ÁLGEBRA LINEAR

CM 005 - Eng. Industrial Madereira

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 4: Espaços Vetoriais

Esta lista está baseada nos exercícios do livro *Álgebra Linear com Amplicações* de Steven J. Leon.

Resolva os exercícios:

(1) (Páginas: 88 - 89) $3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13$

(2) (Páginas: 95 - 96 - 97) $1, 2, 3, 4, 6, 8, 17, 18, 19$

Observação 1 *Um conjunto V (não vazio) é dito espaço vetorial (real) se nele estão definidas duas operações*

$$V \times V \ni (u, v) \longmapsto u + v \in V \quad e \quad \mathbb{R} \times V \ni (\alpha, v) \longmapsto \alpha \cdot v \in V,$$

tais que:

(S_1) $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$;

(S_2) $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall u, v, w \in V$;

(S_3) existe $0 \in V$ *tal que* $u + 0 = u$, $\forall u \in V$;

(S_4) $\forall u \in V$ *existe um* $-u \in V$ *tal que* $u + (-u) = 0$;

(P_1) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, $\forall u, v \in V$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(P_2) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$, $\forall u \in V$ *e* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(P_3) $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$, $\forall u \in V$ *e* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(P_4) $1 \cdot u = u$, $\forall u \in V$.

Observação 2 *Lembre-se que o núcleo de uma matriz $A_{m \times n}$ é o conjunto*

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ A \cdot x^T = 0\},$$

ou seja, as soluções do sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{mn} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Desenhe um gráfico ilustrando como $\mathbf{x}_3$ pode ser construído geometricamente usando $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$. Use esse gráfico para dar uma interpretação geométrica da sua resposta em (b).

2. Repita o Exercício 1 para os vetores $\mathbf{x}_1 = (2, 1)^T$ e $\mathbf{x}_2 = (6, 3)^T$.

3. Seja C o conjunto dos números complexos. Defina a soma em C por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

e defina a multiplicação por um escalar por

$$\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi$$

para todos os números reais α. Mostre que C é um espaço vetorial em relação a essas operações.

4. Mostre que $R^{m\times n}$, com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar, satisfaz os oito axiomas de espaços vetoriais.

5. Mostre que $C[a, b]$, com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar, satisfaz os oito axiomas de espaços vetoriais.

6. Seja P o conjunto de todos os polinômios. Mostre que P, com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar para funções, forma um espaço vetorial.

7. Mostre que o elemento $\mathbf{0}$ de um espaço vetorial é único.

8. Sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ vetores em um espaço vetorial V. Mostre que, se

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$$

então $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

9. Seja V um espaço vetorial e seja $\mathbf{x} \in V$. Mostre que:
(a) $\beta\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todos os escalares β;
(b) se $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

10. Seja S o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. Defina a multiplicação por um escalar e a soma em S por

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$

Usamos o símbolo $\oplus$ para denotar a soma nesse sistema para evitar confusão com a soma usual $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ de vetores linhas. Mostre que S, junto com a multiplicação usual por um escalar e a operação $\oplus$, não é um espaço vetorial. Quais dos oito axiomas não são válidos?

11. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais com a soma definida por

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e a multiplicação por um escalar definida por

$$\alpha \circ (x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$

Como a multiplicação por um escalar é definida de maneira diferente da usual, usamos um símbolo diferente para evitar confusão com a multiplicação usual de um vetor linha por um escalar. V é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

12. Denote por R^+ o conjunto dos números reais positivos. Defina a operação de multiplicação por um escalar por

$$\alpha \circ x = x^\alpha$$

para cada $x \in R^+$ e para cada número real α. Defina a operação de soma por

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{para todos} \quad x, y \in R^+$$

Então, para esse sistema, o produto do escalar -3 por ½ é dado por

$$-3 \circ \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

e a soma de 2 com 5 é dada por

$$2 \oplus 5 = 2 \cdot 5 = 10$$

R^+ é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

ruído geometricamente usando $\mathbf{x}_1$ e
rica da sua resposta em (b).
$3)^T$.
em C por
$b + d)i$

torial em relação a essas operações.
plicação por um escalar, satisfaz os

iplicação por um escalar, satisfaz os

om as operações usuais de soma e
o vetorial.

