

ÁLGEBRA LINEAR

CM 005 - Eng. Industrial Madereira

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA: Transformação Linear 1

Esta lista está baseada nos exercícios do livro *Álgebra Linear com Aplicações* de Steven J. Leon.

Resolva os exercícios:

- (1) (Páginas: 135, 136, 137) TODOS, EXCETO 10, 11, 12, 13.16

Como $\alpha v \in S$, $\alpha w \in L(S)$ e $L(S)$ é fechado sob a multiplicação por escalar. Se $w_1, w_2 \in L(S)$, existem $v_1, v_2 \in S$ tais que $L(v_1) = w_1$ e $L(v_2) = w_2$. Logo,

$$w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2)$$

e $L(S)$ é fechado sob a soma. □

EXEMPLO 11. Seja L a transformação linear de R^2 em R^2 definida por

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um vetor \mathbf{x} pertence ao núcleo de L se e somente se $x_1 = 0$. Logo, $\ker(L)$ é o subespaço unidimensional de R^2 gerado por \mathbf{e}_2 . Um vetor \mathbf{y} pertence à imagem de L se e somente se \mathbf{y} é um múltiplo de \mathbf{e}_1 . Logo, $L(R^2)$ é o subespaço unidimensional de R^2 gerado por \mathbf{e}_1 . □

EXEMPLO 12. Seja $L: R^3 \rightarrow R^2$ a transformação linear definida por

$$L(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)^T$$

e seja S o subespaço de R^3 gerado por \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_3 .

Se $\mathbf{x} \in \ker(L)$, então

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 + x_3 = 0$$

Fazendo a variável livre $x_3 = a$, obtemos

$$x_2 = -a, \quad x_1 = a$$

e, portanto, $\ker(L)$ é o subespaço unidimensional de R^3 de todos os vetores da forma $a(1, -1, 1)^T$.

Se $\mathbf{x} \in S$, então \mathbf{x} tem que ser da forma $(a, 0, b)^T$, logo $L(\mathbf{x}) = (a, b)^T$. É claro que $L(S) = R^2$. Como a imagem do subespaço S é o R^2 inteiro, a imagem de L tem que ser todo o R^2 [isto é, $L(R^3) = R^2$]. □

EXEMPLO 13. Seja $D: P_3 \rightarrow P_3$ o operador derivada, dado por

$$D(p(x)) = p'(x)$$

O núcleo de D consiste em todos os polinômios de grau 0. Logo, $\ker(D) = P_1$. Como a derivada de qualquer polinômio em P_3 é um polinômio em P_2 , temos que $D(P_3) = P_2$. □

EXERCÍCIOS

1. Mostre que cada uma das aplicações seguintes é uma transformação linear de R^2 em R^2 . Descreva geometricamente o que cada uma delas faz.

- (a) $L(\mathbf{x}) = (-x_1, x_2)^T$ (b) $L(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ (c) $L(\mathbf{x}) = (x_2, x_1)^T$
 (d) $L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}$ (e) $L(\mathbf{x}) = x_2\mathbf{e}_2$

2. Seja L a transformação linear de R^2 em si mesmo definida por

$$L(\mathbf{x}) = (x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha)^T$$

Expresse x_1, x_2 e $L(\mathbf{x})$ em coordenadas polares. Descreva geometricamente o efeito dessa transformação linear.

3. Seja \mathbf{a} um vetor fixo não-nulo em R^2 . Uma aplicação da forma

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

é chamada de *translação*. Mostre que uma translação não é uma transformação linear. Ilustre geometricamente o efeito de uma translação.

4. Determine se as transformações de R^3 em R^2 a seguir são ou não lineares.

$$+ \beta g(x) dx$$

$$c) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$\cdot \beta L(g)$$

$C[a, b]$ definido por

(a derivada de f)

$$\cdot D(f) + \beta D(g)$$

minar esta seção estudando o efeito de L transformados no vetor nulo de W é partic

núcleo de L , denotado por $\ker(L)$, é definido

$$\{\mathbf{v} \in W \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}$$

e seja S um subespaço de V . A imagem de

para algum $\mathbf{v} \in S$

imagem de L .

