

# Funções de Uma Variável Complexa

Sérgio L. Zani



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Os números complexos</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Representação vetorial de um número complexo</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Forma polar de um número complexo</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Raízes de números complexos</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Alguns subconjuntos do plano complexo</b>	<b>25</b>
<b>7</b>	<b>Algumas funções elementares</b>	<b>29</b>
<b>8</b>	<b>Limite e continuidade</b>	<b>37</b>
<b>9</b>	<b>Derivação e as equações de Cauchy-Riemann</b>	<b>41</b>
<b>10</b>	<b>Funções analíticas</b>	<b>51</b>
<b>11</b>	<b>Funções multivalentes</b>	<b>57</b>
	11.1 Raiz $n$ -ésima . . . . .	57
	11.2 Logaritmo . . . . .	59
	11.3 Potência . . . . .	61
<b>12</b>	<b>Curvas no plano complexo</b>	<b>63</b>
<b>13</b>	<b>Integração</b>	<b>67</b>
<b>14</b>	<b>O Teorema de Cauchy-Goursat</b>	<b>75</b>
	14.1 Independência do Caminho . . . . .	77
<b>15</b>	<b>Primitiva</b>	<b>79</b>
<b>16</b>	<b>A fórmula de Cauchy</b>	<b>85</b>

<b>17 Funções Harmônicas</b>	<b>93</b>
<b>18 Seqüências e Séries</b>	<b>97</b>
<b>19 Séries de Potências</b>	<b>101</b>
19.1 Série de Taylor . . . . .	112
19.2 Zeros de função analítica . . . . .	115
<b>20 Séries de Laurent</b>	<b>119</b>
<b>21 Singularidades</b>	<b>127</b>
21.1 Singularidades e Série de Laurent . . . . .	129
<b>22 O Teorema do Resíduo e Aplicações</b>	<b>131</b>
22.1 Integrais Impróprias Reais . . . . .	135
22.2 Outros Tipos de Integrais . . . . .	139

# Capítulo 1

## Introdução

Por que precisamos dos *números complexos*?

Antes de responder a esta questão vamos dar uma olhada por que já precisamos estender o conceito de números para podermos resolver algumas equações algébricas simples. Primeiramente, assumiremos os naturais,  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ , como o conceito primordial de *número*. Nos números naturais estão definidas duas operações: a adição (+) e a multiplicação ( $\cdot$  ou  $\times$ ). Também existe uma ordem natural nestes números ( $<$ ). Considere o seguinte

**Problema 1** *Encontre um número natural que somado a 2 resulta em 1.*

Se  $n$  for este tal número natural, deverá satisfazer

$$n + 2 = 1. \tag{1.1}$$

Como o lado esquerdo da equação 1.1 é sempre maior do que  $2 - 1 < 2$  vemos que não existe solução para este problema dentro dos números naturais. Assim, primeira extensão do conceito de número se faz necessária. Daí surgem os números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

que ampliam o conceito dos números naturais e preservam as operações e a ordem que já existiam anteriormente. O elemento 0 é tal que  $0 + m = m$  para todo  $M \in \mathbb{N}$  e, dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-n$  denota o inteiro que satisfaz  $(-n) + n = 0$ . Note que problema 1 tem solução em  $\mathbb{Z}$ .

Vejamos o seguinte

**Problema 2** *Encontre um número inteiro cujo dobro seja a unidade.*

Se  $n$  fosse um inteiro que solucionasse este problema deveríamos ter

$$2n = 1. \tag{1.2}$$

Porém, o lado esquerdo de 1.2 é par, enquanto que o número um é ímpar. Ou seja, não existe solução para o problema 2 dentro dos números inteiros. A solução é ampliar mais uma vez o conceito de números estendendo-o para o conjunto dos números racionais. Aqui a extensão

é um pouco mais elaborada: primeiro formamos o conjunto de todos pares ordenados  $(p, q)$ , com  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ . Depois dizemos que dois pares ordenados  $(p, q), q \neq 0$  e  $(m, n), n \neq 0$  são equivalentes se  $pn = qm$ . Quando isto acontece, representaremos por  $\frac{p}{q}$  ou  $p/q$  todos os pares  $(m, n), n \neq 0$  tais que  $pn = qm$ , e chamaremos  $p/q$  de um número racional. Podemos também definir a soma e a multiplicação entre dois racionais da seguinte maneira

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + qm}{qn} \quad \text{e} \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}, \quad m, n \neq 0.$$

Os números racionais também têm uma ordem natural que estende a ordem existente previamente nos inteiros: dados dois racionais  $r, s$  podemos supor que  $r = p/q$ ,  $q > 0$  e  $s = m/n$ ,  $n > 0$ , e dizemos que  $r, s$  se  $pn < qm$ . As operações e a ordem assim definidas para os números racionais preservam as anteriores. Note que [2](#) apresenta solução em  $\mathbb{Q}$ .

Considere agora o

**Problema 3** *Encontre um quadrado cuja área seja dois.*

Se  $r$  for a medida do lado de um tal quadrado, deveríamos ter

$$r^2 = 2. \tag{1.3}$$

Esta equação, porém, não tem solução dentro dos números racionais. Basta ver que se colocarmos  $r = p/q$ , e notarmos que podemos assumir que  $p$  e  $q$  não apresentam divisores em comum (com exceção de 1 ou  $-1$ ), então [1.3](#) é equivalente a

$$p^2 = 2q^2. \tag{1.4}$$

Assim  $p^2$  é par e, portanto,  $p$  é par (por quê?). Logo, podemos escrever  $p = 2k$  para algum inteiro  $k$ . Colocando esta informação na equação [1.4](#) obtemos

$$(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2.$$

Ou seja,  $q^2$  é par e, conseqüentemente,  $q$  também é par. Mas isto é impossível pois  $p$  e  $q$  não possuem divisores comuns que sejam 1 e  $-1$ . Concluindo, o problema [3](#) não apresenta solução em  $\mathbb{Q}$ , isto é, não existe nenhum número racional que satisfaça a equação  $r^2 = 2$ . Note porém, que existe uma infinidade de racionais que satisfazem a desigualdade  $r^2 < 2$  e que podemos tomar  $r^2$  tão próximo de 2 quanto quisermos. Basta considerar, por exemplo, a seqüência de números racionais dada por

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n + \frac{2}{r_n}), n \geq 1. \end{cases}$$

A próxima extensão a ser considerada, a dos números reais, é mais elaborada do que as anteriores e não a apresentaremos aqui. Contudo, o conjunto dos números reais,  $\mathbb{R}$ , pode ser entendido como um conjunto ordenado contendo os números racionais, sobre o qual estão definidas duas operações (adição e multiplicação) que preservam as propriedades anteriores e satisfazendo o axioma do supremo: todo subconjunto não vazio  $X \subset \mathbb{R}$  e limitado superiormente

possui supremo, isto é, existe um número real  $c$  tal que  $x \leq c$  para todo  $x \in X$  e se  $d \in \mathbb{R}$  satisfizer esta mesma propriedade então  $c \leq d$ . Note que o conjunto  $X = \{x \in \mathbb{R}; x > 0, x^2 < 2\}$  é não vazio, pois  $1 \in X$ , e é limitado superiormente por 2, por exemplo. Desta maneira,  $X$  possui supremo em  $\mathbb{R}$ . Pode-se provar que o supremo de  $X$ , digamos  $c$ , satisfaz  $c^2 = 2$ , resolvendo-se, assim, o problema 3 em  $\mathbb{R}$ .

Considere o

**Problema 4** *Encontre um número cujo quadrado seja igual a  $-1$ .*

Se  $x \in \mathbb{R}$  é solução deste problema então teríamos  $x^2 = -1$ . Isto é impossível, visto que como  $x \neq 0$  então teríamos  $x > 0$  ou  $-x > 0$  e assim,

$$x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x) > 0,$$

uma contradição.

Antes de continuarmos, talvez seja natural tentar explicar por que se deveria resolver um problema como 4. Uma motivação para isto pode ser dada pela equação diferencial que descreve o movimento do pêndulo:

$$y'' + y = 0. \tag{1.5}$$

Note que as funções  $e^x$  e  $e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  satisfazem  $y'' - y = 0$  e, portanto, é natural procuramos solução de 1.5 da forma  $y(x) = e^{\lambda x}$ . Somos levados a

$$(\lambda^2 + 1)e^{\lambda x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, o quadrado de  $\lambda$  deve ser igual a  $-1$ .



# Capítulo 2

## Os números complexos

Considere em  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , o plano cartesiano, duas operações dadas por:

1.  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2.  $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ .

Também podemos definir a multiplicação de um par  $(x, y)$  por um número real  $\lambda$  da seguinte forma:

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad (\text{multiplicação por escalar}).$$

A primeira das operações acima nada mais é do que a soma de coordenadas vetoriais que já é familiar de Álgebra Linear ou Cálculo II e como visto, satisfaz as propriedades associativa e comutativa apresenta um elemento neutro e para todo par ordenado existe um recíproco que somada a ele resulta no elemento neutro. Note que  $\mathbb{C}$  com a adição e a multiplicação por escalar real é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão dois.

Com relação à operação 2, temos a seguinte

**Proposição 1** *A operação definida em  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  por*

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

*é associativa e comutativa e satisfaz  $(1, 0) \cdot (x, y) = (x, y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .*

*Além do mais, se  $(x, y) \neq (0, 0)$  então existe  $(u, v) \in \mathbb{C}$  tal que  $(x, y) \cdot (u, v) = (1, 0)$ .*

**Prova:**

1. **Associatividade:** Por um lado, temos

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \cdot (x_3, y_3) \\ &= (x_1x_2x_3 - x_3y_1y_2 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1) \cdot (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2) \\ &= (x_1x_2x_3 - x_3y_1y_2 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1). \end{aligned}$$

Comparando as expressões acima obtemos o que queríamos mostrar.

2. **Associatividade:** Por um lado, temos

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Por outro lado,

$$(x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + x_1y_2).$$

Comparando as expressões acima obtemos o que queríamos mostrar.

3. **Elemento Neutro:** Temos

$$(1, 0) \cdot (x, y) = (1x - 0y, 1y + 0x) = (x, y).$$

4. **Inverso Multiplicativo:** Se  $(x, y) \neq (0, 0)$  então podemos definir

$$(u, v) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} (x, y) \cdot (u, v) &= (x, y) \cdot \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \left( \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{-y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0). \end{aligned}$$

■

**Exercício 1** *Mostre que se  $(x, y) \neq (0, 0)$  então o inverso multiplicativo de  $(x, y)$  é único.*

Se  $n \in \mathbb{N}$  e  $z \in \mathbb{C}$  definimos  $z^n = z^{n-1} \cdot z$ ,  $n \geq 2$ ,  $z^1 = z$ . O inverso multiplicativo de um número complexo  $z$  não nulo será denotado por  $z^{-1}$  e se  $m$  é um inteiro negativo, definimos  $z^m = (z^{-1})^{-m}$ . Se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , e  $z_2 \neq 0$ , definimos

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}.$$

As operações de multiplicação e adição se relacionam através da distributividade como pode ser visto na seguinte

**Proposição 2** *Para quaisquer pares  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$  tem-se*

$$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3).$$

**Prova:** Por um lado, temos

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \cdot (x_3, y_3) \\ &= (x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3, x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2). \end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3) \\ = (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + x_3y_1) + (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2) \\ = (x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3, x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2). \end{aligned}$$

Comparando as expressões acima obtemos o que queríamos mostrar. ■

**Definição 1** *O conjunto  $\mathbb{C}$  munido das operações de adição e multiplicação definidas acima é chamado de corpo dos números complexos.*

Vale a pena observar que as seguintes propriedades

1.  $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2.  $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

dizem que o subconjunto dos números complexos dado por  $\mathcal{R} = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$  é preservado pela adição e multiplicação. Desta forma, é natural identificarmos  $\mathcal{R}$  com o conjunto dos números reais. Em outras palavras: podemos assumir que o conjunto dos números reais é um subconjunto dos números complexos.

Como já observamos,  $\mathbb{C}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  com respeito à adição e a multiplicação por escalares reais. Além do mais, por seus elementos serem pares ordenados,  $\mathbb{C}$  é um espaço vetorial bidimensional sobre  $\mathbb{R}$ . Desta forma, como  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  formam uma base, todo par  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  se escreve de maneira única como

$$z = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Já vimos que  $(1, 0)$  é o elemento neutro da multiplicação e como  $(1, 0) \in \mathcal{R}$ , vamos denotá-lo também por 1.

Vejam os comportamento de  $(0, 1)$ . Temos

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 - 0) = (-1, 0) = -(1, 0),$$

ou seja,

$$(0, 1)^2 = -(1, 0). \tag{2.1}$$

Assim, o número complexo  $(0, 1)$  possui quadrado recíproco aditivo do elemento neutro da adição. Usaremos a notação  $i = (0, 1)$ , obtendo

$$i^2 = -1.$$

Com isto, todo elemento  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  pode ser escrito de modo único como  $z = x1 + yi$ , ou ainda  $z = x + yi$ . Também escreveremos  $z = x + iy$ .

Dado  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , o número  $x$  é chamado de parte real do número complexo  $z$  e é denotado por  $\Re z$ . O número  $y$  é chamado de parte imaginária do número complexo  $z$  e é denotado por  $\Im z$ . Temos  $z = 0$  se e somente se  $\Re z = \Im z = 0$ .

