Processo Seletivo Estendido 2016

LISTA FUNÇÕES - 5

Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

Esta lista foi inicialmente elaborada pelo professor Alexandre Trovon (UFPR).
A presente versão possui também algumas alterações feitas pelo professor Lucas Pedroso (UFPR)

- Nesta lista de exercícios há problemas algébricos e também de modelagem matemática. Em ambas situações o objetivo é recordar e aprofundar o que foi visto no ensino médio a respeito de funções. Alguns tópicos mais diretamente relacionados ao assunto serão também trabalhados
- Quando julgar necessário, utilize uma calculadora, um computador, ou mesmo uma planilha, para fazer estimativas que deem a você uma ideia numérica.
- Matemática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas ideias com os colegas.
- Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela.

---

1. Nos itens a seguir, escreva a expressão dada na forma p/q, onde p e q são números inteiros. Por exemplo:

$$4^{\frac{1}{2}} + 4^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

(a) $\dfrac{3^{-2}}{2^{-3}}$ (b) $\dfrac{1}{2^{-1}}$ (c) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}$ (d) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

(e) $\dfrac{2^0}{3^{-2}}$ (f) $\dfrac{5^{-1}}{3^{-2}}$ (g) $(-8)^{-\frac{1}{3}}$ (h) $16^{-\frac{1}{4}}$

(i) $3^{-2} + 3$ (j) $5^{-1} + 25^0$ (k) $16^{-\frac{1}{2}} - 16^{-\frac{1}{4}}$ (l) $8^{-\frac{1}{3}} - 2^0$

(m) $\dfrac{16^{\frac{1}{2}}}{8^{-\frac{2}{3}}}$ (n) $4^{-1} + 3^{-1}$ (o) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1}$

2. Assuma que todas as variáveis representam número reais positivos somente. Escreva cada uma das seguintes expressões como um produto ou quociente de potências onde cada variável apareça uma única vez, e todos os expoentes são positivos. Veja o exemplo:

$$\left(\frac{x^{-1}y^2z^0}{x^3y^{-4}z^2}\right)^{-1} = \frac{x^3y^{-4}z^2}{x^{-1}y^2z^0} = \frac{x^4z^2}{y^6}$$

(a) $x^{-3}x^5$ (b) $(x^2y^{-3})^{-1}$ (c) $\dfrac{x^5}{x^{-2}}$ (d) $(x^{-3})^2$

(e) $(x^{\frac{1}{2}})^{-3}$ (f) $(x^3)^{-\frac{1}{3}}$ (g) $(x^2y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ (h) $(x^3y^{-2})^{-\frac{1}{6}}$

(i) $(x^{-2}y^3)^0$ (j) $\dfrac{x^{-1}}{y^{-1}}$ (k) $\dfrac{x^{-2}}{y^{-3}}$ (l) $\dfrac{a^2x^{-3}}{b^2y^{-2}}$

(m) $\dfrac{a^{-2}b^{-2}c}{ab^{-3}c^0}$ (n) $\left(\dfrac{x^{-2}y^3}{2x^0y^{-5}}\right)^{-2}$ (o) $\left(\dfrac{a^{-1}b^{-2}}{3^0ab}\right)^{-1}$

3. Nos itens a seguir, escreva a expressão dada como uma fração simples, envolvendo somente expoentes positivos. Assuma que todas as variáveis representam números reais positivos somente.

(a) $x^{-1} + y^{-1}$ (b) $x^{-1} - y^{-1}$ (c) $\dfrac{x + (xy)^{-1}}{x}$ (c) $x^{-1} + y^{-2}$

(d) $(x^{-1} + x^{-2})^{-1}$ (e) $x^{-1} + \dfrac{1}{x^{-1}}$ (f) $a^{-2} + b^{-2}$ (g) $\dfrac{x^{-1}}{y^{1}} + \dfrac{y}{x}$

(h) $\dfrac{r}{s^{-1}} + \dfrac{r^{-1}}{s}$ (i) $(x + y)^{-1}$ (j) $(a - b)^{-2}$ (k) $xy^{-1} + x^{-1}y$

