ÁLGEBRA LINEAR

CM 005 - Eng. Industrial Madereira

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 5: Conjuntos L.I., L.D, geradores e bases

Esta lista está baseada nos exercícios do livro *Álgebra Linear com Amplicações* de Steven J. Leon.

Resolva os exercícios:

(1) (Páginas: 96) $9, 10, 11, 12, 13$

(2) (Páginas: 105 - 106) TODOS

(3) (Páginas: 111 - 112) TODOS - EXCETO O 16 -

(4) (Páginas: 118 - 119) TODOS - EXCETO O 11 -

(c) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_3 = x_1 + x_2\}$

(d) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$

3. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $R^{2\times 2}$.

(a) O conjunto de todas as matrizes diagonais 2×2.

(b) O conjunto de todas as matrizes triangulares inferiores 2×2.

(c) O conjunto de todas as matrizes A 2×2 tais que $a_{12} = 1$.

(d) O conjunto de todas as matrizes B 2×2 tais que $b_{11} = 0$.

(e) O conjunto de todas as matrizes simétricas 2×2.

(f) O conjunto de todas as matrizes singulares 2×2.

4. Determine o núcleo de cada uma das matrizes a seguir.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

5. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de P_4. (Cuidado!)

(a) O conjunto dos polinômios em P_4 de grau par.

(b) O conjunto dos polinômios de grau 3.

(c) O conjunto dos polinômios $p(x)$ em P_4 tais que $p(0) = 0$.

(d) O conjunto dos polinômios em P_4 que têm pelo menos uma raiz real.

6. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $C[-1, 1]$.

(a) O conjunto das funções f em $C[-1, 1]$ tais $f(-1) = f(1)$.

(b) O conjunto das funções ímpares em $C[-1, 1]$.

(c) O conjunto das funções não-decrescentes em $[-1, 1]$.

(d) O conjunto das funções f em $C[-1, 1]$ tais $f(-1) = 0$ *e* $f(1) = 0$.

(e) O conjunto das funções f em $C[-1, 1]$ tais $f(-1) = 0$ *ou* $f(1) = 0$.

7. Mostre que $C^n[a, b]$ é um subespaço de $C[a, b]$.

8. Seja A um vetor particular em $R^{2\times 2}$. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um subespaço de $R^{2\times 2}$.

(a) $S_1 = \{B \in R^{2\times 2} \mid AB = BA\}$

(b) $S_2 = \{B \in R^{2\times 2} \mid AB \neq BA\}$

(c) $S_3 = \{B \in R^{2\times 2} \mid BA = O\}$

9. Determine se cada conjunto a seguir é ou não um conjunto gerador para R^2.

(a) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ (b) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$ (c) $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

(d) $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$ (e) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

10. Quais dos conjuntos a seguir são conjuntos geradores para R^3? Justifique suas respostas.

(a) $\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 0, 1)^T\}$ (b) $\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 2, 3)^T\}$

(c) $\{(2, 1, -2)^T, (3, 2, -2)^T, (2, 2, 0)^T\}$ (d) $\{(2, 1, -2)^T, (-2, -1, 2)^T, (4, 2, -4)^T\}$

(e) $\{(1, 1, 3)^T, (0, 2, 1)^T\}$

11. Sejam

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) $\mathbf{x} \in [\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}]$?
(b) $\mathbf{y} \in [\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}]$?
Justifique suas respostas.

12. Quais dos conjuntos a seguir são conjuntos geradores para P_3? Justifique suas respostas.
(a) $\{1, x^2, x^2 - 2\}$ (b) $\{2, x^2, x, 2x + 3\}$
(c) $\{x + 2, x + 1, x^2 - 1\}$ (d) $\{x + 2, x^2 - 1\}$

13. Em $R^{2\times 2}$, sejam

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostre que E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} geram $R^{2\times 2}$.

14. Seja S o espaço vetorial das seqüências infinitas definido no Exercício 15 da Seção 1. Seja S_0 o conjunto das seqüências $\{a_n\}$ tais que $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Mostre que S_0 é um subespaço de S.

15. Prove que, se S é um subespaço de R^1, então $S = \{\mathbf{0}\}$ ou $S = R^1$.

16. Seja A uma matriz $n \times n$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
(a) $N(A) = \{\mathbf{0}\}$;
(b) A é invertível;
(c) para cada $\mathbf{b} \in R^n$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução.