Com esta nova notação, as operações em  $\mathbb{C}$  podem ser escritas da seguinte forma

1.  $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
2.  $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ .

Além do mais, o inverso multiplicativo de  $z = x + iy \neq 0$ , é dado por

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

**Exemplo 1** *Encontre as partes real e imaginária de  $z = (1 + i)^2$ .*

Temos  $z = (1 + i)(1 + i) = 1 + i + i + i^2 = 2i$ . Logo  $\Re z = 0$  e  $\Im z = 2$ . □

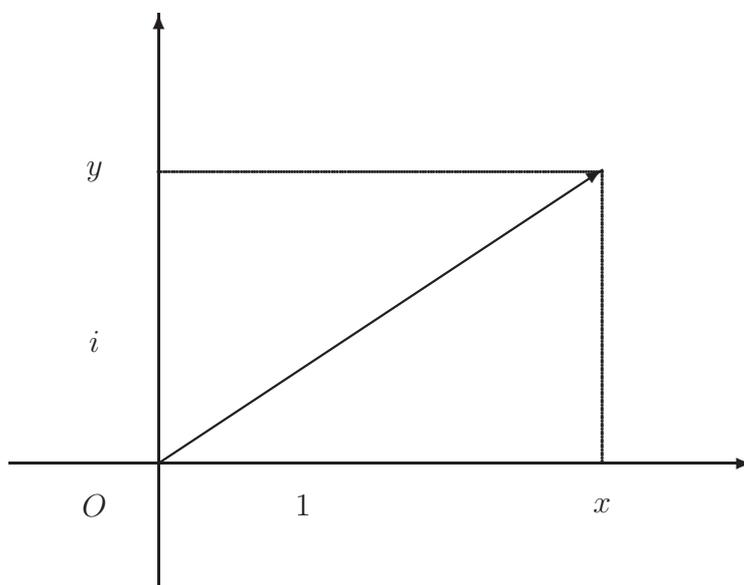
**Exemplo 2** *Encontre as partes real e imaginária de  $z = (1 + i)/(1 - i)$ .*

Temos  $z = (1 + i)(1 - i)^{-1} = (1 + i)\left(\frac{1}{1^2 + (-1)^2} - i\frac{-1}{1^2 + (-1)^2}\right) = \frac{1}{2}(1 + i)^2 = \frac{1}{2}2i = i$ . Logo  $\Re z = 0$  e  $\Im z = 1$ . □

## Capítulo 3

# Representação vetorial de um número complexo

Já vimos que um número complexo  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  é uma representação de um par ordenado  $(x, y)$ . Assim, podemos representá-lo num plano cartesiano  $xOy$ , identificando o eixo  $x$  com os números reais (os múltiplos de  $1 = (1, 0)$ ). O eixo  $y$  representa os múltiplos de  $i = (0, 1)$  e será denominado de eixo imaginário.



Com esta visão geométrica dos números complexos, definimos o módulo de  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , como  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . A partir daí, definimos a distância entre dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  como  $|z_1 - z_2|$ . É imediato que valem as desigualdades  $\Re z \leq |\Re z| \leq |z|$  e  $\Im z \leq |\Im z| \leq |z|$ .

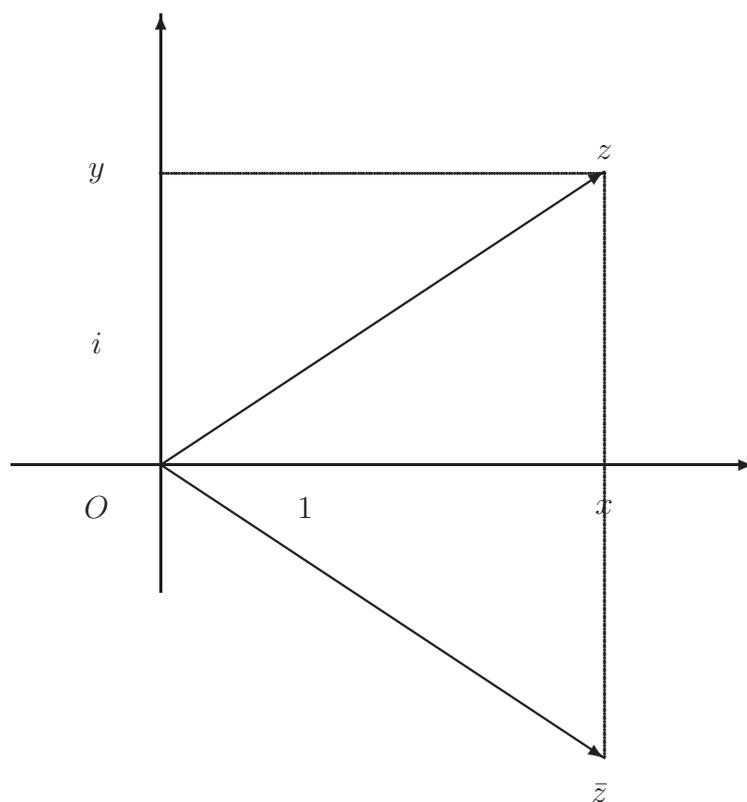
O conjugado de  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , é definido como  $\bar{z} = x - iy$ . Geometricamente,  $\bar{z}$  é a reflexão do vetor que representa  $z$  com relação ao eixo real.

Note que valem as seguintes propriedades elementares

**Proposição 3** Para todo  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  temos

1.  $|z| = |\bar{z}|$
2.  $z + \bar{z} = 2\Re z$
3.  $z - \bar{z} = 2i\Im z$
4.  $\overline{\bar{z}} = z$
5.  $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
6.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
7.  $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$  se  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 2** Prove as propriedades acima.



Também temos

**Proposição 4** Para todo  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  temos

1.  $|z|^2 = z\bar{z}$
2.  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
3.  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

4.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ , se  $z_2 \neq 0$
5.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
6.  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ .

**Prova:** Colocando  $x = \Re z, y = \Im z, x_1 = \Re z_1, y_1 = \Im z_1, x_2 = \Re z_2$  e  $y_2 = \Im z_2$ , temos

1.  $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i(xy - xy) = x^2 + y^2 = |z|^2$ .

2. Por um lado,

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

e pelo outro,

$$\overline{z_1} \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(-x_1 y_2 - x_2 y_1) = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

3. Como

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$$

extraindo a raiz quadrada (as expressões envolvem números reais) obtemos o resultado.

- 4.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} \right| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1 \overline{z_2}| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1| |\overline{z_2}| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1| |z_2| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

- 5.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2) (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{z_1 z_2} + z_1 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |\overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2, \end{aligned}$$

extraindo a raiz quadrada obtemos o resultado.

- 6.

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$

e

$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| = |z_1 - z_2| + |z_1|.$$

Daí

$$\pm(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 - z_2|,$$

ou seja,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

**Exemplo 3** Determine todos os valores  $a \in \mathbb{R}$  para que

$$\frac{a+i}{1+ai}$$

seja real.

Temos

$$\frac{a+i}{1+ai} = \frac{a+i}{1+ai} \cdot \frac{1-ai}{1-ai} = \frac{a-a^2i+i+a}{1+a^2} = \frac{2a}{1+a^2} + i\frac{1-a^2}{1+a^2}.$$

Assim,

$$\Im\left(\frac{a+i}{1+ai}\right) = 0 \iff a^2 = 1 \iff a = 1 \text{ ou } a = -1.$$

□

**Exemplo 4** Dados  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ , encontre  $|z|$ .

Temos

$$|z|^2 = z\bar{z} = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1.$$

Logo,  $|\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta| = 1$ .

□

**Exemplo 5** Resolva a equação  $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$ .

Colocando  $x = \Re z$  e  $y = \Im z$ , vemos que  $z$  satisfaz a equação acima se e somente se

$$\begin{aligned} i(x+iy) + 2(x-iy) = -1+i &\iff 2x-y+i(x-2y) = -1+i \\ &\iff \begin{cases} 2x-y = -1 \\ x-2y = 1 \end{cases} \iff x=y = -1. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 6** Determine todos os números complexos cujo quadrado seja igual ao conjugado.

Um número complexo  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  é solução deste problema se e somente se

$$\begin{aligned} z^2 = \bar{z} &\iff (x+iy)^2 = x-iy \iff x^2 - y^2 + 2xyi = x-iy \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \iff y = 0 \text{ ou } x = -1/2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Se  $y = 0$  a primeira equação acima é equivalente a  $x^2 = x$  cujas soluções são  $x = 0$  ou  $x = 1$ .

Se  $x = -1/2$  a primeira equação acima é equivalente a  $y^2 = 3/4$  cujas soluções são  $y = -\sqrt{3}/2$  ou  $y = \sqrt{3}/2$ .

Assim, o conjunto das soluções do problema é dado por

$$\left\{0, 1, -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

□

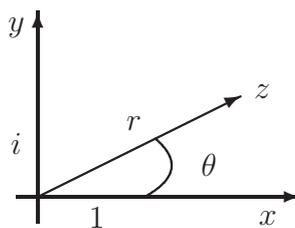
# Capítulo 4

## Forma polar de um número complexo

Dado um número complexo  $z \neq 0$ , podemos representá-lo em coordenadas polares como

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (4.1)$$

onde  $r = |z|$  e  $\theta$  é o ângulo que o vetor representado por  $z$  faz com o eixo real medido no sentido anti-horário em radianos. Devido à periodicidade das funções seno e cosseno, é evidente que a equação 4.1 continua válida se substituirmos  $\theta$  por  $\theta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Um ângulo  $\theta$  que satisfaz 4.1 é chamado de argumento do número complexo  $z$  e é denotado por  $\arg z$ . Enfatizamos que existem infinitos argumentos para um mesmo número complexo. Porém, dado um intervalo de números reais da forma  $I = [\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ , existe apenas um argumento em  $I$  para cada  $z \neq 0$ .



Colocando  $z = x + iy \neq 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , vemos que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Vejamos como se comporta o  $\arg z \in [0, 2\pi)$ . Se  $z$  for um número real então  $\arg z = 0$  se  $\Re z > 0$  e  $\arg z = \pi$  se  $\Re z < 0$ . Se  $z$  é um número imaginário puro então  $\arg z = \frac{\pi}{2}$  se  $\Im z > 0$  e  $\arg z = \frac{3\pi}{2}$  se  $\Im z < 0$ . Finalmente, se  $\Re z \neq 0$  e  $\Im z \neq 0$  então  $\theta = \arg z$  fica determinado pela equação

$$\tan \theta = \frac{\Im z}{\Re z}$$

e pelo quadrante onde se encontra o vetor que representa  $z$ .

**Observação 1** *Dois números complexos coincidem se e somente se têm o mesmo módulo e seus argumentos diferem por um múltiplo inteiro de  $2\pi$ .*

A representação 4.1 continua válida quando  $z = 0$ , tomando  $r = 0$  e  $\theta \in \mathbb{R}$  arbitrário.

**Exemplo 7** Encontre uma representação polar para  $z = 1 + i$ .

Temos  $r = |z| = \sqrt{2}$ . Como  $z$  se encontra no primeiro quadrante temos que a solução para  $\tan \theta = \frac{1}{1} = 1$  é  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Assim, uma forma polar de  $z$  é

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right).$$

□

**Exemplo 8** Dado  $\theta \in \mathbb{R}$ , determine uma forma polar dos seguintes números complexos

$$a) z = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta \qquad b) v = \operatorname{sen} \theta - i \cos \theta.$$

É imediato que ambos números acima têm módulo 1.

Note que

$$z = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)$$

que é uma forma polar para  $z$ .

Observe que

$$\begin{aligned} u &= -i(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right) (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &= \cos \frac{3\pi}{2} \cos \theta - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \operatorname{sen} \theta + i \left( \cos \frac{3\pi}{2} \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \cos \theta \right) \\ &= \cos \left( \theta + \frac{3\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{3\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

que é uma forma polar.

□

**Exercício 3** Dado  $0 < \theta < \pi$ , determine uma forma polar dos seguintes número complexo

$$z = 1 + \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

**Proposição 5** Seja  $z \neq 0$ . Se  $\theta$  é um argumento de  $z$  então  $-\theta$  é um argumento de  $\bar{z}$ .

**Prova:** Escrevendo  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , tomando o conjugado, obtemos

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) = r(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)).$$

■

**Proposição 6** Se  $r_j$  e  $\theta_j$  representam o módulo e um argumento, respectivamente, de  $z_j \in \mathbb{C}$ , para  $j = 1, 2$ , então  $r_1 r_2$  e  $\theta_1 + \theta_2$  representam o módulo e um argumento de  $z_1 z_2$ .

**Prova:** Basta notar que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)][r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

■

**Corolário 1** Se  $r_j$  e  $\theta_j$  representam o módulo e um argumento, respectivamente, de  $z_j \in \mathbb{C}$ , para  $j = 1, 2$ ,  $z_2 \neq 0$ , então  $r_1/r_2$  e  $\theta_1 - \theta_2$  representam o módulo e um argumento de  $z_1/z_2$ .

**Prova:** Temos

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{1}{r_2^2} r_1 r_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)) \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

■

**Observação 2** Seja  $z_o = \cos \theta_o + i \operatorname{sen} \theta_o$ ,  $\theta_o > 0$ . Dado  $z \in \mathbb{C}$ , temos que  $z_o z$  é a rotação do vetor que representa  $z$  pelo ângulo  $\theta_o$  no sentido anti-horário. Se  $\theta_o < 0$  a rotação é no sentido oposto.