:, se

:ais. Defina a multiplicação por um

$x_2)$

$_1, 0)$
a evitar confusão com a soma usual
:ação usual por um escalar e a ope-
não são válidos?
eais com a soma definida por
$_2 + y_2)$

liferente da usual, usamos um sím-
l de um vetor linha por um escalar
que sua resposta.
na a operação de multiplicação por

ão de soma por
$\in R^+$
ado por

ique sua resposta.

13. Seja R o conjunto de todos os números reais. Defina a multiplicação por um escalar por

$$\alpha x = \alpha \cdot x \qquad \text{(a multiplicação usual de números reais)}$$

e a soma, denotada por $\oplus$, por

$$x \oplus y = \max(x, y) \qquad \text{(o máximo entre dois números)}$$

R é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

14. Denote por Z o conjunto de todos os números inteiros com a soma definida da maneira usual e a multiplicação por um escalar definida por

$$\alpha \circ k = [[\alpha]] \cdot k \quad \text{para todos} \quad k \in Z$$

onde $[[\alpha]]$ denota o maior inteiro menor ou igual a α. Por exemplo,

$$2{,}25 \circ 4 = [[2{,}25]] \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$$

Mostre que Z não é um espaço vetorial em relação a essas operações. Quais dos axiomas não são válidos?

15. Denote por S o conjunto de todas as seqüências infinitas de números reais com a multiplicação por um escalar e a soma definidas por

$$\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$$

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

Mostre que S é um espaço vetorial.

16. Podemos definir uma bijeção entre os elementos de P_n e de R^n por

$$p(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n)^T = \mathbf{a}$$

Mostre que, se $p \leftrightarrow \mathbf{a}$ e $q \leftrightarrow \mathbf{b}$, então

(a) $\alpha p \leftrightarrow \alpha\mathbf{a}$ qualquer que seja o escalar α;

(b) $p + q \leftrightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

[Em geral, dois espaços vetoriais são ditos *isomorfos* se existe uma bijeção entre eles que preserva a multiplicação por um escalar e a soma como em (a) e (b).]

2 SUBESPAÇOS

Dado um espaço vetorial V, é muitas vezes possível formar um outro espaço vetorial usando um subconjunto S de V e as operações de V. Como V é um espaço vetorial, as operações de soma e multiplicação por um escalar sempre produzem um outro vetor em V. Para um novo sistema, usando um subconjunto S de V, ser um espaço vetorial, o conjunto S tem que ser fechado em relação às operações de soma e multiplicação por um escalar. Em outras palavras, a soma de dois elementos em S tem que ser sempre um elemento de S e a multiplicação de um elemento de S por um escalar tem que pertencer sempre a S.

EXEMPLO 1. Seja $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 = 2x_1 \right\}$. S é um subconjunto de R^2. Se $\begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix}$ é um elemento qualquer de S e α é um escalar arbitrário, então

$$\alpha \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha c \\ 2\alpha c \end{pmatrix}$$

é um elemento de S. Se $\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix}$ são dois elementos arbitrários de S, então sua soma

$$\begin{pmatrix} a + b \\ 2a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ 2(a + b) \end{pmatrix}$$

O item (d) pode ser resolvido de maneira semelhante a (b). Se

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= a \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= b \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= c \end{aligned}$$

Nesse caso, no entanto, a matriz de coeficientes é singular. O método de Gauss nos leva a um sistema da forma

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= a \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 &= \frac{2a - b}{3} \\ 0 &= 2a - 3c + 5b \end{aligned}$$