17. Sejam U e V subespaços de um espaço vetorial W. Prove que $U \cap V$ também é um subespaço de W.

18. Seja S o subespaço de R^2 gerado por $\mathbf{e}_1$ e seja T o subespaço de R^2 gerado por $\mathbf{e}_2$. $S \cup T$ é um subespaço de R^2? Explique.

19. Sejam U e V subespaços de um espaço vetorial W. Defina

$$U + V = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad \text{onde } \mathbf{u} \in U \text{ e } \mathbf{v} \in V\}$$

Mostre que $U + V$ é um subespaço de W.

3 INDEPENDÊNCIA LINEAR

Nesta seção, vamos olhar mais de perto a estrutura de um espaço vetorial. Para começar, vamos nos restringir a espaços vetoriais que podem ser gerados por um número finito de elementos. Cada vetor no espaço pode ser construído a partir dos elementos nesse conjunto gerador, usando-se apenas as operações de soma e multiplicação por um escalar. É desejável encontrar um conjunto gerador "mínimo". Por mínimo, queremos dizer um conjunto gerador sem elementos desnecessários (isto é, todos os elementos no conjunto são necessários para se gerar o espaço vetorial). Para ver como encontrar um conjunto gerador mínimo, é preciso considerar como os vetores no conjunto "dependem" um do outro. Vamos, então, introduzir os conceitos de *dependência linear* e *independência linear*. Esses conceitos simples vão nos dar a chave para entender a estrutura de espaços vetoriais.

Vamos considerar os seguintes vetores em R^3:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Seja S o subespaço de R^3 gerado por $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$. Observe que S pode ser representado, de fato, pelos vetores $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, já que $\mathbf{x}_3$ pertence ao espaço gerado por $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$.

(1) $$\mathbf{x}_3 = 3\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2$$

Qualquer combinação linear de $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ pode ser reduzida a uma combinação linear de $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$:

$$\begin{aligned} \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 &= \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3(3\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2) \\ &= (\alpha_1 + 3\alpha_3)\mathbf{x}_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

$$W[x^2, x|x|] = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} \equiv 0$$

Como o wronskiano é identicamente nulo, ele não nos dá informação sobre se as funções são linearmente independentes ou não. Para responder essa pergunta, suponha que

$$c_1x^2 + c_2x|x| = 0$$

para todo x em $[-1, 1]$. Em particular, para $x = 1$ e para $x = -1$, temos

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 - c_2 = 0$$

e a única solução desse sistema é $c_1 = c_2 = 0$. Portanto, as funções x^2 e $x|x|$ são linearmente independentes em $C[-1, 1]$, apesar de $W[x^2, x|x|] \equiv 0$.

Esse exemplo mostra que a recíproca do Teorema 3.3.3 não é válida. □

EXEMPLO 8. Mostre que os vetores $1, x, x^2, x^3$ são linearmente independentes em P_4.

SOLUÇÃO

$$W[1, x, x^2, x^3] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

Como $W[1, x, x^2, x^3] \not\equiv 0$, os vetores são linearmente independentes. □

EXERCÍCIOS

1. Determine se os vetores dados são ou não linearmente independentes em R^2.

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Determine se os vetores dados são ou não linearmente independentes em R^3.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Descreva geometricamente o espaço gerado por cada um dos conjuntos de vetores no Exercício 2.

4. Determine se os vetores dados são ou não linearmente independentes em $R^{2\times 2}$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. Determine se os vetores dados são ou não linearmente independentes em P_3.

(a) $1, x^2, x^2 - 2$ (b) $2, x^2, x, 2x + 3$
(c) $x + 2, x + 1, x^2 - 1$ (d) $x + 2, x^2 - 1$

6. Mostre que os vetores dados são linearmente independentes em $C\,[0, 1]$.

(a) $\cos \pi x, \operatorname{sen} \pi x$ (b) $x^{3/2}, x^{5/2}$
(c) $1, e^x + e^{-x}, e^x - e^{-x}$ (d) e^x, e^{-x}, e^{2x}

7. Determine se os vetores $\cos x$, 1, $\operatorname{sen}^2(x/2)$ são linearmente independentes em $C\,[-\pi, \pi]$.

8. Considere os vetores $\cos(x + \alpha)$ e $\operatorname{sen} x$ em $C\,[-\pi, \pi]$. Para que valores de α os dois vetores vão ser linearmente dependentes? Interprete graficamente sua resposta.