A observação acima segue imediatamente da proposição 6 e do corolário 1 notando-se que  $|z_o| = 1$ .

A proposição 6 se estende, por indução finita, da seguinte maneira:

**Proposição 7** Se  $r_j$  e  $\theta_j$  representam o módulo e um argumento, respectivamente, de  $z_j \in \mathbb{C}$ , para  $j = 1, \dots, n$  então  $r_1 \cdots r_n$  e  $\theta_1 + \cdots + \theta_n$  representam o módulo e um argumento de  $z_1 \cdots z_n$ .

Tomando  $z = z_1 = \cdots = z_n$  obtemos o seguinte

**Corolário 2** Se  $r$  e  $\theta$  representam o módulo e um argumento, respectivamente, de  $z \in \mathbb{C}$ , então para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)).$$

Além do mais, se  $z \neq 0$ , a fórmula acima é válida para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Corolário 3 (De Moivre)** Para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  e todo  $n \in \mathbb{Z}$  temos

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta).$$

**Prova:** Basta notar que  $|\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta| = 1$ .

■

**Exemplo 9** *Mostre que*

$$\{i^n; n \in \mathbb{Z}\} = \{-1, 1, -i, i\}.$$

Como  $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$ , obtemos  $i^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$ . Agora, se  $n \in \mathbb{Z}$ , podemos escrever  $n = 4k + r$  onde  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$  e então

$$i^n = \cos \frac{(4k+r)\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{(4k+r)\pi}{2} = \cos \frac{r\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{r\pi}{2} = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 0 \\ i, & \text{se } r = 1 \\ -1, & \text{se } r = 2 \\ -i, & \text{se } r = 3. \end{cases}$$

# Capítulo 5

## Raízes de números complexos

Nas seções anteriores vimos como operar com números complexos. Nesta seção vamos nos ater a encontrar soluções para equações do tipo

$$z^n = z_o, \quad (5.1)$$

em que  $n \in \mathbb{N}$  e  $z_o \in \mathbb{C}$  são dados. A melhor maneira para tratar este problema é usando a forma polar de representação.

Primeiramente, é claro que se  $z_o = 0$  então a equação 5.1 apresenta somente a solução  $z = 0$ . Escrevendo  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  e  $z_o = r_o(\cos \theta_o + i \operatorname{sen} \theta_o)$  vemos que 5.1 é equivalente a

$$r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = r_o(\cos \theta_o + i \operatorname{sen} \theta_o), \quad (5.2)$$

que por sua vez é equivalente a

$$\begin{cases} r^n = r_o \\ n\theta = \theta_o + 2k\pi, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{r_o} \\ \theta = \frac{\theta_o}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (5.3)$$

É bom salientar que  $\sqrt[n]{r_o}$  representa a raiz  $n$ -ésima (positiva) do número real e positivo  $r_o$ . Quanto à equação

$$\theta = \frac{\theta_o}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

vemos que para cada  $k \in \mathbb{Z}$  temos um valor distinto de  $\theta$  e para designar esta dependência escreveremos  $\theta_k$  ao invés de  $\theta$ , isto é

$$\theta_k = \frac{\theta_o}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Também escreveremos

$$z_k = \sqrt[n]{r_o}(\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k).$$

É fácil ver que para todo  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  temos

$$\cos(\theta_{k+\ell n}) + i \operatorname{sen}(\theta_{k+\ell n}) = \cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k,$$

ou seja,  $z_{k+\ell n} = z_k$ . Isto significa que podemos nos restringir às soluções dadas por

$$z_0, \dots, z_{n-1}. \quad (5.4)$$

Note que os números em 5.4 são dois a dois distintos, pois embora tenham o mesmo módulo, seus argumentos não diferem por nenhum múltiplo inteiro de  $2\pi$  (veja a observação 1).

Em resumo, se  $z_o = r_o(\cos \theta_o + i \operatorname{sen} \theta_o) \neq 0$ , a equação 5.1 apresenta  $n$  soluções (raízes) distintas dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{r_o} \left( \cos \left( \frac{\theta_o + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_o + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Note que se colocarmos

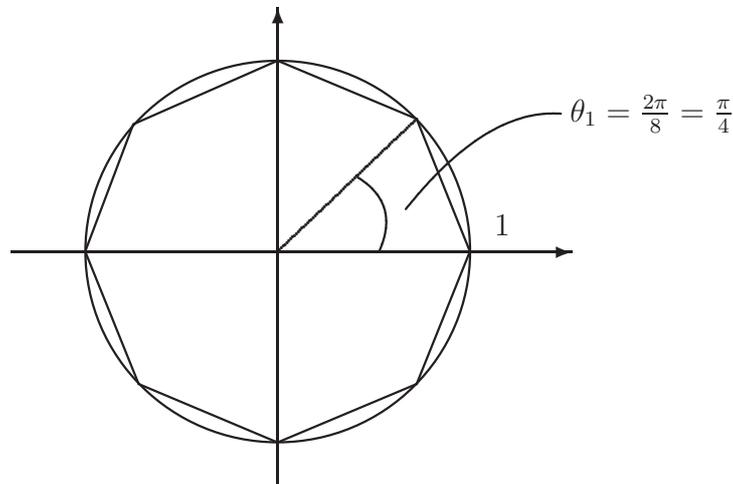
$$\zeta = \sqrt[n]{r_o} \left( \cos \left( \frac{\theta_o}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_o}{n} \right) \right)$$

e

$$\zeta_k = \cos \left( \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

obtemos  $\zeta^n = z_o$ ,  $\zeta_k^n = 1$  e as soluções de 5.1 são dadas por  $z_k = \zeta \zeta_k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Ou seja conhecendo-se uma raiz de  $z_o$  as outras raízes são obtidas multiplicando-a pelas raízes da unidade.

Observe ainda que pela fórmula de De Moivre (veja 3) temos  $\zeta_k = \zeta_1^k$  para  $k = 0, \dots, n-1$ . De onde,  $\zeta_k = \zeta_1 \zeta_{k-1}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , que geometricamente nos diz que  $\zeta_k$  é obtido rodando  $\zeta_{k-1}$  de um ângulo  $\frac{2\pi}{n}$  no sentido anti-horário. Desta maneira, as raízes  $n$ -ésimas da unidade são precisamente os vértices do polígono regular inscrito na circunferência  $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  tendo como um do vértices o número um.



As raízes de  $z^8 = 1$ .

**Exemplo 10** *Encontre todas as raízes de  $z^4 = 1$ .*

Como vimos, as raízes são dadas por

$$\zeta_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right), \quad k = 0, \dots, 3,$$

ou seja,

$$\zeta_0 = 1, \quad \zeta_1 = i, \quad \zeta_2 = -1 \quad \text{e} \quad \zeta_3 = -i.$$

□

**Exemplo 11** *Encontre as raízes de  $z^3 = 1 - i$ .*

Como

$$1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right),$$

obtemos

$$z_0 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12} \right),$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{15\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{15\pi}{12} \right)$$

e

$$z_2 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{23\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{23\pi}{12} \right).$$

□



# Capítulo 6

## Alguns subconjuntos do plano complexo

Já vimos que a distância entre dois pontos  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ ,  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  é dada por

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

que nada mais é do que a distância usual entre dois pontos do plano euclidiano. Desta forma, definiremos conjuntos abertos, fechados, etc., como feito em Cálculo II. Vamos às definições

**Definição 2** 1. Se  $z_o \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ , o conjunto

$$D(z_o, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_o| < r\}$$

é chamado de disco aberto centrado em  $z_o$  e de raio  $r > 0$ .

2. Se  $z_o \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ , o conjunto

$$D[z_o, r] = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_o| \leq r\}$$

é chamado de disco fechado centrado em  $z_o$  e de raio  $r > 0$ .

3. Um ponto  $z_o \in X \subset \mathbb{C}$  é chamado ponto interior de  $X$  se existir  $r > 0$  tal que  $D(z_o, r) \subset X$ .

4. Dizemos que  $X \subset \mathbb{C}$  é aberto se todo  $x \in X$  é ponto interior de  $X$ .

5. Dizemos que  $X \subset \mathbb{C}$  é fechado se o seu complementar for aberto.

6. A fronteira de  $X \subset \mathbb{C}$ , denotada por  $\partial X$ , é formada por todo ponto  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z$  não é ponto interior de  $X$  e  $z$  também não é ponto interior do complementar de  $X$ . Equivalentemente,  $z \in \partial X$  se e somente se para todo  $r > 0$ , existem  $z_1 \in X$  e  $z_2$  no complementar de  $X$  tal que  $z_1, z_2 \in D(z, r)$ .

**Exemplo 12** O disco aberto é um exemplo de conjunto aberto, bem como uma reunião qualquer de discos abertos.

**Exemplo 13** *O disco fechado é um exemplo de conjunto fechado, bem como uma intersecção qualquer de discos fechados.*

Podemos também trazer para o plano complexo as curvas que foram estudadas em Geometria Analítica como as retas, os círculos, as elipses, etc. Na geometria analítica, estas curvas são expressas em termos das coordenadas dos pontos que estão sobre elas. No plano complexo, entretanto, é mais conveniente expressá-las em termos do ponto  $z$  e de seu conjugado  $\bar{z}$ , ou ainda com relação ao módulo ou à distância. O que permite esta passagem são as relações existentes entre as partes real e imaginária de um número complexo com relação a este número e o seu conjugado.

**Exemplo 14** *Considere a equação geral da reta no plano cartesiano dada por  $ax + by + c = 0$ ,  $a^2 + b^2 > 0$ . Enfatizamos que as constantes  $a, b$  e  $c$  são números reais e que um ponto que está sobre esta reta tem coordenadas reais. Mostre que a esta equação pode ser escrita na forma*

$$\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \beta = 0$$

onde  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Lembre que  $2x = z + \bar{z}$  e  $2iy = z - \bar{z}$ . Com isto, vemos que um ponto  $z = x + iy$  está sobre a reta dada se e somente se

$$a \frac{z + \bar{z}}{2} + b \frac{z - \bar{z}}{2i} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{a - bi}{2} z + \frac{a + bi}{2} \bar{z} + c = 0,$$

que está na forma desejada. □

**Exemplo 15** *Mostre que o círculo  $C(z_o, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_o| = r\}$  pode ser escrito como*

$$z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \beta = 0$$

onde  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ .

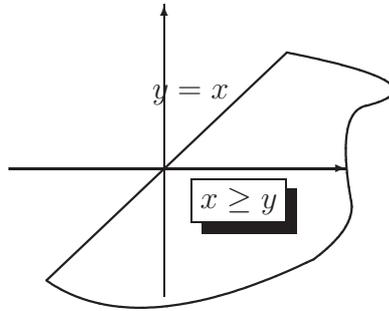
Temos

$$\begin{aligned} |z - z_o| = r &\Leftrightarrow |z - z_o|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z - z_o)\overline{(z - z_o)} = r^2 \Leftrightarrow (z - z_o)(\bar{z} - \bar{z}_o) = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{z}_o z - z_o \bar{z} + |z_o|^2 - r^2 = 0, \end{aligned}$$

que está na forma desejada. □

**Exercício 4** *Descreva geometricamente o conjunto  $R = \{z \in \mathbb{C}; \Re z \geq \Im(z + 1)\}$ .*

Colocando  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos que  $x = \Re z$  e  $y = \Im(z + 1)$  e, assim,  $z \in R$  se e somente se  $x \geq y$ . Desta forma,  $\mathbb{R}$  representa o semiplano fechado determinado pela reta  $z = y$  que contém o ponto  $(1, 0)$ .



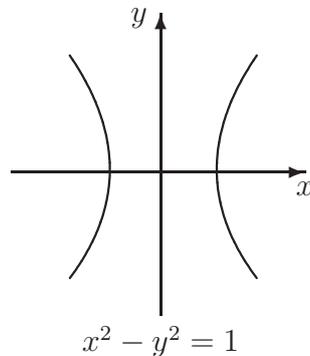
□

**Exercício 5** *Descreva geometricamente o conjunto  $R = \{z \in \mathbb{C}; \Re z^2 = 1\}$ .*

Colocando  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos que  $\Re z^2 = x^2 - y^2$  e, portanto,

$$\Re z^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1,$$

que representa uma hipérbole.



□

**Exercício 6** *Descreva geometricamente o conjunto  $R = \{z \in \mathbb{C}; \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 2\}$ .*

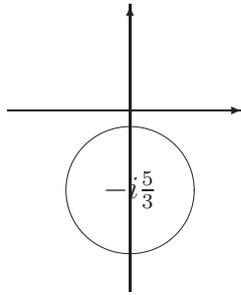
Colocando  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos que  $z \in R$  se e somente se

$$|z - i| = 2|z + i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 4x^2 + 4(y + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{10}{3}y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 + 1 - \frac{25}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9},$$

isto é,  $\mathcal{R} = C(-i\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ , o círculo centrado em  $-i\frac{5}{3}$  com raio  $\frac{4}{3}$ .



