CM 005 - Primeira Prova - 06 / 04

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Nome: GRR:

- Não serão aceitas respostas sem justificativas;
- As questões de 1 até 5 tem valor igual a 20 pontos;
- As questões 6 e 7 tem valor igual a 30 (cada uma);
- Serão corrigidas no máximo 6 questões. Indique na folha de respostas quais você escolheu;
- A maior nota possível é 100 pontos;
- Não é necessário responder com caneta;

(Questão 1) Resolva o sistemas lineares

$$(a) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ -6x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

(Questão 2) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que B é a inversa de A;

(b) Qual é a solução da equação $A \cdot x = (1,2,3)^T$?

(Questão 3) (a) Sejam A e B duas matrizes de ordem 3×3 tais que $det(A) = 4$ e $det(B) = 5$. Clacule $det(A \cdot B)$ e $det(B^{-1} \cdot A)$;

(b) Obtenha um conjunto gerador para o subespaço $W = \{v \in \mathbb{R}^4;\ v = (x+y, x-y+2z, y, z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}\}$;

(Questão 4) Neste exercício, $P^3(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial (real de dimensão 3) dos polinômios do tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto β na sequência é uma base de $P^3(\mathbb{R})$.

$$\beta = \{p_1(x) = x + 2,\ p_2(x) = x + 1,\ p_2(x) = x^2 - 1\}$$

(Questão 5) Considere em $\mathbb{R}^3$ as bases $\beta = \{(1,1,1), (1,2,2), (2,3,4)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

(a) Determine a matriz mudança da base β para $\mathcal{C}$;

(b) Determine as coordenadas do vetor $(0,-1,1)_\beta$ na base $\mathcal{C}$;

(Questão 6) Considere $A_{n \times n}$ uma matriz real inversível e um conjunto de vetores $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ em $\mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que se β é L.I., então o conjunto $\{A \cdot v_1, \ldots, A \cdot v_k\}$ é L.I.;

(b) Mostre que se β é L.D., então o conjunto $\{A \cdot v_1, \ldots, A \cdot v_k\}$ é L.D.;

(Questão 7) (a) Mostre que se W e S são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, então o conjunto $A = W \cap S$ é também um subespaço vetorial de V;

(b) Considere uma matriz real $A_{m \times n}$. Mostre que os conjuntos

$$Nuc(A) = \{u \in \mathbb{R}^n;\ A \cdot u = 0\} \text{ e } Im(A) = \{v \in \mathbb{R}^m;\ \exists u \in \mathbb{R}^n \quad \text{com} \quad A \cdot u = v\}$$

são subespaços de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente.