1. Se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

calcule:

(a) $2A$ (b) $A + B$ (c) $2A - 3B$
(d) $(2A)^T - (3B)^T$ (e) AB (f) BA
(g) $A^T B^T$ (h) $(BA)^T$

2. Para cada um dos pares de matrizes dados a seguir, determine se é ou não possível efetuar a m[ul]tiplicação da primeira matriz pela segunda. Se for possível, efetue a multiplicação.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. Para cada um dos pares no Exercício 2 é possível multiplicar a segunda matriz pela prime[ira?] Qual o tamanho da matriz produto?

4. Escreva cada um dos sistemas a seguir como uma equação matricial.

(a) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 5 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= \end{aligned}$

5. Se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

verifique que:

(a) $5A = 3A + 2A$ (b) $6A = 3(2A)$ (c) $(A^T)^T = A$

6. Se

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

verifique que:

(a) $A + B = B + A$ (b) $3(A + B) = 3A + 3B$ (c) $(A + B)^T = A^T + B^T$

7. Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

verifique que

(a) $3(AB) = (3A)B = A(3B)$ (b) $(AB)^T = B^T A^T$

8. Se

verifique que:

9. Prove a associativi

$A =$

e mostre que

10. Seja

Calcule A^2 e A^3. O

11. Seja

Calcule A^2 e A^3. O

12. Seja

Mostre que $A^n = O$

13. Encontre matrizes

14. Encontre matrizes

15. A matriz

tem a propriedade c
Prove sua resposta.

16. O produto de duas

17. Seja A uma matriz

(a) Explique por q
(b) Mostre que A^T

8. Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

verifique que:

(a) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(b) $(AB)C = A(BC)$
(c) $A(B + C) = AB + AC$
(d) $(A + B)C = AC + BC$

9. Prove a associatividade para a multiplicação de matrizes 2×2, isto é, considere

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

e mostre que

$$(AB)C = A(BC)$$

10. Seja

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calcule A^2 e A^3. O que deve ser A^n?

11. Seja

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calcule A^2 e A^3. O que devem ser A^{2n} e A^{2n+1}?

12. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostre que $A^n = O$ para $n \geq 4$.

13. Encontre matrizes A e B 2×2 diferentes da matriz nula para as quais $AB = O$.

14. Encontre matrizes não-nulas A, B, C tais que

$$AC = BC \quad \text{e} \quad A \neq B$$

15. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

tem a propriedade que $A^2 = O$. É possível para uma matriz simétrica 2×2 ter essa propriedade? Prove sua resposta.

16. O produto de duas matrizes simétricas é necessariamente simétrico? Prove sua resposta.

17. Seja A uma matriz $m \times n$.

(a) Explique por que é possível efetuar as multiplicações A^TA e AA^T.
(b) Mostre que A^TA e AA^T são ambas simétricas.

18. Sejam A e B matrizes simétricas $n \times n$. Prove que $AB = BA$ se e somente se AB também é sim trica.

19. Na Aplicação 1, suponha que João perdeu 4 quilos. Se ele continuar com o mesmo programa exercícios, quantas calorias vai queimar a cada dia?

20. Na Aplicação 3, quantas mulheres estarão casadas e quantas estarão solteiras depois de 3 ano

21. Considere a matriz

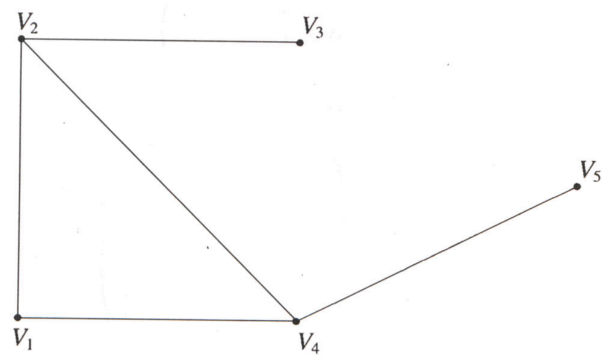
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Desenhe um grafo que tenha A como matriz de adjacência. Não se esqueça de marcar vértices no gráfico.