□

# Capítulo 7

## Algumas funções elementares

Seja  $D$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Uma função  $f$  a valores complexos sobre  $D$  é uma relação que a cada  $z \in D$  associa um único elemento de  $\mathbb{C}$ , denotado por  $f(z)$ . Usaremos a notação  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ , para representar uma função definida em  $D$  que toma valores em  $\mathbb{C}$ . As funções

$$z \mapsto \Re f(z) \quad \text{e} \quad z \mapsto \Im f(z)$$

são chamadas de partes real e imaginária de  $f$ , respectivamente. Usando a identificação  $z = x + iy = (x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , podemos definir as funções  $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$u(x, y) = \Re f(x + iy) \quad \text{e} \quad v(x, y) = \Im f(x + iy).$$

Note que  $u$  e  $v$  são funções de duas variáveis a valores reais.

Vejam alguns exemplos de funções.

**Exemplo 16** Fixados  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ , definimos

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

que é chamada de função polinomial. Os números  $a_0, \dots, a_n$  são chamados de coeficientes de  $f$ .

**Exercício 7** Mostre que se  $f$  é uma função polinomial com coeficientes reais então  $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ . Em particular,  $f(z_0) = 0$  se e somente se  $f(\bar{z}_0) = 0$ .

**Exemplo 17** Seja  $f(z) = z^2 - 3iz - 2$ . Note que  $f(i) = -1 + 3 - 2 = 0$  mas  $f(\bar{i}) = f(-i) = -1 - 3 - 2 = -6 \neq 0$ .

**Exemplo 18** Se  $p$  e  $q$  são funções polinomiais, definimos a função racional  $h(z) = p(z)/q(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $q(z) \neq 0$ . Mais adiante veremos que para cada função polinomial, digamos  $q$ , existe somente um número finito de números complexos satisfazendo  $q(z) = 0$ .

**Exercício 8** Seja  $f(z) = 1/z$  definida para  $z \neq 0$ . Encontre as partes real e imaginária de  $f$ .

Colocando  $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ , temos

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Assim, as partes real e imaginária são dadas, respectivamente, por

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

□

**Exercício 9** *Seja*

$$h(z) = (1 + i) \frac{z - i}{z + 1}, \quad z \neq -1.$$

*Mostre que imagem do conjunto  $S = \{\cos \theta + i \sin \theta, -\pi < \theta < \pi\}$  é o eixo real.*

Note que  $S$  é o círculo centrado na origem de raio um do qual foi excluído o número  $-1$ . Para  $-\pi < \theta < \pi$  temos

$$\begin{aligned} h(\cos \theta + i \sin \theta) &= (1 + i) \frac{\cos \theta + i(\sin \theta - 1)}{1 + \cos \theta + i \sin \theta} \\ &= (1 + i) \frac{\cos \theta + i(\sin \theta - 1)}{1 + \cos \theta + i \sin \theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta} \\ &= (1 + i) \frac{1 + \cos \theta - \sin \theta + i(-1 + \sin \theta - \cos \theta)}{2(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{1 + \cos \theta - \sin \theta}{2(1 + \cos \theta)} (1 + i)(1 - i) = \frac{1 + \cos \theta - \sin \theta}{1 + \cos \theta} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Além do mais, usando L'Hospital para função de variável real, temos

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^+} \frac{1 + \cos \theta - \sin \theta}{1 + \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^+} \frac{-\sin \theta - \cos \theta}{-\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^+} (1 + \cotg \theta) = -\infty$$

e

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{1 - \cos \theta - \sin \theta}{1 + \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{-\sin \theta - \cos \theta}{-\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} (1 + \cotg \theta) = +\infty$$

e como  $\varphi(\theta) = h(\cos \theta + i \sin \theta)$ , é uma função contínua de  $-\pi < \theta < \pi$ , vemos que a imagem de  $S$  pela função  $h$  é todo o eixo real. □

**Definição 3** *Definimos a função exponencial por*

$$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad \text{onde } x = \Re z, y = \Im z.$$

**Proposição 8** *Mostre que*

1.  $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2$  para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ;

2.  $|\exp z| = e^{\Re z}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ ; em particular  $\exp z \neq 0$ ;
3.  $(\exp z)^n = \exp(nz)$  para  $z \in \mathbb{C}$  e  $n$  inteiro;
4.  $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$ ;
5. Se  $z$  é real então

$$\exp z = e^z, \quad \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad e \quad \operatorname{sen} z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

**Prova:**

1. Escrevendo  $z_j = x_j + iy_j$ ,  $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$ , e utilizando a fórmula para o produto (veja 6), obtemos

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \exp(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)) = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)) \\ &= [e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)][e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2)] = \exp z_1 \exp z_2; \end{aligned}$$

2. basta notar que  $|\cos y + i \operatorname{sen} y| = 1$  e  $e^{\Re z} > 0$ ;
3. como  $\exp z \neq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , temos

$$\begin{aligned} (\exp z)^n &= (e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y))^n = e^{nx}(\cos(ny) + i \operatorname{sen}(ny)) \\ &= \exp(nx + iny) = \exp(nz); \end{aligned}$$

4. escrevendo  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned} \overline{\exp z} &= \overline{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)} \\ &= e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y) = e^x(\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y)) = \exp(x - iy) = \exp \bar{z}. \end{aligned}$$

5. Se  $z$  é real então  $\Im z = 0$ ,  $z = \Re z$  e pela definição de exponencial, temos

$$\exp z = e^{\Re z}(\cos(\Im z) + i \operatorname{sen}(\Im z)) = e^z(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^z.$$

Como  $z$  é real também temos  $\Re(iz) = \Re(-iz) = 0$  e  $\Im(iz) = z = -\Im(-iz)$ . Assim

$$\begin{cases} \exp(iz) = \cos z + i \operatorname{sen} z \\ \exp(-iz) = \cos(-z) + i \operatorname{sen}(-z) = \cos z - i \operatorname{sen} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \\ \operatorname{sen} z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}. \end{cases}$$

■

**Observação 3** Em virtude da proposição anterior (veja 5), utilizaremos também a expressão  $e^z$  para denotar  $\exp z$  mesmo quando  $z \in \mathbb{C}$ .

**Observação 4** Note que  $z \in \mathbb{C}$  tem módulo igual a um se e somente se  $z = e^{i\theta}$  para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Como as expressões  $\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$  e  $\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$  estão definidas para todo número complexo  $z$  e tendo em vista a proposição 8 item 5, definimos as funções seno e cosseno por

**Definição 4**

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad e \quad \operatorname{sen} z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Proposição 9** Para todo  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , temos

1.  $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \sinh y$ , onde  $x = \Re z$  e  $y = \Im z$ ;
2.  $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y$ , onde  $x = \Re z$  e  $y = \Im z$ ;
3.  $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$ , onde  $x = \Re z$  e  $y = \Im z$ ;
4.  $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \sinh^2 y$ , onde  $x = \Re z$  e  $y = \Im z$ ;
5.  $\cos z = 0$  se e somente se  $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
6.  $\operatorname{sen} z = 0$  se e somente se  $z = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
7.  $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ ;
8.  $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ ;
9.  $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$ ;
10.  $\cos(-z) = \cos z$ ;
11.  $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ ;
12.  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$ ;
13.  $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$ ;
14.  $\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$ ;
15.  $\operatorname{sen}(z_1 - z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$ ;
16.  $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ ;
17.  $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z$ .

**Prova:** Colocando  $x = \Re z$  e  $y = \Im z$ , temos

1.

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \frac{\exp(-y + ix) + \exp(y - ix)}{2} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2} \\ &= \frac{e^{-y} + e^y}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \operatorname{sen} x \\ &= \cosh y \cos x - i \operatorname{senh} y \operatorname{sen} x;\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \frac{\exp(-y + ix) - \exp(y - ix)}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2i} \\ &= \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \cos x + i \frac{e^y + e^{-y}}{2i} \operatorname{sen} x \\ &= \cosh y \operatorname{sen} x + i \operatorname{senh} y \cos x;\end{aligned}$$

3. de 1 obtemos

$$\begin{aligned}|\cos z|^2 &= \cosh^2 y \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \operatorname{sen}^2 x \\ &= \cosh^2 y \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y (1 - \cos^2 x) \\ &= (\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \\ &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y;\end{aligned}$$

4. de 2, obtemos

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen} z|^2 &= \cosh^2 y \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \cos^2 x \\ &= \cosh^2 y \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y (1 - \operatorname{sen}^2 x) \\ &= (\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y;\end{aligned}$$

5. note que  $\cos z = 0$  se e somente se  $|\cos z| = 0$ . Segue de 3 que, colocando  $x = \Re z$  e  $y = \Im z$ , então  $\cos z = 0$  se e somente se  $\cos x = 0$  e  $\operatorname{senh} y = 0$ , ou seja, se e somente se  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e  $y = 0$ ;

6. note que  $\operatorname{sen} z = 0$  se e somente se  $|\operatorname{sen} z| = 0$ . Segue de 4 que, colocando  $x = \Re z$  e  $y = \Im z$ , então  $\operatorname{sen} z = 0$  se e somente se  $\operatorname{sen} x = 0$  e  $\operatorname{senh} y = 0$ , ou seja, se e somente se  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e  $y = 0$ ;

7.

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z &= \frac{(\exp(iz) + \exp(-iz))^2}{4} - \frac{(\exp(iz) - \exp(-iz))^2}{4} \\ &= \frac{\exp(2iz) + \exp(-2iz) + 2 - \exp(2iz) - \exp(-2iz) + 2}{4} = 1\end{aligned}$$

8.

$$\overline{\cos z} = \frac{\overline{\exp(iz) + \exp(-iz)}}{2} = \frac{\exp(-i\bar{z}) + \exp(i\bar{z})}{2} = \cos \bar{z};$$

9.

$$\overline{\operatorname{sen} z} = \overline{\left(\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\right)} = -\frac{\exp(-i\bar{z}) - \exp(i\bar{z})}{2i} = \operatorname{sen} \bar{z};$$

10.

$$\cos(-z) = \frac{\exp(-iz) + \exp(iz)}{2} = \cos z;$$

11.

$$\operatorname{sen}(-z) = \frac{\exp(-iz) - \exp(iz)}{2i} = -\operatorname{sen} z;$$

12. temos

$$\begin{aligned}&\cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \\ &= \frac{1}{4} [(\exp(iz_1) + \exp(-iz_1))(\exp(iz_2) + \exp(-iz_2)) \\ &\quad + (\exp(iz_1) - \exp(-iz_1))(\exp(iz_2) - \exp(-iz_2))] \\ &= \frac{1}{4} [\exp(i(z_1 + z_2)) + \exp(-i(z_1 - z_2)) + \exp(i(z_1 - z_2)) + \exp(-i(z_1 + z_2)) \\ &\quad + \exp(i(z_1 + z_2)) - \exp(-i(z_1 - z_2)) - \exp(i(z_1 - z_2)) + \exp(-i(z_1 + z_2))] \\ &= \frac{1}{2} [\exp(i(z_1 + z_2)) + \exp(-i(z_1 + z_2))] = \cos(z_1 + z_2); \end{aligned}$$

13. temos

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1 \\ &= \frac{1}{4i} [(\exp(iz_1) - \exp(-iz_1))(\exp(iz_2) + \exp(-iz_2)) \\ &\quad + (\exp(iz_2) - \exp(-iz_2))(\exp(iz_1) + \exp(-iz_1))] \\ &= \frac{1}{4i} [\exp(i(z_1 + z_2)) - \exp(-i(z_1 - z_2)) + \exp(i(z_1 - z_2)) - \exp(-i(z_1 + z_2)) \\ &\quad + \exp(i(z_1 + z_2)) - \exp(i(z_1 - z_2)) + \exp(-i(z_1 - z_2)) - \exp(-i(z_1 + z_2))] \\ &= \frac{1}{2i} [\exp(i(z_1 + z_2)) - \exp(-i(z_1 + z_2))] = \operatorname{sen}(z_1 + z_2); \end{aligned}$$

14. substitua  $z_2$  por  $-z_2$  em 12 e use 10 e 11;

15. substitua  $z_2$  por  $-z_2$  em 13 e use 10 e 11;

16. por 12

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z \cos 2\pi - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} 2\pi = \cos z;$$

17. por 13

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z \cos 2\pi + \operatorname{sen} 2\pi \cos z = \operatorname{sen} z.$$

■

**Observação 5** Note que por 5 e 6 os zeros das funções complexas cosseno e seno são os mesmos que os zeros das funções reais cosseno e seno, respectivamente. Desta forma, podemos definir as funções complexas tg, cotg, sec e cosec de modo análogo ao caso real.

**Definição 5** Dizemos que uma função  $f$  definida num subconjunto  $D$  de  $\mathbb{C}$  é limitada se existir  $K > 0$  tal que  $|f(z)| \leq K$  para todo  $z \in D$ .

**Exemplo 19** As funções seno e cosseno não são limitadas em  $\mathbb{C}$ .

Usando 3 e 4 da proposição 9 com  $z = ni$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , vemos que

$$|\cos z| = |\operatorname{sen} z| = \operatorname{senh} n = \frac{e^n - e^{-n}}{2} \rightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

□

**Exemplo 20** Sejam  $A > 0$  e  $D = \{z \in \mathbb{C}; |\Im z| \leq A\}$ . As funções seno e cosseno são limitadas em  $D$ .