Se

$$2a - 3c + 5b \neq 0$$

então o sistema é incompatível. Portanto, para a maioria das escolhas para a, b, c, é impossível expressar $(a, b, c)^T$ como uma combinação linear de $(1, 2, 4)^T$, $(2, 1, 3)^T$, $(4, -1, 1)^T$. Os vetores não geram R^3. □

EXEMPLO 12. Os vetores $1 - x^2$, $x + 2$ e x^2 geram P_3. Então, se $ax^2 + bx + c$ é qualquer polinômio em P_3, é possível encontrar escalares α_1, α_2 e α_3 tais que

$$ax^2 + bx + c = \alpha_1(1 - x^2) + \alpha_2(x + 2) + \alpha_3 x^2$$

De fato,

$$\alpha_1(1 - x^2) + \alpha_2(x + 2) + \alpha_3 x^2 = (\alpha_3 - \alpha_1)x^2 + \alpha_2 x + (\alpha_1 + 2\alpha_2)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \alpha_3 - \alpha_1 &= a \\ \alpha_2 &= b \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= c \end{aligned}$$

e resolvendo, obtemos $\alpha_1 = c - 2b$, $\alpha_2 = b$ e $\alpha_3 = a + c - 2b$. □

Vimos, no Exemplo 11(a), que os vetores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $(1, 2, 3)^T$ geram R^3. É claro que R^3 poderia ser gerado apenas pelos vetores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. O vetor $(1, 2, 3)^T$ não é realmente necessário. Na próxima seção, vamos considerar o problema de encontrar conjuntos geradores mínimos para um espaço vetorial V (isto é, conjuntos geradores que contêm o menor número possível de vetores).

EXERCÍCIOS

1. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de R^2.

(a) $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1 + x_2 = 0\}$

(b) $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1 x_2 = 0\}$

(c) $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1 = 3x_2\}$

(d) $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1 = 3x_2 + 1\}$

2. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de R^3.

(a) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 + x_3 = 1\}$

(b) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 = x_2 = x_3\}$

(c) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_3 = x_1 + x_2\}$

(d) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$

3. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $R^{2\times 2}$.

(a) O conjunto de todas as matrizes diagonais 2×2.

(b) O conjunto de todas as matrizes triangulares inferiores 2×2.

(c) O conjunto de todas as matrizes A 2×2 tais que $a_{12} = 1$.

(d) O conjunto de todas as matrizes B 2×2 tais que $b_{11} = 0$.

(e) O conjunto de todas as matrizes simétricas 2×2.

(f) O conjunto de todas as matrizes singulares 2×2.

4. Determine o núcleo de cada uma das matrizes a seguir.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

5. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de P_4. (Cuidado!)

(a) O conjunto dos polinômios em P_4 de grau par.

(b) O conjunto dos polinômios de grau 3.

(c) O conjunto dos polinômios $p(x)$ em P_4 tais que $p(0) = 0$.

(d) O conjunto dos polinômios em P_4 que têm pelo menos uma raiz real.

6. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $C[-1, 1]$.

(a) O conjunto das funções f em $C[-1, 1]$ tais $f(-1) = f(1)$.

(b) O conjunto das funções ímpares em $C[-1, 1]$.

(c) O conjunto das funções não-decrescentes em $[-1, 1]$.

(d) O conjunto das funções f em $C[-1, 1]$ tais $f(-1) = 0$ *e* $f(1) = 0$.

(e) O conjunto das funções f em $C[-1, 1]$ tais $f(-1) = 0$ *ou* $f(1) = 0$.

7. Mostre que $C^n[a, b]$ é um subespaço de $C[a, b]$.

8. Seja A um vetor particular em $R^{2\times 2}$. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $R^{2\times 2}$.

(a) $S_1 = \{B \in R^{2\times 2} \mid AB = BA\}$

(b) $S_2 = \{B \in R^{2\times 2} \mid AB \neq BA\}$

(c) $S_3 = \{B \in R^{2\times 2} \mid BA = O\}$

9. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um conjunto gerador para R^2.