(b) Analisando o grafo, determine o número de caminhos de comprimento 2 de V_2 a V_3 e de a V_5.

(c) Calcule a segunda linha de A^3 e use-a para determinar o número de caminhos de comp mento 3 de V_2 a V_3 e de V_2 a V_5.

22. Considere o grafo



(a) Encontre a matriz de adjacência A do grafo.

(b) Calcule A^2. O que os elementos da primeira linha de A^2 lhe dizem sobre os caminhos comprimento 2 que começam em V_1?

(c) Calcule A^3. Quantos caminhos de comprimento 3 existem de V_2 a V_4? Quantos caminhos comprimento menor ou igual a 3 existem de V_2 a V_4?

23. Seja A uma matriz 2×2 com $a_{11} \neq 0$ e seja $a = a_{21}/a_{11}$. Mostre que A pode ser fatorada em u produto da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Qual o valor de b?

4 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

Vamos estudar, nesta seção, tipos especiais de matrizes, como matrizes triangulares, diagonais e ele mentares. Esses tipos especiais de matrizes têm um papel importante na solução de equações matriciai Começamos considerando uma matriz especial I que age como a identidade multiplicativa, isto é,

$$IA = AI = A$$

para toda matriz A $n \times n$.

A MATRIZ IDENTID

Uma matriz muito import $I = (\delta_{ij})$, onde

Se A é qualquer matriz n de matrizes $n \times n$ e cons

e

Em geral, se B é uma mat

Notação. O conjunto de *são n* e é denotado por R^n. ção da equação matricial equações matriciais, é ma $n \times 1$), em vez de vetor lin cula em negrito:

Seguindo essa convenção, um sistema de equações li

Dada uma matriz A m coluna. Vamos denotar a principalmente com colun Como as referências a vet vetores linhas. Resumindo

e as colunas, por

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

□

EXERCÍCIOS

1. Quais das matrizes a seguir são matrizes elementares? Classifique cada matriz elementar por tipo.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Encontre a inversa de cada uma das matrizes do Exemplo 1. Para cada matriz elementar, verifique que sua inversa é uma matriz elementar do mesmo tipo.

3. Para cada par de matrizes dado a seguir, encontre uma matriz elementar E tal que $EA = B$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

4. Para cada par de matrizes dado a seguir, encontre uma matriz elementar E tal que $AE = B$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

5. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Encontre uma matriz elementar E tal que $EA = B$.
(b) Encontre uma matriz elementar F tal que $FB = C$.
(c) C é equivalente por linhas a A? Explique.

6. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Encontre matrizes elementares E_1, E_2, E_3 tais que

$$E_3E_2E_1A = U$$

onde U é uma matriz triangular superior.

(b) Determine as inversas de E_1, E_2, E_3 e defina $L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$. Que tipo de matriz é L? Verifique que $A = LU$.

7. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Verifique que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Use A^{-1} para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para as seguintes escolhas de $\mathbf{b}$:

(i) $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$
(ii) $\mathbf{b} = (1, 2, 3)^T$
(iii) $\mathbf{b} = (-2, 1, 0)^T$

8. Encontre a inversa de cada uma das matrizes a seguir.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

9. Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcule A^{-1} e use-a para:
(a) encontrar uma matriz X 2×2 tal que $AX = B$;
(b) encontrar uma matriz Y 2×2 tal que $YA = B$.

10. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolva cada uma das equações matriciais a seguir.

(a) $AX + B = C$
(b) $XA + B = C$
(c) $AX + B = X$
(d) $XA + C = X$

11. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Mostre que, se $d = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, então

$$A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

12. Seja A uma matriz não-singular. Mostre que A^{-1} também é não-singular e que $(A^{-1})^{-1} = A$.

13. Prove que, se A é invertível, então A^T é invertível e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

[*Sugestão:* $(AB)^T = B^TA^T$.]

14. Seja A uma matriz invertível $n \times n$. Use indução matemática para provar que A^m é invertível e que

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$$

para $m = 1, 2, 3, \ldots$.