9. Dadas as funções $2x$ e $|x|$, mostre que:
(a) esses dois vetores são linearmente independentes em $C\,[-1, 1]$;
(b) esses dois vetores são linearmente dependentes em $C\,[0, 1]$.

10. Prove que qualquer conjunto finito de vetores contendo o vetor nulo tem que ser linearmente dependente.

11. Sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ dois vetores em um espaço vetorial V. Mostre que $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente dependentes se e somente se um dos vetores é um múltiplo do outro.

12. Prove que qualquer subconjunto não-vazio de um conjunto linearmente independente de vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ também é linearmente independente.

13. Seja A uma matriz $m \times n$. Mostre que, se os vetores colunas de A são linearmente independentes, então $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

[***Sugestão:*** para todo $\mathbf{x} \in R^n$, $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$.]

14. Sejam $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ vetores linearmente independentes em R^n e seja A uma matriz invertível $n \times n$. Defina $\mathbf{y}_i = A\mathbf{x}_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Mostre que $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ são linearmente independentes.

15. Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ um conjunto gerador para o espaço vetorial V e seja $\mathbf{v}$ um outro vetor qualquer em V. Mostre que $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes.

16. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores linearmente independentes em um espaço vetorial V. Mostre que $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ não podem gerar V.

4 BASE E DIMENSÃO

Mostramos, na Seção 3, que um conjunto gerador para um espaço vetorial é mínimo se seus elementos são linearmente independentes. Os elementos de um conjunto gerador mínimo formam as peças básicas para a construção de todo o espaço vetorial e, por causa disso, dizemos que eles formam uma "base" para o espaço vetorial.

Definição. Os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ formam uma **base** para um espaço vetorial V se e somente se

(i) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes;
(ii) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ geram V.

EXEMPLO 1. A "base canônica" para o R^3 é $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. No entanto, poderíamos usar outra base qualquer, como, por exemplo, $\{(1, 1, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (2, 0, 1)^T\}$ ou $\{(1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T\}$. Veremos, em breve, que qualquer base para R^3 tem exatamente três elementos. □

EXEMPLO 2. Considere o conjunto $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ em $R^{2\times 2}$, onde

EXEMPLO 4. Mostre que $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ é uma base para R^3.

SOLUÇÃO. Como dim $R^3 = 3$, basta mostrar que esses três vetores são linearmente independentes. Isso segue do fato de que

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

□

***Teorema* 3.4.4.** *Se V é um espaço vetorial de dimensão $n > 0$, então:*

(i) *nenhum conjunto com menos de n vetores pode gerar V;*
(ii) *qualquer subconjunto linearmente independente com menos de n elementos pode ser estendido para formar uma base para V;*
(iii) *podem-se retirar elementos de qualquer conjunto gerador contendo mais de n vetores de modo a se obter uma base para V.*

Demonstração. A observação (i) segue pelo mesmo argumento utilizado no Teorema 3.4.3 para provar (II). Para provar (ii), suponha que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ são vetores linearmente independente e que $k < n$. De (i), $[\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}]$ é um subespaço próprio de V, logo existe um vetor $\mathbf{v}_{k+1}$ que está em V, mas não pertence a $[\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}]$. Temos, então, que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$ são linearmente independentes. Se $k + 1 < n$, podemos estender $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$, da mesma maneira, a um conjunto linearmente independente com $k + 2$ vetores. Esse processo pode ser continuado até obtermos um conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vetores linearmente independentes.

Para provar (iii), suponha que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ geram V e que $m > n$. Pelo Teorema 3.4.1, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes. Temos, então, que um dos vetores, por exemplo, $\mathbf{v}_m$, pode ser escrito como uma combinação linear dos outros. Logo, se retirarmos $\mathbf{v}_m$ do conjunto, os $m - 1$ vetores restantes ainda geram V. Se $m - 1 > n$, podemos continuar a retirar vetores do conjunto até chegarmos a um conjunto gerador contendo n elementos. □

BASES CANÔNICAS

No Exemplo 1 dissemos que o conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ era a *base canônica* para R^3. Chamamos essa base de canônica por ela ser a mais natural para se representar vetores em R^3. Mais geralmente, a base canônica para R^n é o conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

A maneira mais natural de representar matrizes em $R^{2\times 2}$ é em termos da base $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ dada no Exemplo 2. Essa é, então, a base canônica para $R^{2\times 2}$.