(l) $x^{-1}y - xy^{-1}$ (m) $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}}$ (n) $\dfrac{a}{b^{-1}} + \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$ (o) $(x^{-1} - y^{-1})^{-1}$

(p) $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$ (q) $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}}$

4. Nos problemas a seguir, calcule o fator A. Por exemplo, se $y^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = Ay^{-\frac{1}{2}}$ encontramos $A = 1 + y$. Confira:

$$Ay^{-\frac{1}{2}} = (1 + y)y^{-\frac{1}{2}} = y^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}.$$

(a) $y^{\frac{3}{4}} = Ay^{\frac{1}{4}}$ (b) $x^{\frac{3}{5}} = Ax^{\frac{1}{5}}$ (c) $x^{-\frac{1}{3}} = Ay^{-\frac{2}{3}}$

(d) $y^{-\frac{1}{4}} = Ay$ (e) $x^{\frac{2}{3}} + x = Ax$ (f) $y^{\frac{1}{2}} + y = Ay$

(g) $x - x^{\frac{2}{3}} = Ax^{\frac{1}{3}}$ (h) $a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = Aa$ (i) $x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{2}} = Ax^{\frac{3}{2}}$

(j) $x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = Ax^{-\frac{1}{2}}$

5. Escreva cada uma das expressões, a seguir, racionalizando o denominador e simplificando onde seja possível. Por exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y},$$

onde assumimos que $x \neq y$.

(a) $\dfrac{3}{\sqrt{2} - 1}$ (b) $\dfrac{-4}{1 + \sqrt{3}}$ (c) $\dfrac{1}{2 - \sqrt{2}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ (e) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ (f) $\dfrac{\sqrt{x + a}}{1 - \sqrt{x + a}}$

(g) $\sqrt{x + 1} - \dfrac{x}{\sqrt{x + 1}}$ (h) $\sqrt{x^2 - 2} - \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2}}$

(i) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ (j) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$

6. Considere $f, g : [0, +\infty) \to I\!R$ definidas por $f(x) = x^4$ e $g(x) = 4^x$. Pede-se:

(a) Faça um esboço do gráfico das duas funções num mesmo sistema de coordenadas.
(b) Determine os pontos de interseção do gráfico das duas funções.
(c) Determine graficamente os valores de x para os quais $g(x) > f(x)$.

7. Determine os valores inteiros de x e y que satisfazem a equação $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$.

8. Resolva o seguinte sistema $\begin{cases} 2^{x-2y} & = & \dfrac{1}{8} \\ 3^{xy} & = & 9 \end{cases}$.

9. Resolva as equações:

(a) $(0,533\ldots)^x = \dfrac{225}{64}$ (b) $\sqrt[\frac{5}{x}]{32} = 2$ (c) $27 = 3^{5x} \cdot 9^{x^2}$

(d) $(0,4)^x + (0,6)^x = 2 \cdot (0,9)^x$ (e) $\dfrac{25^x + 125}{6} = 5^{x+1}$ (f) $4^{2^{8^x}} = 256$

(g) $2^x + \dfrac{4}{2^x} = 5$ (h) $\dfrac{625^{1-x} \cdot 5}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^x} = \sqrt{5 \cdot 25}$ (i) $\dfrac{(11^{3x+1})^2}{11^4} = 11^{10x}$

10. Resolva as seguintes equações. Uma calculadora e o uso de logaritmos podem ser necessários.

(a) $4^x = 7$ (b) $5^{x+1} = 9$ (c) $6^{2x+3} = 354$

(d) $x^5 = 873$ (e) $x^4 = 687$ (f) $x^{7/2} = 51,4$

(g) $2 = (1,02)^t$ (h) $7 \cdot 3^t = 5 \cdot 2^t$ (i) $5,02(1,04)^t = 12,01(1,03)^t$

