CM 068 - variáveis Complexas

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3

Exercício 1 *Prove que* $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(z) = 1/z^2$ *é derivável e que* $f'(z) = -1/z^2$ *utilizando: definição, regra da cadeia e Cauchy-Riemann.*

Exercício 2 *Dada uma função* $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dizemos que* $z_0 \in A$ *é um ponto fixo de* f *se* $f(z_0) = z_0$*. Obtenha os pontos fixos da função* $f : \mathbb{C} \setminus \{z;\ z^2 = -1\} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 1}$$

Exercício 3 *Mostre que a função* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(z) = e^{z^2}$ *é holomorfa. Obtenha* $f'(z)$

Exercício 4 *Sejam* A *um conjunto aberto de* $\mathbb{C}$ *e* $f : A \to \mathbb{C}$ *uma função analítica. Defina o conjunto aberto* $A^* = \{\overline{z};\ z \in A\}$ *e a função* $g : A^* \to \mathbb{C}$ *dada por* $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$*. Prove que* g *é anlítica e que vale*

$$g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}.$$

Exercício 5 *Em quais pontos de* $\mathbb{C}$ *a função* $f(z) = Im(z)$ *é analítica?*

Exercício 6 *Sejam* $G \subset \mathbb{C}$ *uma região e* $f : G \to \mathbb{C}$ *analítica. Mostre que se* $Re(f)$*, ou* $Im(f)$*, é uma função constante em* G*, então* f *é constante em* G*.*

Exercício 7 *Sejam* $G \subset \mathbb{C}$ *uma região e* $f, g : G \to \mathbb{C}$ *analíticas. Mostre que se* $f'(z) = g'(z)$ *em* G*, então* f *e* g *diferem por uma constante.*

Exercício 8 *Verifique que se* f *é uma função inteira e só assume valroes reais, então* f *é constante.*

Exercício 9 *Verifique que se* f *e* $g = \overline{f}$ *são analíticas, então* f *é constante.*

Exercício 10 *Resolva a equação diferencial* $f' - \alpha f = 0$*, definida numa regiaão* G*.*

Exercício 11 *Mostre que as funções hiperbólicas*

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad e \quad \sinh(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

são holomorfas.

Exercício 12 *Utilizando o ramo principal de* z^λ *calcule:*

(a) $2^{\sqrt{2}}$. *(b)* 1^{i}. *(c)* $(5i)^{1+i}$.

Exercício 13 *Mostre que* $exp(log(z)) = z$. *No entanto, mostre que, em geral, têm-se* $log(exp(z)) \neq z$.

Exercício 14 *Determine os pontos onde as funções abaixo são deriváveis e encontre as derivadas.*

(a) $cos(z)$.

(b) $e^{|z|}$.

(c) $xy + iy$.

(d) $1/z$.

(e) $e^{-y}(cosx + isenx)$.

(f) $\dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Exercício 15 *Calcule todos os valores:*

(a) $log(1-i)$. *(b)* $log(1+i)$. *(c)* $log(-ei)$.

Exercício 16 *Obtenha o ramo da função*

$$h(z) = log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$