Processo Seletivo Estendido 2016

LISTA FUNÇÕES - 6

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Esta lista foi inicialmente elaborada pelo professor Alexandre Trovon (UFPR).
A presente versão possui também algumas alterações feitas pelo professor Lucas Pedroso (UFPR)

- Nesta lista de exercícios há problemas algébricos e também de modelagem matemática. Em ambas situações o objetivo é recordar e aprofundar o que foi visto no ensino médio a respeito de funções. Alguns tópicos mais diretamente relacionados ao assunto serão também trabalhados
- Quando julgar necessário, utilize uma calculadora, um computador, ou mesmo uma planilha, para fazer estimativas que deem a você uma ideia numérica.
- Matemática é algo que também se aprende junto com outras pessoas. Por isso, discuta em grupo, pesquise e debata suas ideias com os colegas.
- Mais importante que conseguir resolver uma questão é pensar e refletir sobre ela.

---

1. Converta de graus para radianos:

(a) $30°$ (b) $10°$ (c) $45°$ (d) $135°$ (e) $170°$

(f) $270°$ (g) $15°$ (h) $700°$ (i) $1080°$ (j) $36°$

2. Converta de radianos para graus:

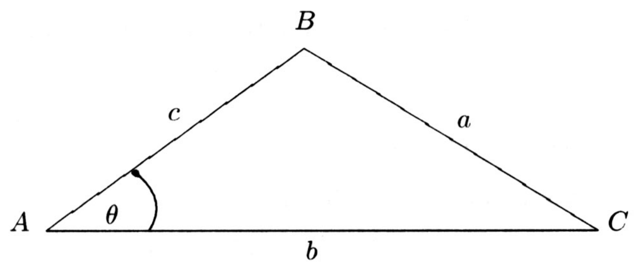
(a) $\frac{5\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 3π (d) $\frac{\pi}{36}$ (e) 10π (f) $\frac{3\pi}{2}$

3. Considere um triângulo com lados a, b e c, onde os ângulos opostos a estes lados são $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente. Prove a *lei dos senos* onde:

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{a} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{b} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{C}}{c}.$$

(*Dica:* Calcule a área deste triângulo considerando cada um dos lados como a base. Estas serão todas iguais.)

4. Considere um triângulo ABC, com lados a, b e c e ângulo θ como mostra a figura.



Com base nele, prove a *lei dos cossenos*:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta,$$

(*Dica:* use o Teorema de Pitágoras.)

5. Deduza fórmulas em termos de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ de:

(a) $\operatorname{sen} 3\theta$ (b) $\cos 3\theta$ (c) $\cos 4\theta$ (d) $\operatorname{sen} 4\theta$

6. Prove as seguintes identidades trigonométricas

(a) $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$

(b) $1 + \operatorname{cotg}^2 t = \operatorname{cossec}^2 t$

(c) $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a$

(d) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

(e) $\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

(f) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

(g) $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$

(h) $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$

7. Utilize o que foi verificado no exercício anterior para mostrar que:

(a) $\operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}[\cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi)]$

(b) $\cos\theta\cos\phi = \frac{1}{2}[\cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi)]$

(c) $\operatorname{sen}\theta\cos\phi = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\theta + \phi) + \operatorname{sen}(\theta - \phi)]$

(d) $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\phi = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

(e) $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

(f) $\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

(g) $\cos\theta - \cos\phi = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

8. Mostre que $\operatorname{sen} 31^\circ + \operatorname{sen} 29^\circ = \operatorname{sen} 89^\circ$.

9. Resolva:

(a) $2\cos^2 x + 3 = 5\cos x$ (b) $\cos 7x = \cos 3x$

(c) $\operatorname{sen}\ 2x + \cos x = 0$ (d) $\operatorname{sen}\ 3x - 2\ \operatorname{sen}\ 2x + \operatorname{sen}\ x = 0$

10. Sem utilizar calculadora, complete a seguinte tabela, marcando $\nexists$ quando a função não estiver definida.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{10\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\theta$											
$\cos\theta$											
$\tan\theta$											
$\sec\theta$											
$\operatorname{cotg}\theta$											
$\operatorname{cossec}\theta$											

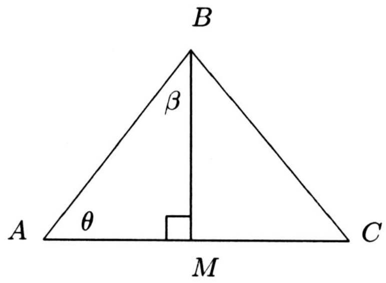
11. Qual é a diferença entre $\operatorname{sen} x^2$, $\operatorname{sen}^2 x$ e $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$? Expresse cada uma das três funções em forma de composição.