11. Resolva para x:

(a) $3^x = 6^{x+3}$ (b) $7^x = 2^{2x-1}$ (c) $2^{x-1} = 5^{2x+1}$

(d) $8^{x+2} = 3^{3x-1}$ (e) $y = 2^{3x}$ (f) $10y = 10^x$

12. Simplifique o máximo possível as expressões

(a) $\log A^2 + \log B - \log A - \log B^2$ (b) $\log(10^{x+7})$

(c) $10^{\log A^2}$ (d) $10^{2\log Q}$

(e) $10^{-\log P}$ (f) $10^{-(\log B)/2}$

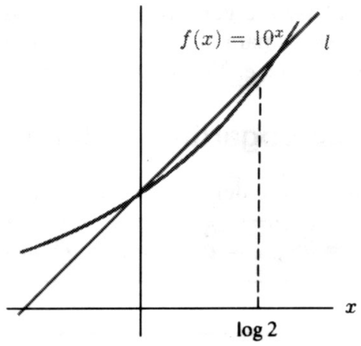
(g) $\dfrac{\log A^2 - \log A}{\log B - \frac{1}{2}\log B}$ (h) $2\log\alpha - 3\log B - \dfrac{\log\alpha}{2}$

13. Resolva para x: (aqui $\log x = \log_{10} x$)

(a) $\log(3x-1) - \log(x+2) = 2$ (b) $\log(x-\sqrt{6}) + \log(x+\sqrt{6}) = 1$

(c) $\log(x^2-1) - \log(x+1) = 1$ (d) $\log(x^2-4) - 2\log(x-2) = 2$

14. Encontre a equação da reta l da figura a seguir



15. Nos itens a seguir, encontre o valor da expressão dada:

(a) $\log_3 81$ (b) $\log_4 16$ (c) $\log_2 16$

(d) $\log_2\left(\dfrac{1}{32}\right)$ (e) $\log_3\left(\dfrac{1}{27}\right)$ (f) $\log_4\left(\dfrac{1}{64}\right)$

(g) $\log_2 1$ (h) $\log_7\left(\dfrac{1}{49}\right)$ (i) $\log_{13} 13$

(j) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ (k) $\log_{\frac{1}{6}} 216$ (l) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{1}{64}\right)$

16. Sabendo que $a > 0$, simplifique as expressões dadas:

(a) $\log_a a^{-x}$ (b) $a^{-\log_a x}$ (c) $a^{x+\log_a x}$

(d) $\log_a(xa^{2x})$ (e) $a^{-\log_a x^2}$ (f) $a^{\log_a a^x}$

(g) $\log_a(a^{\log_a a})$ (h) $a^{2\log_a 3}$ (i) $\log_a(x^2a^x)$

(j) $\log_a(a^{x^2-2x})$ (k) $a^{\log_a(a^x)}$ (l) $a^{2\log_a x}$

17. Determine x em cada item:

(a) $\log_5 x = 3$ (b) $\log_6 x = 3$ (c) $\log_2 x = 10$

(d) $\log_{10} x = \dfrac{1}{2}$ (e) $\log_{10} x = 1$ (f) $\log_{16} x = \dfrac{1}{4}$

18. Determine a em cada item:

(a) $\log_a 216 = 3$ (b) $\log_a 625 = 4$ (c) $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$