que $\ker(L)$ é um subespaço de W e que, se $\mathbf{w} \in W$. Em particular, $L(V)$ é um subespaço

near e S é um subespaço de V , então:

leo de L é fechado sob as operações de soma e multiplicação por escalar, então

$$L(\mathbf{0}_W) = \mathbf{0}_W$$

$$= L(\mathbf{0}_W) + L(\mathbf{0}_W) = L(\mathbf{0}_W)$$

$L(\alpha \mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{v})$ para algum $\mathbf{v} \in S$. Para qual

$$L(\alpha \mathbf{v})$$

- (a) $L(\mathbf{x}) = (x_2, x_3)^T$ (b) $L(\mathbf{x}) = (0, 0)^T$
 (c) $L(\mathbf{x}) = (1 + x_1, x_2)^T$ (d) $L(\mathbf{x}) = (x_3, x_1 + x_2)^T$
5. Determine se as transformações de R^2 em R^3 a seguir são ou não lineares.
 (a) $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, 1)^T$ (b) $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_1 + 2x_2)^T$
 (c) $L(\mathbf{x}) = (x_1, 0, 0)^T$ (d) $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)^T$
6. Determine se as transformações de $R^{n \times n}$ em $R^{n \times n}$ a seguir são ou não lineares.
 (a) $L(A) = 2A$ (b) $L(A) = A^T$
 (c) $L(A) = A + I$ (d) $L(A) = A - A^T$
7. Determine se as transformações de P_2 em P_3 a seguir são ou não lineares.
 (a) $L(p(x)) = xp(x)$
 (b) $L(p(x)) = x^2 + p(x)$
 (c) $L(p(x)) = p(x) + xp(x) + x^2p'(x)$
8. Para cada $f \in C[0, 1]$, defina $L(f) = F$, onde

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad 0 \leq x \leq 1$$

Mostre que L é uma transformação linear de $C[0, 1]$ em $C[0, 1]$. Depois, encontre $L(e^x)$.

9. Determine se as transformações de $C[0, 1]$ em R^1 a seguir são ou não lineares.
 (a) $L(f) = f(0)$ (b) $L(f) = |f(0)|$
 (c) $L(f) = [f(0) + f(1)]/2$ (d) $L(f) = \left[\int_0^1 [f(x)]^2 dx \right]^{1/2}$
10. Se L é uma transformação linear de V em W , use indução matemática para provar que
- $$L(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \alpha_1 L(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{v}_2) + \dots + \alpha_n L(\mathbf{v}_n)$$
11. Seja $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ uma base para um espaço vetorial V e sejam L_1 e L_2 duas transformações lineares de V em um espaço vetorial W . Mostre que, se

$$L_1(\mathbf{v}_i) = L_2(\mathbf{v}_i)$$

para cada $i = 1, \dots, n$, então $L_1 = L_2$ [isto é, mostre que $L_1(\mathbf{v}) = L_2(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in V$].

12. Seja L uma transformação linear de R^1 em R^1 e seja $a = L(1)$. Mostre que $L(x) = ax$ para todo $x \in R^1$.
13. Seja L um operador linear de um espaço vetorial V nele mesmo. Defina, por recursão, o operador $L^n, n \geq 1$ da seguinte maneira:

$$L^1 = L$$

$$L^{k+1}(\mathbf{v}) = L(L^k(\mathbf{v})) \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in V$$

Mostre que L^n é um operador linear para todo $n \geq 1$.

14. Sejam $L_1: U \rightarrow V$ e $L_2: V \rightarrow W$ transformações lineares e seja $L = L_2 \circ L_1$ a transformação linear de U em W definida por

$$L(\mathbf{u}) = L_2(L_1(\mathbf{u}))$$

para $\mathbf{u} \in U$. Mostre que L é uma transformação linear de U em W .

15. Determine o núcleo e a imagem de cada uma das transformações lineares de R^3 em R^3 .
 (a) $L(\mathbf{x}) = (x_3, x_2, x_1)^T$
 (b) $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, 0)^T$
 (c) $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_1, x_1)^T$
16. Seja S o subespaço de R^3 gerado por \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 . Para cada um dos operadores lineares no S , determine $L(S)$.
17. Determine o núcleo e a imagem de cada uma das transformações lineares de P_3 em P_3 a seguir.
 (a) $L(p(x)) = xp'(x)$

- (b) $L(p(x)) = p(x) - p'(x)$
 (c) $L(p(x)) = p(0)x + p'(0)$

18. Seja $L: V \rightarrow W$ um transformação linear invertível denotada por $L^{-1}(T)$, $L: V \rightarrow W$ é

Mostre que $L^{-1}(T)$ é um operador linear.

19. Uma transformação linear $L: V \rightarrow W$ é injetora se e somente se para dois vetores distintos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $L(\mathbf{v}_1) \neq L(\mathbf{v}_2)$.
20. Um operador linear $L: V \rightarrow V$ definido por

é sobrejetor.

21. Quais dos operadores no Ex. 20 são invertíveis?
 22. Seja A uma matriz 2×2 invertível.

Mostre que:

- (a) L_A leva R^2 no espaço R^2 .
 (b) se A é invertível, então L_A^{-1} é invertível.

23. Seja D o operador derivada em P_3 .

Mostre que:

- (a) $D \in P_3$ em P_2 é sobrejetor.
 (b) $D: P_3 \rightarrow P_3$ é injetora.