12. Expresse as seguintes funções em termos de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$

(a) $\operatorname{tg}\theta$ (b) $\cos^2\frac{\theta}{2}$ (c) $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$ (d) $\operatorname{cossec}^2\frac{\theta}{2}$ (e) $\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}$

13. Se os ângulos de um triângulo medem x, $x+1$ e $x+2$ (em radianos), encontre x.

14. A seguir temos o triângulo ABC, onde $AB = BC = CA = 2$ e $AM = MC$.



Com base nele, encontre:

(a) O comprimento BM (b) θ e β em radianos.

(c) $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\theta$ e $\operatorname{tg}\beta$.

15. Dado um triângulo ABC, se $\widehat{C} = \pi/2$ e $\widehat{A} = \widehat{B}$, encontre $\widehat{A}$ em radianos e calcule $\cos\widehat{A}$, $\operatorname{sen}\widehat{A}$ e $\operatorname{tg}\widehat{A}$. (*Dica:* Aqui $\widehat{A}$ representa o ângulo no vértice A, $\widehat{B}$ o ângulo no vértice B, e $\widehat{C}$ representa o ângulo no vértice C. Faça um desenho.)

16. Calcule os seguintes valores das funções em cada ângulo. (*Dica:* Use identidades trigonométricas.)

(a) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})$ (b) $\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})$ (c) $\cos(\frac{\pi}{2} + \pi)$

(d) $\operatorname{sen}(3\pi) + \cos(3\pi)$ (e) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{12})$

17. Em $t = 0$ dois carros se encontram na intersecção de duas estradas retas, com velocidades constantes $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, que formam um ângulo θ.

(a) Qual é a distância entre os carros t horas depois deles passarem pelo cruzamento?

(b) Calcule a distância entre os carros 1 hora após passarem pelo cruzamento se:

(i) $v_1 = v_2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$ (ii) $v_1 = v_2$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$

(iii) $v_1 = v_2$ e $\theta = 0$ (iv) $v_1 = 2v_2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$

18. Dadas as funções f e g a seguir, obtenha $f \circ g$ e $g \circ f$ e seus respectivos domínios de definição:

(a) $f(x) = \sqrt{9 - 9x^2}$ e $g(x) = \operatorname{cotg} x$.

(b) $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$

19. Encontre funções f e g de modo que a função h possa ser escrita como $h = f \circ g$. Nem f nem g devem ser a função identidade.

(a) $h(x) = \operatorname{sen} 2x$ (b) $h(x) = \operatorname{sen} x^2$

(c) $h(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (d)$h(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$

(e) $h(x) = \operatorname{sen}^2 3x$ (f) $h(x) = |\operatorname{sen} x|$

(g) $h(x) = \cos|x|$ (h) $h(x) = \tan(x^2 + 1)$

(i) $h(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ (j) $h(x) = 2^{\operatorname{cossec} x}$

(k) $h(x) = 3\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1$ (l) $h(x) = \operatorname{sen}(\cos^2 x)$

20. Dizer como as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 4^x$ e $h(x) = \operatorname{tg} x$ devem ser compostas para que se obtenha a função $h(x) = 4^{\operatorname{tg} x^2}$.

21. Calcular o período das funções

(a) $\operatorname{tg} 4x$ (b) $\operatorname{sen}(x^2)$ (c) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}x)$.

(d) $\cos(\frac{2}{3}x^2)$ (e) $\operatorname{cossec}(\frac{\pi}{7}\sqrt{x})$ (f) $\operatorname{cotg}(7Bx)$ (onde $B > 0$).