Se  $z = x + iy \in D$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , então, como  $|y| \leq A$ , temos

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \leq 1 + \frac{(e^y - e^{-y})^2}{4} \leq 1 + e^{2A}.$$

Tomando  $K = \sqrt{1 + e^{2A}}$ , vemos que  $|\cos z| \leq K$  para todo  $z \in D$ . De modo análogo,  $|\operatorname{sen} z| \leq K$  para todo  $z \in D$ . □

**Definição 6** As funções complexas seno e cosseno hiperbólicos são definidas por:

$$\operatorname{senh} z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2} \quad e \quad \operatorname{cosh} z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}.$$

Deixamos como exercício a verificação da seguinte

**Proposição 10** Temos

1.  $\operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ ;
2.  $|\operatorname{cosh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y$ , para todo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
3.  $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y$ , para todo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
4.  $\operatorname{cosh} z = 0$  se e somente se  $z = \frac{2k+1}{2}\pi i$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ ;
5.  $\operatorname{senh} z = 0$  se e somente se  $z = k\pi i$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .



# Capítulo 8

## Limite e continuidade

**Definição 7** *Sejam  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dizemos que existe o limite de  $f$  em  $z_0$  se existir  $L \in \mathbb{C}$  tal que para cada  $\varepsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que*

$$z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Deixamos como exercício a verificação de que se existir  $L \in \mathbb{C}$  satisfazendo a definição acima, ele é o único. Neste caso, usaremos a notação

$$L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

Geometricamente, a existência do limite de  $f$  em  $z_0$  significa que dado qualquer disco  $C$  centrado em  $L$ , é possível encontrar um outro disco centrado em  $z_0$  cujos pontos distintos de  $z_0$  e que estão em  $D$  são mandados por  $f$  em  $C$ .

**Exemplo 21** *Verifique que*

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_0} \alpha = \alpha, \alpha \text{ constante} \quad (ii) \lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0 \quad (iii) \lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \overline{z_0} \quad (iv) \lim_{z \rightarrow z_0} |z| = |z_0|$$

Seja  $\varepsilon > 0$ .

(i) Tome  $\delta > 0$  qualquer e daí  $|\alpha - \alpha| = 0 < \varepsilon$ .

(ii) Tome  $\delta = \varepsilon$ . Daí, sempre que  $|z - z_0| < \delta$  temos  $|z - z_0| < \delta = \varepsilon$ .

(iii) Tome  $\delta = \varepsilon$ . Daí, sempre que  $|z - z_0| < \delta$  temos  $|\bar{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0| < \delta = \varepsilon$ .

(iv) Tome  $\delta = \varepsilon$ . Daí, sempre que  $|z - z_0| < \delta$  temos  $||z| - |z_0|| \leq |z - z_0| < \delta = \varepsilon$ .  $\square$

**Proposição 11** *Sejam  $f, g$  funções tais que existem  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ . Temos*

1. Para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \beta \lim_{z \rightarrow z_0} g(z);$$

2.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z);$$

3. Se  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$  então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}.$$

**Prova:**

1. Faça como exercício.

2. Coloque  $L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  e  $M = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ . Usando a definição de limite, tome  $\delta_1 > 0$  tal que  $|f(z) - L| < 1$  sempre que  $0 < |z - z_0| < \delta_1$ . Segue que

$$|f(z)| \leq |f(z) - L| + |L| < 1 + |L| \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_1.$$

Usando a definição de limite, existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$|f(z) - L| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)} \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_2.$$

Também, existe  $\delta_3 > 0$  tal que

$$|g(z) - M| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_3.$$

Coloque  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ . Se  $0 < |z - z_0| < \delta$  então

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - LM| &= |f(z)(g(z) - M) + M(f(z) - L)| \leq |f(z)||g(z) - M| + |M|f(z) - L| \\ &\leq (1 + |L|)\frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} + |M|\frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Pela parte anterior, basta mostrarmos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \frac{1}{M}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , pela definição de limite existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|g(z) - M| < \frac{\varepsilon}{2}|M|^2 \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_1.$$

Também existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$|g(z) - M| < \frac{|M|}{2} \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_2.$$

$$|M| \leq |g(z) - M| + |g(z)|$$

temos que

$$|g(z)| \geq |M| - |g(z) - M| > |M| - \frac{|M|}{2} = \frac{|M|}{2} \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_2.$$

Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  temos

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(z)|}{|M||g(z)|} < \frac{1}{|M|} \frac{\varepsilon}{2} |M|^2 \frac{2}{|M|} = \varepsilon \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

■

**Exemplo 22** Como já vimos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$  segue da proposição anterior que se  $f(z)$  é uma função polinomial que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ . Além do mais, se  $g$  é também polinomial com  $g(z_0) \neq 0$  então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g(z_0)}.$$

**Exercício 10** Encontre, se possível,  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ .

Note que sobre se  $z \neq 0$  é real temos  $\frac{\bar{z}}{z} = 1$  e se  $z \neq 0$  é imaginário puro temos  $\frac{\bar{z}}{z} = -1$ . Como todo disco centrado na origem possui números real e imaginário puro, concluímos, pela unicidade do limite, que não existe  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ . □

**Proposição 12** Sejam  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u$  e  $v$  as partes real e imaginária de  $f$  e  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ ,  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ . A fim de exista o limite de  $f$  em  $z_0$  é necessário e suficiente que existam os limites de  $u$  e  $v$  em  $(x_0, y_0)$ . Em caso afirmativo, vale

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y).$$

**Prova:** Suponha que existam  $u_o = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y)$  e  $v_o = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tal que

$$|u(x,y) - u_o| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1$$

e

$$|v(x,y) - v_o| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2.$$

Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , temos

$$|f(z) - (u_o - iv_o)| = |(u(x,y) - u_o) + i(v(x,y) - v_o)| \leq |u(x,y) - u_o| + |v(x,y) - v_o| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sempre que  $0 < |z - z_0| < \delta$ .

Reciprocamente se existir  $L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , então, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(z) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que } 0 < |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Colocando  $L = U + iV$ ,  $U, V \in \mathbb{R}$ , temos que

$$|u(x,y) - U| \leq \sqrt{(u(x,y) - U)^2 + (v(x,y) - V)^2} = |u(x,y) + iv(x,y) - U - iV| = |f(z) - L| < \varepsilon$$

e

$$|v(x,y) - V| \leq \sqrt{(u(x,y) - U)^2 + (v(x,y) - V)^2} = |u(x,y) + iv(x,y) - U - iV| = |f(z) - L| < \varepsilon$$

sempre que  $0 < |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ . □

**Exemplo 23** Utilizando a proposição acima e observando as partes real e imaginária das funções exponencial, seno e cosseno, vemos que se  $z_o \in \mathbb{C}$  então

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_o} = \exp z_o \quad (ii) \lim_{z \rightarrow z_o} \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} z_o \quad (iii) \lim_{z \rightarrow z_o} \operatorname{cos} z = \operatorname{cos} z_o.$$

**Definição 8** Sejam  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_o \in D$ . Dizemos que  $f$  é contínua em  $z_o$  se

$$\lim_{z \rightarrow z_o} f(z) = f(z_o).$$

Dizemos que  $f$  é contínua em  $D$  se  $f$  for contínua em todos os pontos de  $D$ .

**Observação 6** Segue da proposição 11 que se  $f$  e  $g$  são contínuas em  $z_o$  então para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  que  $\alpha f + \beta g$  é contínua em  $z_o$ . Além do mais, o produto  $fg$  é contínuo em  $z_o$  e o mesmo vale para  $f/g$  desde que  $g(z_o) \neq 0$ .

**Observação 7** Segue da proposição 12 que uma condição necessária e suficiente para que  $f$  seja contínua é que as suas partes real e imaginária sejam contínuas.

**Observação 8** Segue do exemplo 22 que toda função polinomial é contínua e o mesmo vale para as funções racionais. Vale a pena salientar que uma função racional é contínua sobre os pontos onde ela está definida.

**Exemplo 24** A função  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$  é contínua para todo  $z \neq 0$ .

Basta notar que se  $z_o \neq 0$  então

$$\lim_{z \rightarrow z_o} \frac{\bar{z}}{z} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_o} \bar{z}}{\lim_{z \rightarrow z_o} z} = \frac{\bar{z}_o}{z_o} = f(z_o).$$

□

**Observação 9** Segue do exemplo 23 que as funções exponencial, seno e cosseno também são contínuas.

**Proposição 13** Sejam  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$  e  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Se  $f$  é contínua em  $z_o \in D$  e  $g$  é contínua em  $\zeta_o = f(z_o)$  então a composta  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$  também é contínua em  $z_o$ .

**Prova:** Dado  $\varepsilon > 0$ , pela continuidade de  $g$  em  $\zeta_o$ , existe  $\delta_1$  tal que

$$|g(\zeta) - g(\zeta_o)| = |g(\zeta) - g(f(z_o))| < \varepsilon \quad \text{sempre que } |\zeta - \zeta_o| < \delta_1. \quad (8.1)$$

Por outro lado, existe  $\delta > 0$  então

$$|f(z) - \zeta_o| = |f(z) - f(z_o)| < \delta_1 \quad \text{sempre que } |z - z_o| < \delta.$$

Combinando a desigualdade acima com 8.1, obtemos que

$$|g(f(z)) - g(f(z_o))| < \varepsilon \quad \text{sempre que } |z - z_o| < \delta.$$

■

## Capítulo 9

# Derivação e as equações de Cauchy-Riemann

**Definição 9** Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0 \in D$ . Dizemos que  $f$  é derivável em  $z_0$  se o seguinte limite existir

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ou equivalentemente, caso exista

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Em caso afirmativo, escreveremos

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

e diremos que  $f'(z_0)$  é a derivada de  $f$  em  $z_0$ .

**Observação 10** Note que  $f'(z_0)$  é a derivada de  $f$  em  $z_0 \in D$  se e somente se para qualquer  $\varepsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \quad \text{sempre que } |z - z_0| < \delta,$$

ou equivalentemente,

$$|f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h| \leq \varepsilon |h| \quad \text{sempre que } |h| < \delta.$$

**Proposição 14** Se  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  é derivável em  $z_0 \in D$  então  $f$  é contínua em  $z_0$ .

**Prova:** Note que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

**Exemplo 25** Mostre que  $f(z) = \alpha z + \beta$  é derivável para qualquer  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $f'(z) = \alpha$ .

Temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha z + \beta - (\alpha z_0 + \beta)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha(z - z_0)}{z - z_0} = \alpha.$$

**Exemplo 26** Mostre que  $f(z) = \bar{z}$  não é derivável em nenhum ponto.

Observe que para  $z \neq z_0$ ,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}.$$

Assim, se tomarmos  $z = z_0 + h$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ , obtemos

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{h}}{h} = 1.$$

Por outro lado, tomando  $z = z_0 + hi$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ , obtemos

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{hi}}{hi} = -1.$$

Como os pontos da forma  $z_0 + h$  e  $z_0 + hi$  podem ficar tão próximos a  $z_0$  quanto quisermos, vemos que não existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}.$$

Valem as regras usuais de derivação, isto é, temos a

**Proposição 15** Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $z_0 \in D$  e  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Se  $f$  e  $g$  são deriváveis em  $z_0$  então

1.  $(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$ , onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;
2.  $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ ;
3.  $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$ , desde que  $g(z_0) \neq 0$ .

**Prova:**

1. Como  $f'(z_0)$  e  $g'(z_0)$  existem, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha f(z) + \beta g(z) - \alpha f(z_0) - \beta g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \alpha \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \beta \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0); \end{aligned}$$

2. como  $f'(z_0)$  e  $g'(z_0)$  existem e  $f$  é contínua em  $z_0$ , temos

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)(g(z) - g(z_0)) + g(z_0)(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} \\ & \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} + g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f(z_0)g'(z_0) + g(z_0)f'(z_0); \end{aligned}$$

3. usando o item anterior, basta mostrarmos que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = -\frac{g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.$$

Como  $g'(z_0)$  existe,  $g$  é contínua em  $z_0$  e  $g(z_0) \neq 0$ , temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z_0) - g(z)}{z - z_0} = -\frac{g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.$$

**Exemplo 27** Se  $f_n(z) = z^n$   $n \in \mathbb{N}$  então  $f'_n(z) = nz^{n-1}$ .

De fato, do exemplo 26 obtemos  $f'_1(z) = 1$  e por indução, se assumirmos que  $f'_{n-1}(z) = (n-1)z^{n-2}$  então pela proposição anterior,

$$f'_n(z) = (z \cdot z^{n-1})' = 1 \cdot z^{n-1} + z \cdot (n-1)z^{n-2} = nz^{n-1}.$$

□

**Exemplo 28** Se  $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  então  $f'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}$ .

**Exemplo 29** Se  $g_n(z) = z^{-n}$   $n \in \mathbb{N}$  então  $g'_n(z) = -nz^{-n-1}$  para todo  $z \neq 0$ .

Note que  $g_n = \frac{1}{f_n}$ ,  $f_n$  como no exemplo 27 e, portanto, se  $z \neq 0$ ,

$$g'_n(z) = -\frac{f'_n(z)}{[f_n(z)]^2} = -\frac{nz^{n-1}}{z^{2n}} = -nz^{-n-1}.$$

□

No capítulo anterior vimos que para que uma função  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  fosse contínua era necessário e suficiente que as suas partes real e imaginária fossem contínuas. Como veremos a seguir, para que  $f$  seja derivável não bastará que suas partes real e imaginária tenham derivadas. Os dois próximos teoremas nos mostram como elas se relacionam.