15. A transposta de uma matriz elementar é uma matriz elementar do mesmo tipo? O produto de duas matrizes elementares é uma matriz elementar?

16. Seja U e R matrizes triangulares superiores $n \times n$ e seja $T = UR$. Mostre que T também é triangular superior e que $t_{jj} = u_{jj}r_{jj}$ para $j = 1, \ldots, n$.

17. Sejam A e B matrizes $n \times n$ e seja $C = AB$. Prove que, se B é singular, então C tem que ser singular.

[*Sugestão:* Use o Teorema 1.4.3.]

18. Seja U uma matriz triangular superior com todos os elementos diagonais diferentes de zero.
(a) Explique por que U tem que ser invertível.
(b) Explique por que U^{-1} tem que ser triangular superior.

19. Sejam A uma matriz invertível $n \times n$ e B uma matriz $n \times r$. Mostre que a forma escada reduzida por linhas de $(A|B)$ é $(I|C)$, onde $C = A^{-1}B$.

20. Em geral, a multiplicação de matrizes não é comutativa (isto é, $AB \neq BA$). No entanto, existem certos casos especiais em que a comutatividade é válida. Mostre que:
(a) se D_1 e D_2 são matrizes diagonais, então $D_1D_2 = D_2D_1$;
(b) se A é uma matriz $n \times n$ e

$$B = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_kA^k$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_k$ são escalares, então $AB = BA$.

21. Mostre que, se A é uma matriz simétrica invertível, então A^{-1} também é simétrica.

22. Prove que, se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A.

23. (a) Prove que, se A é equivalente por linhas a B e se B é equivalente por linhas a C, então A é equivalente por linhas a C.
(b) Prove que duas matrizes invertíveis $n \times n$ quaisquer são equivalentes por linha.

24. Prove que B é equivalente por linhas a A se e somente se existe uma matriz invertível M tal que $B = MA$.

25. Dado um vetor $\mathbf{x} \in R^{n+1}$, a matriz V $(n+1) \times (n+1)$, definida por

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 1 \\ x_i^{j-1} & \text{para } j = 2, \ldots, n+1 \end{cases}$$

é chamada de matriz de Vandermonde.
(a) Mostre que, se

$$V\mathbf{c} = \mathbf{y}$$

e

$$p(x) = c_1 + c_2x + \cdots + c_{n+1}x^n$$

então

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

(b) Suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ são todos distintos. Mostre que, se $\mathbf{c}$ é uma solução de $V\mathbf{x} = \mathbf{0}$, então os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ têm que ser todos nulos e, portanto, V tem que ser invertível.

5 MATRIZES EM BLOCO

Muitas vezes é útil pensar em uma matriz como sendo composta de um número de submatrizes. Uma matriz A pode ser subdividida em matrizes menores desenhando-se retas horizontais entre as linhas e retas verticais entre as colunas. Por exemplo, considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Se desenharmos retas entre a segunda e terceira linhas e entre a terceira e quarta colunas, dividiremos A em quatro submatrizes A_{11}, A_{12}, A_{21} e A_{22}.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Um modo útil de dividir uma matriz é em colunas. Por exemplo, se

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos dividir B em três submatrizes colunas:

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \left(\begin{array}{c|c|c} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Suponha que temos uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e que queremos calcular a segunda coluna de AB sem calcular o produto inteiro. Como a segunda coluna de AB é determinada por $\mathbf{b}_2$, basta calcular

$$A\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Em geral, se A é uma matriz $m \times n$ e $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r)$ é uma matriz $n \times r$, então a j-ésima coluna de AB é $A\mathbf{b}_j$. Isso é uma conseqüência direta da definição de multiplicação de matrizes. Se $C = AB$, então

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

e portanto

$$\mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} \sum a_{1k}b_{kj} \\ \sum a_{2k}b_{kj} \\ \vdots \\ \sum a_{mk}b_{kj} \end{pmatrix} = A\mathbf{b}_j$$

Logo,

$$\boxed{AB = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \ldots, A\mathbf{b}_r)}$$