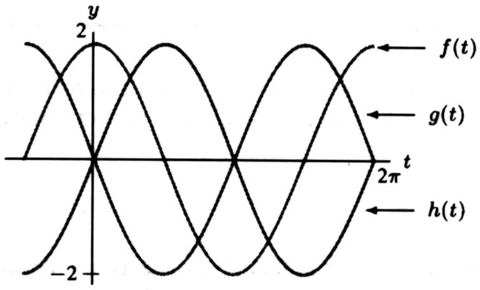
22. Esboce o gráfico das seguintes funções, identificando cuidadosamente as amplitudes e períodos. Não use calculadora gráfica ou computador.

(a) $y = 3\,\text{sen}\,x$ (b) $y = 3\,\text{sen}\,2x$ (c) $y = -3\,\text{sen}\,2\theta$.

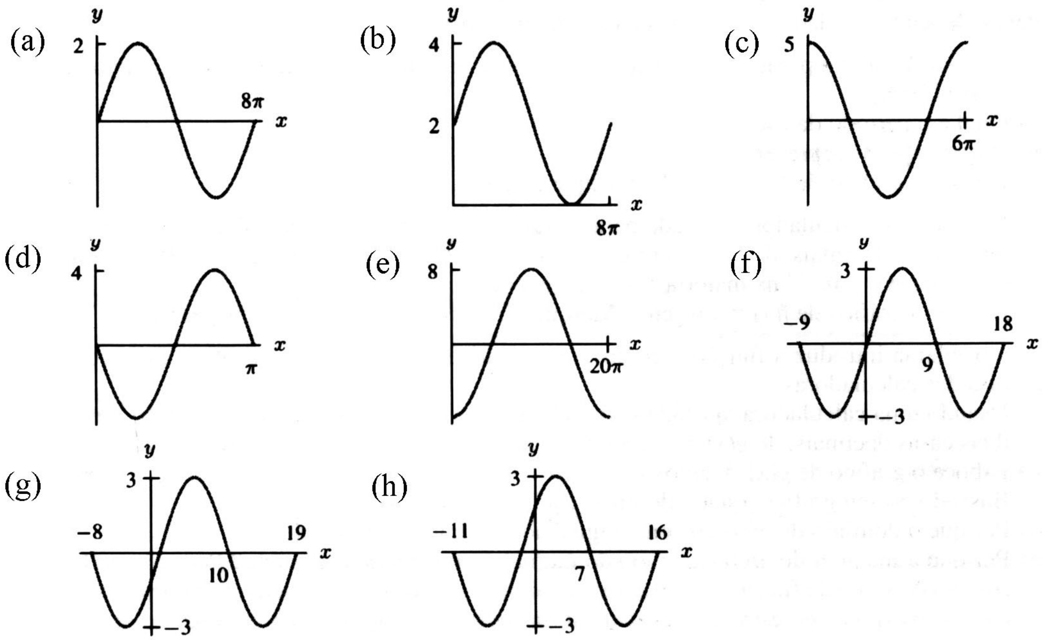
(d) $y = 4\cos 2x$ (e) $y = 4\cos(\frac{1}{4}t)$ (f) $y = 5 - \text{sen}\,2t$

23. Relacione as funções abaixo com os gráficos da figura, explicando os por quês.

(a) $y = 2\cos(t - \frac{\pi}{2})$ (b) $y = 2\cos t$ (c) $y = 2\cos(t + \frac{\pi}{2})$.



24. Nos itens a seguir, encontre uma possível fórmula para cada gráfico



25. (a) Usando uma calculadora gráfica, ou um computador, encontre o período de $2\,\text{sen}\,3t + 3\cos t$.

(b) Qual é o período de $\text{sen}\,3t$? E de $\cos t$?

(c) Use a resposta da parte (b) para justificar sua resposta da parte (a).

