

Processo Seletivo Estendido 2016
LISTA FUNÇÕES - 8

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Esta lista foi inicialmente elaborada pelo professor Alexandre Trovon (UFPR).

A presente versão possui também algumas alterações feitas pelo professor Lucas Pedroso (UFPR)

- Nesta lista de exercícios há problemas algébricos e também de modelagem matemática. Em ambas situações o objetivo é recordar e aprofundar o que foi visto no ensino médio a respeito de funções. Alguns tópicos mais diretamente relacionados ao assunto serão também trabalhados
- Quando julgar necessário, utilize uma calculadora, um computador, ou mesmo uma planilha, para fazer estimativas que deem a você uma ideia numérica.
- Matemática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas ideias com os colegas.
- Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela.

1. Para cada uma das funções a seguir, obtenha a expressão para a sua inversa.

(a) $f(x) = 2x + 3$ (b) $f(x) = ax + b$ $a \neq 0$ (c) $f(x) = \frac{1}{x}$
(d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ (e) $f(x) = \sqrt{x-4}$ (f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
(g) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ (h) $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ (i) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$

2. Seja $f(x)$ a temperatura (em °C) quando a coluna de mercúrio de um dado termômetro mede x centímetros. Em termos práticos, qual é o significado de $f^{-1}(C)$?
3. Faça uma tabela para os valores de f^{-1} , onde a f é dada abaixo. O domínio de f são os naturais de 1 a 7. Especifique o domínio de f^{-1} .

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	3	-7	19	4	178	2	1

4. Seja $f :] - \infty, -1] \rightarrow [1, +\infty[$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ qual elemento do domínio de f^{-1} possui imagem 3?
5. Determine a função inversa de cada uma das funções abaixo.
- (a) $f(x) = 8 + 11x$ (b) $f(x) = 2x^3 - 5$ (c) $f(x) = 7 - 3x^3$
(d) $f(x) = x$ (e) $f(x) = (x^3 + 8)^5$ (f) $f(x) = x^{1/3} + 2$
6. Seja f a função definida por $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ para $x \geq 0$. Mostre que f é a sua própria inversa.

7. Nos itens a seguir, decida se a função f é inversível ou não:
- $f(d)$ é o total de litros de combustível consumido por um avião ao final de d minutos de um determinado voo.
 - $f(t)$ é o número de clientes presentes nas Lojas Americanas, t minutos após o meio-dia de 29 de março de 2006.
 - $f(x)$ é o volume, em litros, de x quilogramas de água a 4°C .
 - $f(w)$ é o custo, em reais, de se remeter uma carta que pesa w gramas.
 - $f(n)$ é o número de alunos de uma turma de Cálculo, cujos aniversários caem no n -ésimo dia do ano.
8. Seja $f : A \rightarrow]-4, 1]$ dada por $f(x) = \frac{10 + 3x}{10 - 2x}$. Pede-se:
- Determinar A .
 - Mostrar que f é injetora.
 - Verificar se f é sobrejetora. (d) Suponha que f é inversível e crescente. O que se pode dizer a respeito de sua inversa ser crescente ou decrescente? (e) Se uma função f é inversível e côncava para cima, o que se pode dizer a respeito da concavidade de sua inversa?
9. Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, onde $x \geq 1$, obter uma expressão para sua inversa, o domínio dessa inversa e representar f e f^{-1} graficamente.
10. Dada a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}$, $x \neq 1$, determinar:
- Sua função inversa f^{-1}
 - O conjunto $\text{Im}(f)$.
11. Dada a função $f(x) = \frac{9 - x^2}{4 - x^2}$, $x \geq 0$, pede-se:
- Mostrar que f é injetora.
 - Determinar a função inversa f^{-1} .
 - Determinar o conjunto $\text{Im}(f)$.
12. Determinar, se existir, a função inversa de cada uma das funções a seguir:
- $f(x) = \sqrt{3x - 1}$, onde $x \in]\frac{1}{3}, +\infty[$.
 - $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, onde $x \in]-\infty, -2[$.
 - $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$, onde $x \in [-2, 1]$.
13. Dada a função
- $$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ |x| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
- verificar se ela é inversível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa.
14. A função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ admite inversa?
15. Resolva a expressão $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 9x + 20} = 1$.
16. Determine o menor valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq b\}$ de modo que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow B$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ seja sobrejetora.
17. Determine o maior valor de a em $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ de modo que a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ seja injetora.

Respostas:

1.

(a) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

(b) $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

(c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 1$

(d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-x}$

(e) $f^{-1}(x) = x^2 + 4$

(f) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2} + 1$

(g) $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$

(h) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - (1-x)^2}$

(i) $f^{-1}(x) = \frac{-1 + \sqrt{4x^2 + 1}}{2x}$

4. $\sqrt{6}$.

5. (a) $f^{-1}(x) = \frac{x-8}{11}$

(b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+5}{2}}$

(c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{7-x}{3}}$

(d) $f^{-1}(x) = x$

(e) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{5\sqrt{x} - 8}$

(f) $f^{-1}(x) = (x-2)^3$

7. (a) Inversível.

(b) Não inversível.

(c) Inversível.

(d) Não inversível.

(e) Não inversível.

9. $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x} + 1$, $\text{Dom}(f^{-1}) = (-\infty, 4]$

10. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{x^2}}$

(b) $(0, +\infty)$

11. (b) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{9-4x}{1-x}}$

(c) $(-\infty, 1) \cup [\frac{9}{4}, +\infty)$

12. (a) $f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{3}$

(b) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2+1}$

(c) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{9}{4} - x^2} - \frac{1}{2}$

13. f é inversível, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x \leq 0 \\ -x & x > 0 \end{cases}$

14. Não.

15. $x = 1$, $x = 4$ ou $x = 5$.

16. $b = 2$.

17. $a = \frac{3}{4}$.