**Teorema 1** *Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $z_o = x_o + iy_o \in D$ ,  $x_o, y_o \in \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u(x, y) = \Re f(z)$  e  $v(x, y) = \Im f(z)$ . Se  $f$  é derivável em  $z_o$  então existem as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  em  $(x_o, y_o)$  e elas satisfazem*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o). \quad (9.1)$$

Além do mais,

$$f'(z_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o). \quad (9.2)$$

**Prova:** Como  $f'(z_o)$  existe por hipótese, podemos calculá-la dos seguintes modos:

*Primeiro modo:* Aproximando do ponto  $z_o = x_o + iy_o$  por pontos da forma  $x_o + h + iy_o \in D$  com  $h \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f'(z_o) &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(x_o + h + iy_o) - f(x_o + iy_o)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \left[ \frac{u(x_o + h, y_o) - u(x_o, y_o)}{h} + i \frac{v(x_o + h, y_o) - v(x_o, y_o)}{h} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o), \end{aligned}$$

pois como o limite existe, sabemos pela proposição 12 que também existem os limites das partes real e imaginária.

*Segundo modo:* Aproximando do ponto  $z_o = x_o + iy_o$  por pontos da forma  $x_o + i(y_o + h) \in D$  com  $h \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f'(z_o) &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(x_o + i(y_o + h)) - f(x_o + iy_o)}{ih} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \left[ \frac{u(x_o, y_o + h) - u(x_o, y_o)}{ih} + i \frac{v(x_o, y_o + h) - v(x_o, y_o)}{ih} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \left[ \frac{v(x_o, y_o + h) - v(x_o, y_o)}{h} - i \frac{u(x_o, y_o + h) - u(x_o, y_o)}{h} \right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o). \end{aligned}$$

Deste modo,

$$f'(z_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o),$$

resultando em nas equações 9.1 e 9.2. ■

**Observação 11** *As equações 9.1 são chamadas de equações de Cauchy-Riemann. Embora a parte real e a parte imaginária de uma função  $f$  devam satisfazer estas equações para que exista a derivada de  $f$ , a simples verificação de 9.1 não é garantia da existência de  $f'$  como mostra o seguinte exemplo.*

**Exemplo 30** A função

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & \text{se } z \neq 0 \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

não é derivável em  $z = 0$  mas as suas partes real e imaginária satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em  $z = 0$ .

Se  $h = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , então

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{h^5}{|h|^4}}{h} = \frac{h^4}{|h|^4} = \frac{r^4 e^{4i\theta}}{r^4} = e^{4i\theta}.$$

Como a expressão acima depende do valor de  $\theta$ , vemos que não existe a derivada de  $f$  em  $z = 0$ .

Por outro lado, se  $u = \Re f$  e  $v = \Im f$ , vemos que  $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$  e para  $z = x + iy \neq 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$f(z) = \frac{z^5}{|z|^4} = \frac{(x + iy)^5}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{y^5 - 10x^2y^3 + 5yx^4}{(x^2 + y^2)^2} = u(x, y) + iv(x, y).$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \\ \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0, y) - v(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1, \end{aligned}$$

verificando a primeira das equações de Cauchy-Riemann em  $(0, 0)$ . Também,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x, 0) - v(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0, \end{aligned}$$

verificando a segunda das equações de Cauchy-Riemann em  $(0, 0)$ . □

Os resultados obtidos até agora não nos dão muita informação de como calcular derivadas das funções complexas. Com o que sabemos não vamos muito mais longe do que o cálculo das derivadas de funções polinomiais ou funções racionais ( $p(z)/q(z)$ ,  $p$  e  $q$  polinômios).

O próximo teorema nos fornece uma condição suficiente para que uma função complexa possua derivada. Esta condição é que, além de que as partes real e imaginária desta função existam e satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann, elas também sejam de classe  $C^1$ , isto é, possuam derivadas parciais contínuas.

**Teorema 2** *Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $z_o = x_o + iy_o \in D$ ,  $x_o, y_o \in \mathbb{R}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  uma função tal que  $u(x, y) = \Re f(z)$  e  $v(x, y) = \Im f(z)$  possuam derivadas parciais de primeira ordem contínuas em  $(x_o, y_o)$ . Se  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (9.1) então  $f$  é derivável em  $z_o$  e  $f'(z_o)$  é dada por 9.2.*

**Prova:** Como  $u$  e  $v$  são de classe  $C^1$ , sabemos de Cálculo II que existem funções  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  definidas em torno de  $(0, 0)$  satisfazendo para todo  $(r, s) \in \mathbb{R}^2$  suficientemente pequeno

$$u(x_o + r, y_o + s) - u(x_o, y_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o)r + \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o)s + \varepsilon_1(r, s),$$

$$v(x_o + r, y_o + s) - v(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)r + \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o)s + \varepsilon_2(r, s),$$

e

$$\lim_{(r,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_1(r, s)}{\sqrt{r^2 + s^2}} = \lim_{(r,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_2(r, s)}{\sqrt{r^2 + s^2}} = 0.$$

Colocando  $h = r + is$ , e utilizando as equações de Cauchy-Riemann, temos

$$\begin{aligned} f(z_o + h) - f(z_o) &= u(x_o + r, y_o + s) - u(x_o, y_o) + i(v(x_o + r, y_o + s) - v(x_o, y_o)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o)r + \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o)s + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)r + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o)s + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o)r - \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)s + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)r + i\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o)s + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o)(r + si) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)(r + si) + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) \right) h + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \end{aligned}$$

e, desta forma,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h} - \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) \right) \right] = \lim_{h=r+si \rightarrow 0} \left[ \frac{\varepsilon_1(r, s)}{r + si} + i\frac{\varepsilon_2(r, s)}{r + si} \right] = 0,$$

pois

$$\left| \frac{\varepsilon_j(r, s)}{r + si} \right| = \frac{|\varepsilon_j(r, s)|}{\sqrt{r^2 + s^2}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } (r, s) \rightarrow 0, \quad j = 1, 2.$$

Isto mostra que  $f$  é derivável em  $z_o$  e

$$f'(z_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o).$$

Quanto à outra fórmula para  $f'(z_o)$ , basta usar a fórmula acima e as equações de Cauchy-Riemann. ■

**Observação 12** As fórmulas 9.2 também podem ser escritas da seguinte forma

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}f(x + iy) = -i\frac{\partial}{\partial y}f(x + iy).$$

Equivalentemente

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

**Exemplo 31** A função exponencial é derivável em qualquer  $z \in \mathbb{C}$  e  $\exp'(z) = \exp z$ .

Como  $u(x, y) = \Re \exp z = e^x \cos y$  e  $v(x, y) = \Im \exp z = e^x \sin y$  são funções de classe  $C^1$ , para mostrar que a exponencial é derivável, resta mostrar que elas satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. De fato,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = e^x \cos y = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Além do mais,

$$\exp'(z) = \frac{\partial}{\partial x} \exp(x + iy) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + ie^x \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = \exp z.$$

□

**Exemplo 32** Temos  $\sin' z = \cos z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Pelo item 2 da proposição 9 temos que  $u(x, y) = \Re \sin z = \sin x \cosh y$  e  $v(x, y) = \Im \sin z = \cos x \sinh y$  são de classe  $C^1$  e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, pois

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x \cosh y) = \cos x \cosh y = \frac{\partial}{\partial y}(\cos x \sinh y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\sin x \cosh y) = \sin x \sinh y = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \sinh y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Além do mais,

$$\sin'(z) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = \cos z$$

pelo item 1 da proposição 9.

□

**Exercício 11** Mostre que  $\cos' z = -\sin z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Proposição 16** Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $z_o \in D$ ,  $z_o \neq 0$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u = \Re f$ ,  $v = \Im f$ . Suponha que  $u$  e  $v$  sejam de classe  $C^1$ . Então,  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em  $z_o = r_o e^{i\theta_o}$ , se e somente se as funções  $U(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$  e  $V(r, \theta) = v(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , definidas numa vizinhança de  $(r_o, \theta_o)$ , satisfazem as equações

$$\frac{\partial U}{\partial r}(r_o, \theta_o) = \frac{1}{r_o} \frac{\partial V}{\partial \theta}(r_o, \theta_o) \quad e \quad \frac{1}{r_o} \frac{\partial U}{\partial \theta}(r_o, \theta_o) = -\frac{\partial V}{\partial r}(r_o, \theta_o). \quad (9.3)$$

Além do mais, em caso afirmativo tem-se

$$f'(z_o) = (\cos \theta_o - i \sin \theta_o) \left( \frac{\partial U}{\partial r}(r_o, \theta_o) + i \frac{\partial V}{\partial r}(r_o, \theta_o) \right). \quad (9.4)$$

**Prova:** Aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{\partial U}{\partial r}(r_o, \theta_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_o) \cos \theta_o + \frac{\partial u}{\partial y}(z_o) \sen \theta_o, \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(r_o, \theta_o) = -\frac{\partial u}{\partial x}(z_o) r_o \sen \theta_o + \frac{\partial u}{\partial y}(z_o) r_o \cos \theta_o, \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r_o, \theta_o) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_o) \cos \theta_o + \frac{\partial v}{\partial y}(z_o) \sen \theta_o \quad (9.7)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}(r_o, \theta_o) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_o) r_o \sen \theta_o + \frac{\partial v}{\partial y}(z_o) r_o \cos \theta_o. \quad (9.8)$$

Assim, se  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, comparando 9.5 com 9.8 e 9.6 com 9.7 obtemos as equações 9.3.

Reciprocamente, se  $U$  e  $V$  satisfazem as equações 9.3 então de 9.5 e 9.8 obtemos

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x}(z_o) - \frac{\partial v}{\partial y}(z_o) \right) \cos \theta_o + \left( \frac{\partial u}{\partial y}(z_o) + \frac{\partial v}{\partial x}(z_o) \right) \sen \theta_o = 0$$

e de 9.6 e 9.7

$$\left( \frac{\partial v}{\partial y}(z_o) - \frac{\partial u}{\partial x}(z_o) \right) \sen \theta_o + \left( \frac{\partial u}{\partial y}(z_o) + \frac{\partial v}{\partial x}(z_o) \right) \cos \theta_o = 0,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_o & \sen \theta_o \\ -\sen \theta_o & \cos \theta_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_o) - \frac{\partial v}{\partial y}(z_o) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_o) + \frac{\partial v}{\partial x}(z_o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuja única solução é

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_o) - \frac{\partial v}{\partial y}(z_o) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_o) + \frac{\partial v}{\partial x}(z_o) = 0,$$

que são as equações de Cauchy-Riemann.

De 9.5 e 9.6 obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \theta_o \frac{\partial U}{\partial r}(r_o, \theta_o) - \frac{\sen \theta_o}{r_o} \frac{\partial U}{\partial \theta}(r_o, \theta_o)$$

e de

9.7 e 9.8 obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos \theta_o \frac{\partial V}{\partial r}(r_o, \theta_o) - \frac{\sen \theta_o}{r_o} \frac{\partial V}{\partial \theta}(r_o, \theta_o).$$

Agora, se  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann então

$$f'(z_o) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \cos \theta_o \frac{\partial U}{\partial r}(r_o, \theta_o) - \frac{\sen \theta_o}{r_o} \frac{\partial U}{\partial \theta}(r_o, \theta_o) + i \left( \cos \theta_o \frac{\partial V}{\partial r}(r_o, \theta_o) - \frac{\sen \theta_o}{r_o} \frac{\partial V}{\partial \theta}(r_o, \theta_o) \right)$$

$$\begin{aligned}
& +i \left( \cos \theta_o \frac{\partial V}{\partial r}(r_o, \theta_o) - \frac{\text{sen } \theta_o}{r_o} \frac{\partial V}{\partial \theta}(r_o, \theta_o) \right) \\
= & \cos \theta_o \frac{\partial U}{\partial r}(r_o, \theta_o) + \text{sen } \theta_o \frac{\partial V}{\partial r}(r_o, \theta_o) + i \left( \cos \theta_o \frac{\partial V}{\partial r}(r_o, \theta_o) - \text{sen } \theta_o \frac{\partial U}{\partial r}(r_o, \theta_o) \right) \\
= & (\cos \theta_o - i \text{sen } \theta_o) \left( \frac{\partial U}{\partial r}(r_o, \theta_o) + i \frac{\partial V}{\partial r}(r_o, \theta_o) \right) = e^{-i\theta_o} \frac{\partial}{\partial r} (U + iV)(r_o, \theta_o).
\end{aligned}$$

■

**Observação 13** As equações 9.3 são chamadas de equações de Cauchy-Riemann na forma polar.

**Exercício 12** Verifique que a função dada por  $L(z) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arctg \frac{y}{x}$ , definida para  $x > 0$  é derivável e calcule a sua derivada.

Usando coordenadas polares, com  $r > 0$  e  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , obtemos que

$$L(r \cos \theta + ir \text{sen } \theta) = \log r + i\theta.$$

Como as partes real e imaginária de  $L$  são de classe  $C^1$ , podemos verificar que as funções  $U(r, \theta) = \log r$  e  $V(r, \theta) = \theta$  são suaves e

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 1$$

satisfazem 9.3. Assim,

$$L'(z) = L'(re^{i\theta}) = e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial r} (\log r + i\theta) = e^{-i\theta} \frac{1}{r} = \frac{re^{-i\theta}}{r^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.$$

□

**Exercício 13** Verifique que a função dada na forma polar por

$$R(z) = \sqrt{r} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \text{sen } \frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}},$$

definida para  $-\pi < \theta < \pi$ ,  $r > 0$ , é derivável e calcule a sua derivada.