26. (a) Usando uma calculadora gráfica, ou um computador, encontre o período de $2\,\text{sen}\,4x + 3\cos 2x$. (b) Determine

27. Se m e n são dois números naturais, obtenha o período da função $\cos(mx) + \text{sen}(nx)$.

28. Defina e trace o gráfico das inversas das seguintes restrições principais de funções trigonométricas (não dê resultados aproximados):

(a) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ (b) $\text{cotg} :]0, \pi[\to I\!R$

(c) $\sec : [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi] \to [1, +\infty[\cup] - \infty, -1]$

(d) $\text{cossec} : [-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}] \to] - \infty, 1] \cup]1, \infty[$

29. Calcule:

(a) $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$ (b) $\arccos\frac{1}{2}$ (c) $\operatorname{arctg}1$ (d) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$

(e) $\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{2}}$ (f) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ (g) $\operatorname{arctg}0$ (h) $\operatorname{arcsen}1$

(i) $\operatorname{arcsen}0$ (j) $\arccos 1$ (k) $\arccos 0$ (l) $\operatorname{arccotg}(-1)$

(m) $\operatorname{arctg}(-1)$ (n) $\operatorname{arccotg}\sqrt{3}$ (o) $\operatorname{arcsen}(-\frac{1}{2})$ (p) $\operatorname{arcsec}\sqrt{2}$

(q) $\operatorname{arccossec}(-\frac{2\sqrt{3}}{3})$ (r) $\operatorname{arcsec}(-\frac{2\sqrt{3}}{3})$ (s) $\operatorname{arccotg}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ (t) $\operatorname{arcsec}(-1)$

(u) $\operatorname{arccossec}1$ (v) $\operatorname{arcsec}2$ (w) $\operatorname{arccossec}2$ (x) $\operatorname{arcsen}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

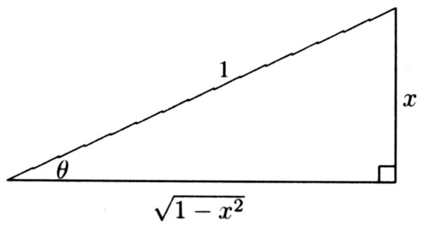
30. Prove que $\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to I\!R$ é estritamente crescente.

31. Prove que $\operatorname{tg} x$ é estritamente crescente em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

32. Para simplificar a expressão $\cos(\operatorname{arcsen} x)$, começamos colocando $\theta = \operatorname{arcsen} x$, com as restrições

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Como $\operatorname{sen}\theta = x$, pela definição de arcsen, podemos construir um triângulo retângulo e calcular o terceiro lado pelo Teorema de Pitágoras:



Observe que $\cos(\operatorname{arcsen} x)$ é $\cos\theta$. Desta forma, o desenho nos mostra que:

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$$

Usando uma idéia semelhante a essa, simplifique e calcule:

(a) $\cos(\operatorname{arcsen} x)$ (b) $\operatorname{sen}(\arccos x)$ (c) $\cos(\operatorname{arctg} x)$

(d) $\cos(\operatorname{arcsec} x)$ (e) $\operatorname{tg}(\arccos x)$ (f) $\operatorname{sen}(\arccos 1)$

(g) $\cos(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2})$ (h) $\operatorname{tg}(\arccos 0)$

33. Assumindo que $x > 0$, simplifique as funções abaixo eliminando as funções trigonométricas de suas expressões.

(a) $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)$. (b) $g(x) = \sec(\operatorname{arcsen} x)$. (c) $h(x) = \cos(\operatorname{arccossec} x)$.

(d) $m(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arccossec} x)$. (e) $n(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)$. (f) $\phi(x) = \operatorname{cossec}(\operatorname{arccossec} x)$.

(g) $\theta(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x)$. (h) $a(x) = \sec(\operatorname{arccotg} x)$. (i) $\lambda(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arccotg} x)$.

34. Assumindo que $x \in (0,1)$, simplifique as funções abaixo eliminando as funções trigonométricas de suas expressões.

(a) $f_0(x) = \operatorname{sen}(\arccos x)$. (b) $f_1(x) = \cos(\arccos x)$. (c) $f_2(x) = \cos(2\arccos x)$.

(d) $f_3(x) = \cos(3\arccos x)$. (e) $f_4(x) = \cos(4\arccos x)$.

Respostas:

1. (a) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (e) $\frac{17\pi}{18}$ (g) $\frac{\pi}{12}$ (i) 6π

(b) $\frac{\pi}{18}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$ (f) $\frac{3\pi}{2}$ (h) $\frac{70\pi}{18}$ (j) $\frac{\pi}{5}$

2. (a) $3900°$ (b) $90°$ (c) $540°$ (d) $5°$ (e) $1800°$ (f) $270°$

5. (a) $\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$.