A maneira padrão de representar um polinômio em P_n é em termos das funções $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ e, por isso, a base canônica para P_n é $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$.

Embora essas bases canônicas pareçam ser as mais simples e naturais para se usar, elas não são as bases mais apropriadas para muitos problemas aplicados. (Veja, por exemplo, o problema de mínimos quadráticos no Cap. 5 ou as aplicações de autovalores no Cap. 6.) De fato, a chave na resolução de muitos problemas aplicados é mudar de uma das bases canônicas para uma base que é, de alguma forma, mais natural para a aplicação em questão. Uma vez resolvido o problema na nova base, é fácil voltar e representar a solução em termos da base canônica. Na próxima seção vamos aprender a mudar de uma base para outra.

EXERCÍCIOS

1. Indique se os vetores dados no Exercício 1 da Seção 3 formam ou não uma base para R^2.
2. Indique se os vetores dados no Exercício 2 da Seção 3 formam ou não uma base para R^3.

3. Considere os vetores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ formam uma base para R^2.
(b) Por que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ têm que ser linearmente dependentes?
(c) Qual a dimensão de $[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}]$?

4. Considere os vetores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Qual a dimensão de $[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}]$?

5. Considere

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ são linearmente dependentes.
(b) Mostre que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ são linearmente independentes.
(c) Qual a dimensão de $[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}]$?
(d) Descreva geometricamente $[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}]$.

6. Alguns dos conjuntos no Exercício 2 da Seção 2 formavam subespaços de R^3. Em cada um desses casos, encontre uma base para o subespaço e determine sua dimensão.

7. Encontre uma base para o subespaço S de R^4 formado por todos os vetores da forma $(a + b, a - b + 2c, b, c)^T$, onde a, b e c são números reais. Qual a dimensão de S?

8. Considere os vetores $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)^T$ e $\mathbf{x}_2 = (3, -1, 4)^T$.
(a) $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ geram R^3? Explique.
(b) Seja $\mathbf{x}_3$ um terceiro vetor em R^3 e defina $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$. Que condição (ou condições) X tem que satisfazer para que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ formem uma base para R^3?
(c) Encontre um terceiro vetor $\mathbf{x}_3$ que estenda o conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ a uma base para R^3.

9. Os vetores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geram R^3. Retire algum (ou alguns) elementos de $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$ de modo a obter uma base para R^3.

10. Seja S o subespaço de P_3 formado por todos os polinômios da forma $ax^2 + bx + 2a + 3b$. Encontre uma base para S.

11. Alguns dos conjuntos no Exercício 3 da Seção 2 formavam subespaços de $R^{2\times2}$. Em cada um desses casos, encontre uma base para o subespaço e determine sua dimensão.

12. Encontre a dimensão do espaço gerado por 1, $\cos 2x$, $\cos^2 x$ em $C[-\pi, \pi]$.

13. Encontre a dimensão do subespaço de P_3 gerado pelos vetores dados em cada um dos itens a seguir.

(a) $x, x - 1, x^2 + 1$
(b) $x, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$
(c) $x^2, x^2 - x - 1, x + 1$
(d) $2x, x - 2$

14. Seja S o subespaço de P_3 formado por todos os polinômios $p(x)$ satisfazendo $p(0) = 0$, e seja T o subespaço de todos os polinômios $q(x)$ tais que $q(1) = 0$. Encontre bases para

(a) S (b) T (c) $S \cap T$

15. Seja U o subespaço de R^4 formado pelos vetores da forma $(u_1, u_2, 0, 0)^T$ e seja V o subespaço de

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A inversa de S vai ser a matriz que muda da base $[1, x, x^2]$ para a base $[1, 2x, 4x^2 - 2]$:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Dado qualquer $p(x) = a + bx + cx^2$ em P_3, para encontrar as coordenadas de $p(x)$ em relação a $[1, 2x, 4x^2 - 2]$, basta multiplicar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{4}c \end{pmatrix}$$

Logo,

$$p(x) = (a + \tfrac{1}{2}c) \cdot 1 + (\tfrac{1}{2}b) \cdot 2x + \tfrac{1}{4}c \cdot (4x^2 - 2)$$ □

Vimos que cada matriz mudança de base é invertível. De fato, podemos pensar em qualquer matriz invertível como uma matriz mudança de base. Se S é uma matriz invertível $n \times n$ e $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ é uma base ordenada para V, defina $[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n]$ por (3). Para ver que os $\mathbf{w}_j$ são linearmente independentes, suponha que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0}$$

De (3), tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j \right) \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$$

Pela independência linear dos $\mathbf{v}_i$, tem-se que

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

ou, equivalentemente,

$$S\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Como S é invertível, $\mathbf{x}$ tem que ser igual a $\mathbf{0}$. Logo, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ são linearmente independentes e, portanto, formam uma base para V. A matriz S é a matriz que efetua a mudança da base ordenada $[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n]$ para $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$.