Como as partes real ( $U$ ) e imaginária ( $V$ ) de  $R$  são de classe  $C^1$  e

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{\sqrt{r}}{2} \text{sen } \frac{\theta}{2}, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \text{sen } \frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

satisfazem 9.3, vemos que  $R$  é derivável e

$$\begin{aligned}
R'(z) = R'(re^{i\theta}) &= e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{r} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \text{sen } \frac{\theta}{2} \right) \right) \\
&= e^{-i\theta} \frac{1}{2\sqrt{r}} e^{i\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{r}} e^{-i\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{1}{2R(z)}.
\end{aligned}$$

□



# Capítulo 10

## Funções analíticas

**Definição 10** *Sejam  $D$  um aberto,  $z_0 \in D$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Dizemos que  $f$  é analítica em  $z_0$  se a  $f$  for derivável em todos os pontos de algum disco aberto centrado em  $z_0$ . Dizemos que  $f$  é analítica em  $D$  se  $f$  for analítica em todos os pontos de  $D$ .*

*Uma função analítica em  $\mathbb{C}$  é chamada de função inteira.*

**Observação 14** *Usa-se também o termo holomorfa como sinônimo de função analítica.*

**Exemplo 33** *As funções polinomiais, exponencial, seno e cosseno (trigonométricos ou hiperbólicos) são exemplos de funções inteiras, pois são deriváveis em todo ponto de  $\mathbb{C}$ .*

**Exemplo 34** *Como toda função polinomial possui apenas um número finito de zeros, podemos ver que as funções racionais são analíticas em todos os pontos onde estão definidas.*

**Exemplo 35** *A função  $f(z) = |z|^2$  só é derivável na origem. Logo, não é analítica em nenhum ponto.*

De fato, como as partes real e imaginária de  $f$  são, respectivamente, dadas por

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad v(x, y) = 0,$$

vemos que elas são de classe  $C^1$  e as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas somente na origem pois

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

□

**Proposição 17** *Se  $f$  e  $g$  são analíticas em  $z_0$  então as seguintes funções também o são:*

1.  $\alpha f + \beta g$  onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;
2.  $fg$

3.  $f/g$  desde que  $g(z_0) \neq 0$ .

**Prova:** Faça como exercício. ■

**Proposição 18 (Regra da Cadeia)** *Sejam  $D, \Omega \subset \mathbb{C}$  abertos,  $f : D \rightarrow \Omega$  e  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Se  $f$  é analítica em  $D$  e  $g$  é analítica em  $\Omega$  então a composta  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$  também é analítica em  $D$  e vale*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0), \quad \text{para todo } z_0 \in D.$$

**Prova:** Apresentaremos apenas a prova em dois casos especiais.

O primeiro caso é quando  $f(z)$  é constante. Neste caso,  $g \circ f$  também é constante e a conclusão da proposição é imediata.

O outro caso que consideraremos é quando  $f(z) \neq f(z_0)$  para todo  $z$  próximo a  $z_0$  mas  $z \neq z_0$ . Neste caso,

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (10.1)$$

Como  $f$  é contínua em  $z_0$  e  $g$  é derivável em  $f(z_0)$ , temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} = g'(f(z_0)).$$

Como  $f$  é derivável em  $z_0$ , temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Logo, segue de 10.1 que  $g \circ f$  é derivável em  $z_0$  e vale

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0). \quad \text{■}$$

**Definição 11** *Uma poligonal em  $\mathbb{C}$  é uma reunião finita de segmentos de reta*

$$I_j \doteq \{a_j(1-t) + b_j t \in \mathbb{C}; 0 \leq t \leq 1\},$$

onde  $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , satisfazendo  $b_1 = a_2, \dots, b_{n-1} = a_n$ .

**Definição 12** *Um conjunto  $D$  de números complexos é chamado de conexo se quaisquer dois pontos de  $D$  puderem ser conectados por uma poligonal contida em  $D$ .*

**Proposição 19** *Seja  $D$  um aberto conexo. Se  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  satisfaz  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in D$  então  $f$  é constante em  $D$ .*

**Prova:** Como  $D$  é aberto e a derivada de  $f$  existe em todos os pontos de  $D$ , tem-se que  $f$  é analítica. Como  $f'(z) = 0$ , segue de 9.2 que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Como  $D$  é conexo podemos usar um resultado de Cálculo II para concluir que  $u$  e  $v$  são constantes em  $D$ . Portanto,  $f = u + iv$  também é constante em  $D$ . ■

**Corolário 4** *Seja  $D$  um aberto conexo. Se  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  é analítica e  $|f(z)|$  é constante então  $f(z)$  também é constante.*

**Prova:** Colocando  $f = u + iv$  como de costume, segue-se que  $u^2 + v^2 = c = \text{constante}$ . Derivando esta última expressão e usando as equações de Cauchy-Riemann, obtemos

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, se  $c = 0$ , então  $u = v = 0$  e, portanto,  $f$  é constante e igual a zero. Por outro lado, se  $c \neq 0$  o sistema acima só admite a solução trivial  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . Voltando às equações de Cauchy-Riemann obtemos também  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  e, portanto,  $f' = 0$ . Pela proposição anterior,  $f$  é constante. ■

As funções analíticas possuem uma propriedade geométrica bem interessante como pode ser vista no teorema a seguir.

**Teorema 3** *Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  uma analítica tal que  $f'(z) \neq 0$ . Sejam  $u = \Re f$  e  $v = \Im f$ . Então as curvas de nível de  $u$  e  $v$  se cruzam ortogonalmente.*

**Prova:** Como  $f' \neq 0$  então os vetores gradientes  $\nabla u$  e  $\nabla v$  são não nulos e por um resultado de Cálculo II, temos que  $\nabla u$  e  $\nabla v$  são ortogonais às curvas de nível de  $u$  e de  $v$ , respectivamente. Porém, pelas equações de Cauchy-Riemann,

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Assim,

$$\left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\rangle = \left\langle \left( \frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\rangle = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

**Exemplo 36** *Considere  $f(z) = z^2$ ,  $z \neq 0$ . Como  $f'(z) = 2z \neq 0$  vemos que as curvas  $u(x, y) = \Re f(z) = x^2 - y^2 = c_1$  e  $v(x, y) = \Im f(z) = 2xy = c_2$  se cruzam ortogonalmente. Note que estas curvas são hipérbolas.*

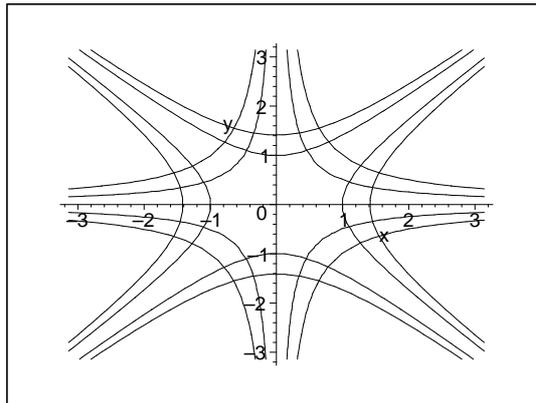


Figura 10.1:  $x^2 - y^2 = c_1$  e  $2xy = c_2$

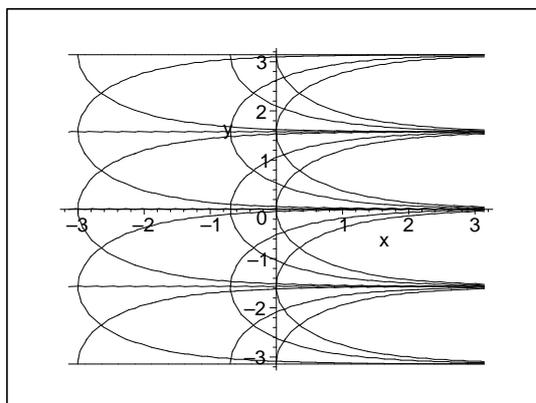


Figura 10.2:  $e^x \cos y = c_1$  e  $e^x \text{sen } y = c_2$

**Exemplo 37** Considere  $f(z) = e^z$ . Como  $f'(z) = e^z \neq 0$  vemos que as curvas  $u(x, y) = \Re f(z) = e^x \cos y = c_1$  e  $v(x, y) = \Im f(z) = e^x \sin y = c_2$  se cruzam ortogonalmente.

**Exemplo 38** Encontre, se possível uma família de curvas ortogonais às curvas dadas em coordenadas polares por  $r^2 \cos 2\theta = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ .

Seja  $U(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$  e procuremos  $V(r, \theta)$  de classe  $C^1$  tal que  $f(re^{i\theta}) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$  seja analítica. Se uma tal  $V$  existir, deverá satisfazer as condições de Cauchy-Riemann na forma polar (veja 9.3):

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r}(r, \theta) = 2r \cos 2\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}(r, \theta) \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta}(r, \theta) = 2r^2 \cos 2\theta \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{1}{r} r^2 (-2 \sin 2\theta) = -2r \sin 2\theta = -\frac{\partial V}{\partial r}(r, \theta) \end{cases} .$$

Integrando a primeira equação, obtemos  $V(r, \theta) = r^2 \sin 2\theta + \psi(r)$ , onde a função  $\psi$  é escolhida de modo a satisfazer a segunda equação, isto é,

$$-2r \sin 2\theta = -\frac{\partial V}{\partial r}(r, \theta) = -2r \sin 2\theta - \psi'(r),$$

ou seja,  $\psi'(r) = 0$ , isto é,  $\psi$  é constante, digamos,  $\psi = k \in \mathbb{R}$ .

Desta maneira, obtemos  $V(r, \theta) = r^2 \sin 2\theta + k$  e como pode ser visto,  $V$  é de classe  $C^1$  e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann na forma polar. Desta forma  $f$  é analítica e, portanto, a família de curvas  $r^2 \sin 2\theta + k = \beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , é ortogonal a  $r^2 \cos 2\theta = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Note que

$$\begin{aligned} f(z) &= f(re^{i\theta}) = r^2 \cos 2\theta + i(r^2 \sin 2\theta + k) = r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta + ik \\ &= r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + ik = r^2 e^{2i\theta} + ik = (re^{i\theta})^2 + ik = z^2 + ik. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 39** Faça o mesmo para a família de círculos  $x^2 + y^2 = \alpha$ ,  $\alpha > 0$ .

Coloque  $u(x, y) = x^2 + y^2$  e procuremos  $v(x, y)$  de classe  $C^1$  tal que  $f = u + iv$  seja analítica, isto é, que  $u$  e  $v$  satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann. Devemos ter

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

Integrando a primeira equação, obtemos  $v(x, y) = 2xy + \psi(x)$ , onde  $\psi$  deve ser escolhida de modo a satisfazer a segunda equação, isto é,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \psi'(x) = -2y \Leftrightarrow \psi'(x) = -4y,$$

o que é impossível, pois  $\psi$  é independente de  $y$ .

Vemos assim, que o método usado no exemplo anterior nem sempre se aplica. Poderíamos ter iniciado com  $v(x, y) = x^2 + y^2$  e querer encontrar  $u$  de classe  $C^1$  tal que  $f = u + iv$  fosse analítica. Neste caso, as equações de Cauchy-Riemann nos levariam a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2x = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

Como anteriormente, integrando a primeira equação, obtemos  $u(x, y) = 2xy + \varphi(y)$ . Como a segunda equação também precisa ser satisfeita, devemos ter  $2x - \varphi'(y) = -2x$ , que também é impossível.

Note, entretanto, que o feixe de retas que passa pela origem, que é dado por  $ax + by = 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a^2 + b^2 > 0$ , é uma família ortogonal aos círculos  $x^2 + y^2 = \alpha$ ,  $\alpha > 0$ .  $\square$

# Capítulo 11

## Funções multivalentes

### 11.1 Raiz $n$ -ésima

Neste capítulo vamos tratar, na sua maior parte, de inversas para algumas funções elementares. Vejamos como isto pode ser feito no caso da função de uma variável real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Quando  $n$  é ímpar, para cada  $y \in \mathbb{R}$  existe apenas um número real  $x$  satisfazendo  $x^n = y$ . Este número é denotado por  $\sqrt[n]{y}$  e a função inversa de  $f$  é simplesmente  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(y) = \sqrt[n]{y}$ . Agora, quando  $n$  é par,  $x^n$  é sempre maior ou igual a zero. Desta forma, a equação  $x^n = y$  só pode ser resolvida quando  $y \geq 0$ . Neste caso, isto é, quando  $y \geq 0$ , a equação  $x^n = y$  apresenta duas soluções distintas (a menos quando  $y = 0$ ): uma positiva e outra negativa. Por convenção, denotamos a solução positiva por  $\sqrt[n]{y}$ . Assim, a função  $f$  quando restrita ao intervalo  $[0, +\infty)$  possui como inversa a função  $h : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  dada por  $h(y) = \sqrt[n]{y}$ .

Como veremos a situação no complexo terá de ser tratada de modo diferente. O primeiro aspecto a ser observado é que a equação  $z^n = z_o$  sempre possui solução e, na verdade, se  $z_o \neq 0$ , ela possui  $n$  soluções distintas. Esta ocorrência de soluções se assemelha ao caso real em que  $n$  é par, quando fizemos uma escolha sobre qual raiz seria escolhida. No entanto, a escolha aqui deveria ser feita entre as  $n$  soluções existentes.