(b) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

(c) $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta + 8\cos^2\theta + 1$.

(d) $\operatorname{sen} 4\theta = 4\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta$.

9. (a) $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(b) $x = k\pi/2$ ou $x = k\pi/5,\ k \in \mathbb{Z}$.

(c) $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(d) $x = 2k\pi$ ou $x = \pi + 2k\pi$ ou $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{10\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\nexists$	$-\sqrt{3}$
$\sec\theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\nexists$	-2	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\nexists$	2
$\operatorname{cotg}\theta$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nexists$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$\nexists$	1	$\nexists$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{cossec}\theta$	$\nexists$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\nexists$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10.

11. se $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x^2$, então $\operatorname{sen} x^2 = f(g(x))$, $\operatorname{sen}^2 x = g(f(x))$ e $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) = f(f(x))$.

12. (a) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

(b) $\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

(c) $\dfrac{1-\cos\theta}{2}$

(d) $\dfrac{2}{1-\cos\theta}$

(e) $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

13. $x = \frac{\pi}{3} - 1$.

14. (a) $\sqrt{3}$

(b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $\beta = \frac{\pi}{6}$

(c) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos\theta = \frac{1}{2}$,$\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$,$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$,$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$,$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

15. $\widehat{A} = \frac{\pi}{4}$, $\cos\widehat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\widehat{A} = 1$

16. (a) $\dfrac{(1+\sqrt{3})}{4}\sqrt{2}$

(b) $\dfrac{(1-\sqrt{3})}{4}\sqrt{2}$

(c) 0

(d) -1

(e) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

17. (a) $t\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\theta}$.

(b) (i) v_1. (ii) $\sqrt{2-\sqrt{2}}v_1$. (iii) 0. (iv) $\sqrt{3}v_2$.

18. (a) $(f\circ g)(x)=3\sqrt{1-\operatorname{cotg}^2 x}$, $Dom(f\circ g)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{4}+n\pi,\frac{3}{4}\pi+n\pi\right]$;

$(g\circ f)(x)=\operatorname{cotg}(3\sqrt{1-x^2})$, $Dom(g\circ f)=(-1,1)$

(b) $(f\circ g)(x)=\cos(\sqrt{1-4x^2})$, $Dom(f\circ g)=\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$;

$(g\circ f)(x)=\sqrt{1-4\cos^2 x}$, $Dom(g\circ f)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+n\pi,\frac{2}{3}\pi+n\pi\right]$

19. (a) $f(x)=\operatorname{sen}x$, $g(x)=2x$

(b) $f(x)=\operatorname{sen}x$, $g(x)=x^2$

(c) $f(x)=x^2$, $g(x)=\operatorname{sen}x$

(d) $f(x)=\operatorname{sen}x$, $g(x)=\cos x$

(e) $f(x)=x^2$, $g(x)=\operatorname{sen}3x$

(f) $f(x)=|x|$, $g(x)=\operatorname{sen}x$

(g) $f(x)=\cos x$, $g(x)=|x|$

(h) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $g(x)=x^2+1$

(i) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\operatorname{sen}x$

(j) $f(x)=2^x$ $g(x)=\operatorname{cossec}x$

(k) $f(x)=3x^2+x+1$ $g(x)=\operatorname{sen}x$

(l) $f(x)=\operatorname{sen}x$ $g(x)=\cos^2 x$

20. $p=g\circ h\circ f$.

21. (a) $\frac{\pi}{4}$.

(b) Não é periódica.

(c) 4.

(d) Não é periódica.

(e) Não é periódica.

(f) $\frac{\pi}{7B}$.

22. (a) $P=2\pi$, $A=3$

(b) $P=\pi$, $A=3$

(c) $P=\pi$, $A=3$

(d) $P=\pi$, $A=4$

(e) $P=8\pi$, $A=4$

(f) $P=\pi$, $A=1$

23. (a) $h(t)$. (b) $f(t)$. (c) $g(t)$.