2 REPRESENTAÇÕES LINEARES

Na Seção 1, mostramos que cada transformação linear $L: V \rightarrow W$ pode ser representada por uma matriz.

para cada $\mathbf{x} \in R^n$. Nesta seção, mostramos que cada transformação linear $L: R^n \rightarrow R^m$ pode ser representada por uma matriz A $m \times n$ tal que

Veremos, também, que qualquer transformação linear $L: R^n \rightarrow R^m$ pode ser representada por uma matriz.

Teorema 4.2.1 Se L é uma transformação linear de R^n em R^m , então existe uma matriz A $m \times n$ tal que

para cada $\mathbf{x} \in R^n$. De fato, o j -ésimo elemento da matriz A é

Demonstração. Para $j = 1, \dots, m$, seja \mathbf{e}_j o j -ésimo vetor da base canônica de R^n . Então $L(\mathbf{e}_j)$ é um vetor em R^m e pode ser escrito como

$= (0, 0)^T$
 $= (x_3, x_1 + x_2)^T$
 seguir são ou não lineares.
 $= (x_1, x_2, x_1 + 2x_2)^T$
 $= (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)^T$
 a seguir são ou não lineares.
 $= A^T$
 $= A - A^T$
 seguir são ou não lineares.

- (b) $L(p(x)) = p(x) - p'(x)$
- (c) $L(p(x)) = p(0)x + p(1)$

18. Seja $L: V \rightarrow W$ uma transformação linear e seja T um subespaço de W . A *imagem inversa* de T , denotada por $L^{-1}(T)$, é definida por

$$L^{-1}(T) = \{v \in V \mid L(v) \in T\}$$

Mostre que $L^{-1}(T)$ é um subespaço de V .

19. Uma transformação linear $L: V \rightarrow W$ é dita *injetora* se $L(v_1) = L(v_2)$ implica que $v_1 = v_2$ (isto é, dois vetores distintos $v_1, v_2 \in V$ não podem ser levados no mesmo vetor $w \in W$). Mostre que L é injetora se e somente se $\ker(L) = \{0_V\}$.
20. Um operador linear $L: V \rightarrow W$ é dito *sobrejetor* se $L(V) = W$. Mostre que o operador $L: R^3 \rightarrow R^3$ definido por

$$L(x) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)^T$$

é sobrejetor.

21. Quais dos operadores no Exercício 15 são injetores? Quais são sobrejetores?
22. Seja A uma matriz 2×2 e seja L_A o operador definido por

$$L_A(x) = Ax$$

Mostre que:

- (a) L_A leva R^2 no espaço coluna de A ;
 - (b) se A é invertível, então L_A é sobrejetora de R^2 em R^2 .
23. Seja D o operador derivada em P_3 e seja

$$S = \{p \in P_3 \mid p(0) = 0\}$$

Mostre que:

- (a) D de P_3 em P_2 é sobrejetora, mas não é injetora;
- (b) $D: S \rightarrow P_3$ é injetora, mas não é sobrejetora.

2 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Na Seção 1, mostramos que cada matriz A $m \times n$ define uma transformação linear L_A de R^n em R^m dada por

$$L_A(x) = Ax$$

para cada $x \in R^n$. Nesta seção, mostraremos que a cada transformação linear L de R^n em R^m existe uma matriz A $m \times n$ tal que

$$L(x) = Ax$$

Veremos, também, que qualquer operador linear agindo entre espaços vetoriais de dimensão finita pode ser representado por uma matriz.

Teorema 4.2.1 Se L é uma transformação linear de R^n em R^m , então existe uma matriz A $m \times n$ tal que

$$L(x) = Ax$$

para cada $x \in R^n$. De fato, o j -ésimo vetor coluna da matriz A é dado por

$$a_j = L(e_j) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Demonstração. Para $j = 1, \dots, n$, defina

$0 \leq x \leq 1$
 1] em $C[0, 1]$. Depois, encontre $L(e^x)$ e $L(x)$
 a seguir são ou não lineares.
 $= |f(0)|$
 $= \left\{ \int_0^1 [f(x)]^2 dx \right\}^{1/2}$
 indução matemática para provar que
 $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$
 $\dots + \alpha_n L(v_n)$
 e sejam L_1 e L_2 duas transformações lineares
 $L_1(v) = L_2(v)$ para todo $v \in V$.
 $L(1)$. Mostre que $L(x) = ax$ para todo x
 le mesmo. Defina, por recursão, o operador L
 todo $v \in V$
 e seja $L = L_2 \circ L_1$ a transformação de R^3 em R^3 .
 de U em W .
 sformações lineares de R^3 em R^3 .

um dos operadores lineares no Exercício 15
 sformações lineares de P_3 em P_3 dadas por