(d) $\log_a \frac{1}{49} = -2$ (e) $\log_a 2 = \frac{1}{4}$ (f) $\log_a 125 = 3$

19. Determine y em cada item:

(a) $2^{\log_2 y} = 13$ (b) $6^{\log_6 y} = 21$ (c) $4^{\log_4 y} = 9$

(d) $y^{\log_4 6} = 6$ (e) $y^{\log_7 14} = 14$ (f) $y^{\log_3 2} = 2$

20. Determine x em cada item:

(a) $5^{\log_5 7} = x$ (b) $3^{\log_x 5} = 5$ (c) $10^{\log_x 7} = 7$

(d) $k^{\log_k 4} = x$ (e) $7^{\log_x k} = k$ (f) $8^{\log_8 x} = y$

21. Efetue as expressões indicadas, simplificando-as o máximo possível.

(a) $\ln e + \ln(1/e)$ (b) $\ln e^2 + e^{-\ln e}$

(c) $\ln(e \ln e) + \ln(\ln e)$ (d) $e^{-\ln \sqrt{e}}$

22. Simplifique completamente as expressões:

(a) $2 \ln A - 3 \ln B + \ln(AB)$ (b) $e^{2 \ln A - (\ln B)/2}$

(c) $\ln(xe^{-\ln x})$ (d) $\ln(e^2 \ln(e \ln e))$

23. Resolva as equações em x:

(a) $2^x = e^{x+1}$ (b) $2e^{3x} = 4e^{5x}$

(c) $4e^{2x-3} - 5 = e$ (d) $10^{x+3} = 5e^{7-x}$

24. Nos itens a seguir, converta a função dada para a forma $P = P_o a^{kt}$.

(a) $P = P_0 e^{0,2t}$ e $a = 2$ (b) $P = P_0 e^{0,917t}$ e $a = 3$

(c) $P = P_0 e^{-2,5t}$ e $a = 1,7$ (d) $P = P_0 e^{-\pi t}$ e $a = e^2$

25. Converta as funções para a forma $P_o e^{kt}$, determinando quais representam crescimento e quais decaimento exponencial.

(a) $P = P_0 2^t$ (b) $P = 10(1,7)^t$

(c) $P = 5,23(0,2)^t$ (d) $P = 174(0,9)^t$

26. Resolva as seguintes equações para t

(a) $a = be^t$ (b) $P = P_0 e^{kt}$

(c) $ae^{kt} = e^{bt}$ com $k \neq b$ (d) $ce^{\alpha t} = be^{\gamma t/n}$, onde $\alpha n \neq \gamma$

27. Encontre a função inversa de $f(x) = 50e^{0,1x}$.

28. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

(a) A função f é crescente ou decrescente? Por quê?
(b) Verifique se f é inversível e, caso seja, calcule sua inversa.
(c) Qual o domínio de f^{-1}?

29. Determine o domínio da função $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 5x)$.

30. Considere $m \in (0, 1)$. Determine os valores de x que satisfazem a desigualdade

$$\log_m(x^4 + m^4) \geq 2 + \log_m \left(\left(\frac{x}{2m} \right)^2 + m^2 \right).$$

31. (a) Escreva uma equação para o gráfico obtido, através de uma expansão vertical de fator 2, do gráfico de $y = x^2$, seguido de uma translação vertical de 1 unidade para cima. Esboce o gráfico.
(b) Qual é a equação se a ordem das transformações (expandir e transladar) no item anterior for trocada?
(c) Os dois gráficos são iguais? Explique o efeito de trocar a ordem das transformações.

32. Qual é a diferença (se é que existe) entre $\ln(\ln(x))$, $\ln^2(x)$ e $(\ln(x))^2$?

33. Se $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^x$, obtenha o valor e simplifique as expressões:

(a) $f(1)$ (b) $f(2)$ (c) $f(x) - f(x-1)$
(d) $f(x) + f(2)$ (e) $f(g(x))$ (f) $f(f(g(x)))$
(g) $g(f(x))$ (h) $f(x) + f(1+x)$ (i) $g(g(f(x)))$

34. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = e^x$, obtenha o valor e simplifique as expressões:

(a) $f(1)$ (b) $f(e^2)$ (c) $g(f(x))$
(d) $f(3) + f(\sqrt{x})$ (e) $f(x^2-1) - f(x^2+1)$ (f) $f(f(g(x)))$
(g) $f(x) + f(10+x)$ (h) $f(g(x))$ (i) $g(g(f(x)))$

35. Considere as funções:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \textit{seno hiperbólico de } x$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \textit{cosseno hiperbólico de } x$$

Com base nelas, calcule:

(a) $\cosh(0)$ e $\cosh(1)$ (b) $\operatorname{senh}(0)$ e $\operatorname{senh}(1)$
(c) $\cosh(\ln x)$ e $\operatorname{senh}(\ln x)$ (d) $\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$
(e) $\operatorname{senh}(-x)$ e $\cosh(-x)$ (f) $\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$

36. Uma das componentes principais de uma contaminação nuclear, como a de Chernobyl, é o estrôncio-90, que decai exponencialmente a uma taxa contínua de aproximadamente 2,47% ao ano. Estimativas preliminares, após o desastre de Chernobyl, sugeriram que levaria uns 100 anos até que a região fosse novamente segura para a habitação humana. Que percentual do estrôncio-90 original ainda permaneceria após esse tempo?