24. (a) $f(x)=2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$

(b) $f(x)=2+2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$

(c) $f(x)=5\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(d) $f(x)=-4\operatorname{sen}(2x)$

(e) $f(x)=-8\cos\left(\frac{x}{10}\right)$

(f) $f(x)=3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right)$

(g) $f(x)=3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(x-1)}{9}\right)$

(h) $f(x)=3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(x+2)}{9}\right)$

25. (a) O período é 2π.

(b) O período de $\operatorname{sen}3t$ é $\frac{2\pi}{3}$ e de $\cos t$ é 2π.

(c) O período de $2\operatorname{sen}3t+3\cos t$ é 2π pois este é o menor número positivo multiplo de $\frac{2\pi}{3}$ e 2π.

26. (a) O período é π.

(b) O período de $\operatorname{sen}4x$ é $\frac{\pi}{2}$ e de $\cos 2x$ é π. Logo o período de $2\operatorname{sen}4x+3\cos 2x$ é o menor número positivo multiplo de $\frac{\pi}{2}$ e π, que é π.

27. O período é $\frac{2M\pi}{mn}$, onde $M=\operatorname{mmc}(m,n)$.

29.

(a) $\frac{\pi}{6}$.
(b) $\frac{\pi}{3}$.
(c) $\frac{\pi}{4}$.
(d) $\frac{\pi}{3}$.
(e) $\frac{\pi}{4}$.
(f) $\frac{\pi}{6}$.
(g) 0.
(h) $\frac{\pi}{2}$.
(i) 0.
(j) 0.
(k) $\frac{\pi}{2}$.
(l) $-\frac{\pi}{4}$.
(m) $-\frac{\pi}{4}$.
(n) $\frac{\pi}{6}$.
(o) $-\frac{\pi}{6}$.
(p) $\frac{\pi}{4}$.
(q) $-\frac{\pi}{3}$.
(r) $\frac{5\pi}{6}$.
(s) $-\frac{\pi}{3}$.
(t) π.
(u) $\frac{\pi}{2}$.
(v) $\frac{\pi}{3}$.
(w) $\frac{\pi}{6}$.
(x) $-\frac{\pi}{3}$.

30. Se temos $\theta, \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ com $\theta > \phi$, então $\theta + \phi \in]-\pi, \pi[$ e $\theta - \phi \in]0, \pi]$. Assim, como $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) > 0$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) > 0$, temos que $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\phi > 0$, ou seja, $\operatorname{sen}\theta > \operatorname{sen}\phi$. Portanto a função é estritamente crescente.

31. Se temos $\theta, \phi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ com $\theta > \phi$, então $\theta - \phi \in]0, \pi[$. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\phi &= (1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\phi)\operatorname{tg}(\theta - \phi) \\
&= \left(1 + \frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi}{\cos\theta\cos\phi}\right)\frac{\operatorname{sen}(\theta-\phi)}{\cos(\theta-\phi)} \\
&= \left(1 + \frac{\cos(\theta-\phi) - \cos\theta\cos\phi}{\cos\theta\cos\phi}\right)\frac{\operatorname{sen}(\theta-\phi)}{\cos(\theta-\phi)} \\
&= \frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos\theta\cos\phi}\frac{\operatorname{sen}(\theta-\phi)}{\cos(\theta-\phi)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\theta-\phi)}{\cos\theta\cos\phi}
\end{aligned}$$

com $\operatorname{sen}(\theta - \phi) > 0$, $\cos\theta > 0$ e $\cos\phi > 0$. Logo $\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\phi > 0$ e a função é estritamente crescente.

32. (a) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$
(b) $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
(c) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
(d) $\cos(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{x}$
(e) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
(f) $\operatorname{sen}(\arccos 1) = 0$
(g) $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(h) $\operatorname{tg}(\arccos 0) = \infty$

33. (a) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
(b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
(c) $h(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
(d) $m(x) = \frac{1}{x}$.
(e) $n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
(f) $\phi(x) = x$.
(g) $\theta(x) = \frac{1}{x}$.
(h) $a(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
(i) $\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

34. (a) $f_0(x) = \sqrt{1-x^2}$.
(b) $f_1(x) = x$.
(c) $f_2(x) = 2x^2 - 1$.
(d) $f_3(x) = 4x^3 - 3x$.
(e) $f_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.