Em muitos problemas aplicados é importante usar o tipo certo de base para a aplicação em questão. Veremos, no Cap. 5, que a chave para a resolução de problemas de mínimos quadráticos é usar um tipo especial de base, uma base *ortonormal*. No Cap. 6, vamos considerar um número de aplicações envolvendo *autovalores* e *autovetores* associados a uma matriz A $n \times n$. A chave para resolver esse tipo de problema é mudar para uma base para R^n formada por autovetores de A.

EXERCÍCIOS

1. Para um dos itens a seguir, encontre a matriz que corresponde à mudança da base $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ para a base $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 1)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (-1, 1)^T$
(b) $\mathbf{u}_1 = (1, 2)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (2, 5)^T$
(c) $\mathbf{u}_1 = (0, 1)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (1, 0)^T$

2. Para cada uma das bases ordenadas $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ no Exercício 1, encontre a matriz mudança de base de $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$.

3. Sejam $\mathbf{v}_1 = (3, 2)^T$ e $\mathbf{v}_2 = (4, 3)^T$. Para cada uma das bases ordenadas $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ no Exercício 1, encontre a matriz mudança de base de $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$.

4. Seja $E = [(5, 3)^T, (3, 2)^T]$ e sejam $\mathbf{x} = (1, 1)^T$, $\mathbf{y} = (1, -1)^T$ e $\mathbf{z} = (10, 7)^T$. Encontre os vetores de coordenadas $[\mathbf{x}]_E$, $[\mathbf{y}]_E$ e $[\mathbf{z}]_E$.

5. Sejam $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 2)^T$ e $\mathbf{u}_3 = (2, 3, 4)^T$.
(a) Encontre a matriz mudança de base de $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.
(b) Encontre as coordenadas de cada um dos vetores a seguir em relação a $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.

$$\text{(i)}\ (3, 2, 5)^T \qquad \text{(ii)}\ (1, 1, 2)^T \qquad \text{(iii)}\ (2, 3, 2)^T$$

6. Sejam $\mathbf{v}_1 = (4, 6, 7)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)^T$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 2)^T$ e sejam $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ os vetores dados no Exercício 5.
(a) Encontre a matriz mudança de base de $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.
(b) Se $\mathbf{x} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_3$, determine as coordenadas de $\mathbf{x}$ em relação a $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.

7. Considere

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Encontre vetores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ tais que S é a matriz mudança de base de $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$ para $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$.

8. Considere

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontre vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ tais que S é a matriz mudança de base de $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ para $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$.

9. Sejam $[x, 1]$ e $[2x - 1, 2x + 1]$ duas bases ordenadas para P_2.
(a) Encontre a matriz mudança de base que representa a mudança de coordenadas de $[2x - 1, 2x + 1]$ para $[x, 1]$.
(b) Encontre a matriz mudança de base que representa a mudança de coordenadas de $[x, 1]$ para $[2x - 1, 2x + 1]$.

10. Encontre a matriz mudança de base que representa a mudança de coordenadas em P_3 da base ordenada $[1, x, x^2]$ para a base ordenada

$$[1, 1 + x, 1 + x + x^2]$$

11. Sejam $E = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ e $F = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ duas bases ordenadas para R^n e defina

$$U = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n), \qquad V = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

Mostre que a matriz mudança de base de E para F pode ser determinada calculando-se a forma escada reduzida por linhas de $(U|V)$.

6 ESPAÇOS LINHA E COLUNA

Se A é uma matriz $m \times n$, cada linha de A é uma n-upla de números reais e pode ser considerada, portanto, como um vetor em $R^{1\times n}$. Vamos nos referir aos m vetores correspondentes às linhas de A como os *vetores linhas* de A. Analogamente, cada coluna de A pode ser considerada como um vetor em R^m e podemos associar à matriz A *n vetores colunas.*

Definição. Se A é uma matriz $m \times n$, o subespaço de $R^{1\times n}$ gerado pelos vetores linhas de A é chamado