37. A meia-vida do rádio-226 é de 1620 anos.
(a) Obtenha uma fórmula para a quantidade Q de rádio que resta após t anos, dado que a quantidade inicial é Q_0.
(b) Que percentual da substância resta após 500 anos?

38. Nos Jogos olímpicos de 1968, nos arredores da Cidade do México, houve muita discussão a respeito do efeito da grande altitude (2237 metros) poderia causar aos atletas. Presumindo-se que a pressão atmosférica decaia exponencialmente em $0,4\%$ a cada 30 metros, de que percentual fica reduzida a pressão atmosférica ao se deslocar do mar até a Cidade do México?

39. Uma certa substância radioativa decai exponencialmente de tal modo que, após 10 anos, ainda restam 70% da quantidade inicial. Obtenha uma expressão para a quantidade que ainda resta após um número t qualquer de anos. Que quantidade ainda restará após 50 anos? Qual a meia-vida? Quanto tempo é preciso para que reste somente 20% da quantidade inicial? E para que reste somente 10%?

40. O *período de duplicação* é o tempo necessário para que uma grandeza que cresce exponencialmente dobrar seu valor. Calcule o período de duplicação de preços que estão subindo a uma taxa de 5% ao ano.

41. A população de uma certa região cresce exponencialmente. Se em 1990 ($t = 0$) havia 40 000 pessoas em uma cidade em 2000 esse número subiu para 46 000 pessoas, encontre uma fórmula para a população em qualquer instante t. Qual será a população em 2020? E o período de duplicação?

Respostas:

1. (a) $\frac{8}{9}$ (b) 2 (c) $\frac{5}{3}$ (d) 9 (e) 9 (f) $\frac{9}{5}$ (g) $\frac{-1}{2}$ (h) $\frac{1}{2}$ (i) $\frac{28}{9}$ (j) $\frac{6}{5}$ (k) $\frac{-1}{4}$ (l) $\frac{-1}{2}$ (m) 16 (n) $\frac{7}{12}$ (o) -2

2. (a) $\frac{y^5}{x^3}$ (b) $\frac{y^3}{x^2}$ (c) x^7 (d) $\frac{1}{x^6}$ (e) $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ (f) $\frac{1}{x}$ (g) $\frac{y}{x}$ (h) $\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ (i) 1 (j) $\frac{y}{x}$ (k) $\frac{y^3}{x^2}$ (l) $\frac{a^2y^2}{b^2x^3}$ (m) $\frac{bc}{a^3}$ (n) $4x^4y^4$ (o) a^2b^3

3. (a) $\frac{x+y}{xy}$ (b) $\frac{y-x}{xy}$ (c) $\frac{x^2y+1}{x^2y}$ (c) $\frac{x+y^2}{xy^2}$ (d) $\frac{x^2}{x+1}$ (e) $\frac{x^2+1}{x}$ (f) $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ (g) $\frac{y^2+1}{xy}$ (h) $\frac{r^2s^2+1}{rs}$ (i) $\frac{1}{x+y}$ (j) $\frac{1}{(a-b)^2}$ (k) $\frac{x^2+y^2}{xy}$ (l) $\frac{y^2-x^2}{xy}$ (m) $x+y$ (n) $\frac{a^2b+b}{a}$ (o) $\frac{xy}{y-x}$ (p) $\frac{x+y}{y-x}$ (q) $\frac{y-x}{x+y}$

4. (a) $A = y^{\frac{1}{2}}$ (b) $A = x^{\frac{2}{5}}$ (c) $A = x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ (d) $A = y^{\frac{-5}{4}}$ (e) $A = x^{\frac{-1}{3}} + 1$ (f) $A = y^{\frac{-1}{2}} + 1$ (g) $A = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$ (h) $A = a^{\frac{-1}{3}} + a^{\frac{-2}{3}}$ (i) $A = x^{\frac{-7}{6}} + 1$ (j) $A = x^{-1} + 1$