(a) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ (b) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$ (c) $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

(d) $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$ (e) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

10. Quais dos conjuntos a seguir são conjuntos geradores para R^3? Justifique suas respostas.

(a) $\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 0, 1)^T\}$ (b) $\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 2, 3)^T\}$

(c) $\{(2, 1, -2)^T, (3, 2, -2)^T, (2, 2, 0)^T\}$ (d) $\{(2, 1, -2)^T, (-2, -1, 2)^T, (4, 2, -4)^T\}$

(e) $\{(1, 1, 3)^T, (0, 2, 1)^T\}$

11. Sejam

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) $\mathbf{x} \in [\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}]$?
(b) $\mathbf{y} \in [\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}]$?
Justifique suas respostas.

12. Quais dos conjuntos a seguir são conjuntos geradores para P_3? Justifique suas respostas.
(a) $\{1, x^2, x^2 - 2\}$ (b) $\{2, x^2, x, 2x + 3\}$
(c) $\{x + 2, x + 1, x^2 - 1\}$ (d) $\{x + 2, x^2 - 1\}$

13. Em $R^{2\times 2}$, sejam

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostre que $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ geram $R^{2\times 2}$.

14. Seja S o espaço vetorial das seqüências infinitas definido no Exercício 15 da Seção 1. Seja S_0 o conjunto das seqüências $\{a_n\}$ tais que $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Mostre que S_0 é um subespaço de S.

15. Prove que, se S é um subespaço de R^1, então $S = \{\mathbf{0}\}$ ou $S = R^1$.

16. Seja A uma matriz $n \times n$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
(a) $N(A) = \{\mathbf{0}\}$;
(b) A é invertível;
(c) para cada $\mathbf{b} \in R^n$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução.

17. Sejam U e V subespaços de um espaço vetorial W. Prove que $U \cap V$ também é um subespaço de W.

18. Seja S o subespaço de R^2 gerado por $\mathbf{e}_1$ e seja T o subespaço de R^2 gerado por $\mathbf{e}_2$. $S \cup T$ é um subespaço de R^2? Explique.

19. Sejam U e V subespaços de um espaço vetorial W. Defina

$$U + V = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad \text{onde } \mathbf{u} \in U \text{ e } \mathbf{v} \in V\}$$

Mostre que $U + V$ é um subespaço de W.

3 INDEPENDÊNCIA LINEAR

Nesta seção, vamos olhar mais de perto a estrutura de um espaço vetorial. Para começar, vamos nos restringir a espaços vetoriais que podem ser gerados por um número finito de elementos. Cada vetor no espaço pode ser construído a partir dos elementos nesse conjunto gerador, usando-se apenas as operações de soma e multiplicação por um escalar. É desejável encontrar um conjunto gerador "mínimo". Por mínimo, queremos dizer um conjunto gerador sem elementos desnecessários (isto é, todos os elementos no conjunto são necessários para se gerar o espaço vetorial). Para ver como encontrar um conjunto gerador mínimo, é preciso considerar como os vetores no conjunto "dependem" um do outro. Vamos, então, introduzir os conceitos de *dependência linear* e *independência linear*. Esses conceitos simples vão nos dar a chave para entender a estrutura de espaços vetoriais.

Vamos considerar os seguintes vetores em R^3:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Seja S o subespaço de R^3 gerado por $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. Observe que S pode ser representado, de fato, pelos vetores $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, já que $\mathbf{x}_3$ pertence ao espaço gerado por $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$.

(1) $$\mathbf{x}_3 = 3\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2$$

Qualquer combinação linear de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ pode ser reduzida a uma combinação linear de $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$:

$$\begin{aligned} \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 &= \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3(3\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2) \\ &= (\alpha_1 + 3\alpha_3)\mathbf{x}_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$