5. (a) $3(\sqrt{2}+1)$ (b) $2(1-\sqrt{3})$ (c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (d) $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$ (e) $\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}$ (f) $\frac{\sqrt{x+a}(1+\sqrt{x+a})}{1-(x+a)}$ (g) $\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$ (h) $\frac{-3\sqrt{x^2-2}}{x^2-2}$ (i) $\frac{-\sqrt{x^2+1}}{x(x^2+1)}$ (j) $\frac{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{x(x^2+1)}$

6. (b) $x = 2$ e $x = 4$. (c) $x \in [0,2) \cup (4,\infty)$.

7. $x = 3, y = 1$.

8. $(x,y) \in \left\{(1,2), \left(-4, -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

9. (a) $x = -2$ (b) $x = 1$ (c) $x = \frac{1}{2}$ e $x = -3$ (d) $x = 0$ (e) $x = 2$ e $x = 1$ (f) $x = \frac{1}{3}$ (g) $x = 0$ e $x = 2$ (h) $x = \frac{7}{6}$ (i) $x = -\frac{1}{2}$

10. (a) $x = \log_4 7$ (b) $x = 2\log_5 3 - 1$ (c) $x = \frac{\log_6 354 - 3}{2}$ (d) $x = \sqrt[5]{873}$ (e) $|x| = (687)^{\frac{1}{4}}$ (f) $x = (51,7)^{\frac{2}{7}}$ (g) $t = \frac{1}{\log_2 1,02}$ (h) $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{5}{7}$ (i) $t = \frac{log\left(\frac{12,01}{5,02}\right)}{log\left(\frac{1,04}{1,03}\right)}$

11.

(a) $x = -3\log_2 3 + 1$

(b) $x = \dfrac{\log_7 2}{2\log_7 2 - 1}$

(c) $x = \dfrac{\log_2 5 + 1}{1 - 2\log_2 5}$

(d) $x = -\left[\log_{\frac{2}{3}} 2 + \frac{1}{3}\log_{\frac{2}{3}} 24\right]$

(e) $x = \frac{1}{3}\log_2 y$, se $y > 0$.

(f) $x = \log_{10} 10y$, se $y > 0$.

12. (a) $\log(A) - \log(B)$.

(b) $x + 7$.

(c) A^2.

(d) Q^2.

(e) $\frac{1}{P}$.

(f) $\frac{1}{\sqrt{B}}$.

(g) $\frac{\log(A)}{\log(B/\sqrt{B})} = \frac{\log(A^2)}{\log(B)}$.

(h) $\log(a^{3/2}) - \log(B^3)$.

13. (a) Não existe solução.

(b) $x = 4$.

(c) $x = 11$.

(d) $x = 202/99$.

14. $y = (1/\log\ 2)x + 1$.

15. (a) 4.

(b) 2.

(c) 4.

(d) -5.

(e) -3.

(f) -3.

(g) 0.

(h) -2.

(i) 1.

(j) -3.

(k) -3.

(l) 3.

16. (a) $-x$

(b) x^{-1}

(c) xa^x

(d) $2x + \log_a x$

(e) x^{-2}

(f) a^x

(g) 1

(h) 9

(i) $x + 2\log_a x$

(j) $x^2 - 2x$

(k) a^x

(l) x^2

17. (a) $x = 125$

(b) $x = 216$

(c) $x = 1024$

(d) $x = \sqrt{10}$

(e) $x = 10$

(f) $x = 2$

18. (a) $a = 6$

(b) $a = 5$

(c) $a > 0$, $a \neq 1$.

(d) $a = 7$

(e) $a = 16$

(f) $a = 5$

19. (a) $y = 13$

(b) $y = 21$

(c) $y = 9$

(d) $y = 4$

(e) $y = 7$

(f) $y = 3$

20. (a) $x = 7$

(b) $x = 3$

(c) $x = 10$

(d) $x = 4$

(e) $x = 7$

(f) $x = y$

21. (a) 0

(b) $2 + e^{-1}$

(c) 1

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

22. (a) $3\ln A - 2\ln B$

(b) $\dfrac{A^2}{B^{\frac{1}{2}}}$

(c) 0

(d) 2

23.

(a) $x = \dfrac{1}{\ln 2 - 1}$

(b) $x = -\dfrac{\ln 2}{2}$

(c) $x = \dfrac{3}{2} - \ln 2 + \dfrac{\ln(5+e)}{2}$

(d) $x = \dfrac{7 - 3\ln 2 - 2\ln 5}{1 + \ln 2 + \ln 5}$

24. (a) $P = P_0 2^{(0{,}2 \log_2 e)t}$

(b) $P = P_0 3^{(0{,}917 \log_3 e)t}$

(c) $P = P_0 1{,}7^{\left(-2{,}5 \log_{1{,}7} e\right)t}$

(d) $P = P_0 \left(e^2\right)^{-\frac{\pi t}{2}}$

25. (a) $P = P_0 e^{t \ln 2}$, crescimento.

(b) $P = 10e^{t \ln 1.7}$, crescimento.

(c) $P = 5.23e^{t \ln 0.2}$, decaimento.

(d) $P = 174e^{t \ln 0.9}$, decaimento.

26. (a) $t = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

(b) $t = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$.

(c) $t = \frac{1}{k-b} \ln\left(\frac{1}{a}\right)$.

(d) $t = \frac{n}{\gamma - \alpha n} \ln\left(\frac{c}{b}\right)$.

27. $f^{-1}(y) = \frac{1}{0.1} \ln\left(\frac{y}{50}\right)$.

28. (a) Crescente, pois $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

(b) $f^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$.

(c) O intervalo aberto $(0,1)$.

29. Dom $(f) = (5, +\infty)$.

30. $|x| \leq \dfrac{1}{2}$.

31. (a) $y = 2x^2 + 1$.

(b) $y = 2(x^2 + 1)$.

(c) Não.

32. São diferentes. Denotando $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = x^2$, temos $\ln(\ln(x)) = f(f(x))$ e $\ln^2(x) = (\ln(x))^2 = g(f(x))$.

33. (a) 0

(b) 1

(c) $\log_2\left(\frac{x}{x-1}\right)$

(d) $\log_2(x) + 1$ ou $\log_2(2x)$

(e) x

(f) $\log_2 x$

(g) x

(h) $\log_2\left(x + x^2\right)$

(i) 2^x

34. (a) 0

(b) 2

(c) x

(d) $\ln(3\sqrt{x})$

(e) $\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

(f) $\ln x$

(g) $\ln\left(10x + x^2\right)$

(h) x

(i) e^x

35. (a) $\cosh(0) = 1, \cosh(1) = \dfrac{e^2+1}{2e}$.

(b) $\sinh(0) = 0, \sinh(1) = \dfrac{e^2-1}{2e}$.

(c) $\cosh(\ln(x)) = \dfrac{x^2+1}{2x}, \sinh(\ln(x)) = \dfrac{x^2-1}{2x}$.

(d) $\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(e) $\sinh(-x) = -\sinh(x), \cosh(-x) = \cosh(x)$.

(f) $\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$.

36. $E(100) = E_0 e^{-2.47} \approx 8{,}46\%$ de E_0.

37.

(a) $Q(t) = Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1620}}$ (b) 80%

38. 74%.

39. $Q(t) = Q_0 \left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{t}{10}}$. Após 50 anos restará aproximadamente 17% da quantidade inicial. A meia-vida é de aproximadamente 20 anos. É preciso cerca de 45 anos para que reste somente 20%, e de cerca de 65 anos para restar 10% da quantidade inicial.

40. $D \approx 14,20$ (D é o período de duplicação).

41. Se $P(t)$ é a população no tempo t, então $P(t) = 40.000(23/20)^{t/10}$ e $P(30) \approx 49,590$.