O outro aspecto a ser considerado decorre do modo como expressamos as raízes  $n$ -ésimas na forma polar. Relembrando, se expressarmos  $z_o = r_o e^{i\theta_o}$  então as  $n$  raízes  $n$ -ésimas de  $z_o$  são dadas por

$$u_k = \sqrt[n]{r_o} \left( \cos \left( \frac{\theta_o + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_o + 2k\pi}{n} \right) \right) = \sqrt[n]{r_o} e^{i(\theta_o + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (11.1)$$

Fixemos por enquanto uma destas raízes e a denotemos por  $\sqrt[n]{z}$ . Como a expressão

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\theta} = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}$$

envolve  $\theta$ , o argumento de  $z$ , devemos verificar se ela não se altera quando o argumento é trocado por  $\theta + 2m\pi$ , pois esta mudança não altera o número complexo  $z$ . Isto claramente não ocorre pois

$$\sqrt[n]{r} e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \neq \sqrt[n]{r} e^{i(\theta + 2m\pi + 2k\pi)/n}$$

se  $m$  não for um múltiplo de  $n$ . Para se ver livre deste inconveniente podemos limitar a variação do argumento de  $z$  tomando, por exemplo,  $-\pi < \theta \leq \pi$ . A fim de simplificar a notação, vamos escolher a raiz correspondente a  $k = 0$  na equação 11.1. Note que se  $z_o$  é um número real negativo então duas maneiras de representá-lo na forma polar com são  $|z_o|e^{-i\pi}$  e  $|z_o|e^{i\pi}$ . Embora a primeira destas representações não esteja dentro do que impusemos para a variação de  $\theta$ , ela pode se escrita como

$$|z_o|e^{-i\pi} = \lim_{\theta \rightarrow -\pi^+} |z_o|e^{i\theta}.$$

Assim,

$$\lim_{\theta \rightarrow -\pi^+} \sqrt[n]{|z_o|e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}e^{-i\frac{\pi}{n}}$$

enquanto que  $\sqrt[n]{z_o} = \sqrt[n]{|z_o|e^{i\pi}} = \sqrt[n]{|z_o|}e^{i\frac{\pi}{n}}$ . Desta forma, a escolha que fizemos deixa descontínua a função raiz  $n$ -ésima nos pontos  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z < 0$ . Na verdade, qualquer outra escolha para  $k$  em 11.1 produziria o mesmo efeito. Além do mais, se a restrição no argumento fosse determinada pela variação  $\theta_o < \theta \leq \theta_o + 2\pi$ , onde  $\theta_o \in \mathbb{R}$ , a nova definição de raiz  $n$ -ésima apresentaria descontinuidade no raio  $\{re^{i\theta_o}; r > 0\}$ .

Antes de apresentarmos a definição definitiva do que pretendemos dizer por *função raiz  $n$ -ésima* note que os únicos valores possíveis para  $\sqrt[n]{e^{i\theta/n}}$  quando  $\theta$  varia são aqueles apresentados em 11.1, com  $\theta = \theta_o$  e  $r = r_o$ . Geometricamente, tomando  $z \in \mathbb{C}$ , escolhemos um de seus argumentos e após isto, rotacionamos os pontos do plano no sentido anti-horário por um ângulo de  $2\pi$ . Com isto, a imagem do ponto  $z$  pela rotação coincide consigo próprio, porém a expressão  $\sqrt[n]{e^{i\theta/n}}$  passará para  $\sqrt[n]{e^{i(\theta+2\pi)/n}}$ . Aplicando mais uma rotação como a anterior obtemos o novo valor de  $\sqrt[n]{e^{i(4\pi+\theta)/n}}$ . Desta maneira, após  $n$  destas rotações o resultado será  $\sqrt[n]{e^{i(2\pi n+\theta)/n}}$  que é igual a  $\sqrt[n]{e^{i\theta/n}}$ .

Definimos a *função multivalente* raiz  $n$ -ésima,  $\sqrt[n]{\phantom{z}}$ , como sendo a relação que a cada  $z$  associa *todas* as  $n$  raízes dadas como em 11.1. Vale a pena salientar que uma função multivalente não é uma função no estrito senso da definição de função, já que associa a um elemento do seu domínio mais de um valor.

Considere agora a função

$$R_k(z) = R_k(re^{i\theta}) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad \theta_o < \theta < \theta_o + 2\pi$$

que coincide com um dos valores possíveis para a raiz  $n$ -ésima. As suas partes real e imaginária são dadas, respectivamente, por

$$U(r, \theta) = \sqrt[n]{r} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{e} \quad V(r, \theta) = \sqrt[n]{r} \sen \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

são funções de classe  $C^1$  para  $r > 0$  e satisfazem

$$\frac{\partial U}{\partial r}(r, \theta) = \frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}-1} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{1}{r} \frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}(r, \theta)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r, \theta) = \frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}-1} \sen \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{1}{r} \frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}} \sen \frac{\theta + 2k\pi}{n} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}(r, \theta)$$

que são as equações de Cauchy-Riemann na forma polar. Logo,  $R_k$  é analítica e é chamada de um *ramo* da função (multivalente) raiz  $n$ -ésima e também é denotado por  $\sqrt[n]{\phantom{z}}$ . Quando tomamos  $\theta_o = 0$  e  $k = 0$  o ramo é chamado de ramo principal.

## 11.2 Logaritmo

Vamos definir o logaritmo de um número complexo  $z$ ,  $\log z$ , através da relação

$$w = \log z \Leftrightarrow z = \exp w.$$

Note que  $\log z$  não é definido quando  $z = 0$ , pois já vimos que a função exponencial nunca se anula. Outra observação pertinente é que como a exponencial complexa é uma função periódica de período igual a  $2\pi i$  ( $\exp(z + 2\pi i) = \exp z$ ), a expressão  $z = \exp w$  não define  $w$  de maneira única a partir de  $z$ . Com efeito, se para um dado  $z$  encontrarmos  $w$  tal que  $z = \exp w$  então para todo  $k \in \mathbb{Z}$  os números  $w_k = w + 2k\pi i$  também satisfazem  $z = \exp w_k$ . Desta maneira, o logaritmo também deve ser definido como uma função multivalente.

Representando  $z \neq 0$  na forma polar  $re^{i\theta}$  e se  $w$  for um dos valores de  $\log z$  então

$$z = \exp w \Leftrightarrow re^{i\theta} = \exp w \Leftrightarrow e^{\Re w} = r \quad \text{e} \quad \Im w = \theta + 2k\pi,$$

ou seja, a parte real de  $w$  é o logaritmo real de  $r = |z|$  e a sua parte imaginária é um argumento qualquer de  $z$ . Assim,

$$\log z = \log |z| + i \arg z \tag{11.2}$$

onde o logaritmo que aparece no lado direito da igualdade acima é o logaritmo (natural ou neperiano) real.

Note que o argumento da variável  $z$  é também uma função multivalente e, assim, devemos encarar a expressão 11.2 como uma igualdade de conjuntos, ou seja, para cada  $z \neq 0$ ,  $\log z$  representa todos os números complexos da forma  $\log |z| + i(\arg_o z + 2k\pi)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$  e  $\arg_o z$  é um argumento de  $z_o$  fixado.

**Exemplo 40** Calcule  $\log i$ .

Temos

$$\log i = \log |i| + i \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \log 1 + i \frac{4k+1}{2} \pi = i \frac{4k+1}{2} \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

**Exemplo 41** Calcule  $\log z$  se  $\Im z = 0$ ,  $z \neq 0$ .

Temos  $z = |z|$  se  $z > 0$  ou  $z = |z|e^{i\pi}$  se  $z < 0$ . No primeiro caso

$$\log z = \log |z| + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

e no segundo,

$$\log z = \log |z| + (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}.$$

□

Quando restringimos a variação do argumento em um intervalo  $(\theta_o, \theta_o + 2\pi]$ , vemos que a representação 11.2 fica definida de maneira única para todo  $z \neq 0$ . Porém, como no caso da raiz  $n$ -ésima a função deixa de ser contínua sobre os pontos do raio  $R_o = \{re^{i\theta_o}; r \geq 0\}$ . No

entanto, se considerarmos a restrição do argumento ao intervalo aberto  $(\theta_o, \theta_o + 2\pi)$  vemos que as partes real e imaginária do logaritmo são dadas na forma polar por  $U(r, \theta) = \log r$  e  $V(r, \theta) = \theta$ , respectivamente. Como já vimos no exercício 12, estas funções são de classe  $C^1$  e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann na forma polar e, portanto, a função logaritmo quando restringirmos o argumento da variável a um intervalo do tipo  $(\theta_o, \theta_o + 2\pi)$  é analítica em todo o plano menos o raio  $R_o$ . Cada uma destas restrições é chamada de um ramo da função multivalente logaritmo. No caso em que tomarmos  $\theta_o = -\pi$ , diremos que o ramo tomado é o ramo principal e o denotaremos por  $\text{Log}$ .

**Exemplo 42** *Seja  $f(z) = \log z$  um ramo do logaritmo. Calcule  $\log' z$ .*

Se  $z = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ ,  $\theta_o < \theta < \theta_o + 2\pi$  então, tomando  $\log z = \log r + i\theta$  e usando 9.4, obtemos

$$\log' z = e^{-i\theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} \log r + i \frac{\partial}{\partial r} \theta \right) = e^{-i\theta} \frac{1}{r} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

□

**Exemplo 43** *Calcule  $\text{Log}(1 + i)$ .*

Escrevendo  $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ , obtemos de imediato que

$$\text{Log}(1 + i) = \log \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}.$$

□

**Proposição 20** *Se  $z_1$  e  $z_2$  são não nulos então as seguintes igualdades de conjuntos são válidas:*

1.  $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$ ;
2.  $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$ .

**Prova:** Antes de começarmos a prova, explicaremos o que queremos dizer com respeito à expressão *igualdades de conjuntos*. No primeiro item isto significa que dado um dos possíveis valores de  $\log z_1 z_2$  é possível encontrar um valor de  $\log z_1$  e um valor de  $\log z_2$  cuja soma seja igual ao valor dado do logaritmo de  $z_1 z_2$  e reciprocamente. Isto é, dados um valor de  $\log z_1$  e um valor de  $\log z_2$  é possível encontrar um valor de  $\log z_1 z_2$  que coincida com a soma dos valores tomados de  $\log z_1$  e  $\log z_2$ . O segundo item é tratado de modo semelhante.

Vamos provar somente o primeiro item. Coloque  $z_j = |z_j|e^{i\theta_j}$ , onde  $\theta_j$  é um argumento de  $z_j$ ,  $j = 1, 2$ . Então  $z_1 z_2 = |z_1 z_2|e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$  e assim,

$$\log z_1 z_2 = \log |z_1 z_2| + i(\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi) = \log |z_1| + i\theta_1 + \log |z_2| + i(\theta_2 + 2k\pi)$$

e vemos que  $\log |z_1| + i\theta_1$  é um dos valores de  $\log z_1$  e  $\log |z_2| + i(\theta_2 + 2k\pi)$  é um dos valores de  $\log z_2$ .

Reciprocamente,

$$\begin{aligned} \log z_1 + \log z_2 &= \log |z_1| + i(\theta_1 + 2m\pi) + \log |z_2| + i(\theta_2 + 2k\pi) \\ &= \log |z_1||z_2| + i(\theta_1 + \theta_2 + 2(m+k)\pi) = \log |z_1 z_2| + i(\theta_1 + \theta_2 + 2(m+k)\pi) \end{aligned}$$

que é um dos valores de  $\log z_1 z_2$ .

■

## 11.3 Potência

Se  $z \neq 0$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$  definimos

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z).$$

Dependendo do expoente  $\alpha$  a função  $z \mapsto z^\alpha$  é multivalente. No entanto, quando  $\alpha = n \in \mathbb{Z}$  a definição acima coincide com aquela que já havíamos dado para  $z^n$ . De fato, se  $z = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \exp(n \log z) &= \exp(n(\log r + i(\theta + 2k\pi))) = \exp(n \log r) \exp(in(\theta + 2k\pi)) \\ &= \exp(\log r^n) \exp(in\theta) \exp(2kn\pi i) = r^n e^{in\theta} = (re^{i\theta})^n = z^n, \end{aligned}$$

que é independente de  $k \in \mathbb{Z}$ .

Quando  $\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , a definição acima também coincide com a da função multivalente raiz  $n$ -ésima. De fato,

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right) = \exp\left(\frac{1}{n} (\log r + i(\theta + 2k\pi))\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \log r\right) \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \\ &= \exp\left(\log r^{\frac{1}{n}}\right) \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{z}. \end{aligned}$$

Note que em geral quando tomamos um ramo do logaritmo a função  $f(z) = z^\alpha$  com esta restrição é chamada também de ramo. Note ainda que este ramo é uma função analítica pois é composição de duas funções analíticas. No caso de tomarmos o ramo principal do logaritmo, o ramo da função potência também será chamado de principal.

**Exemplo 44** *Seja  $f(z) = z^\alpha$  um ramo da função potência. Calcule  $f'(z)$ .*

Fixe um ramo do logaritmo com  $r > 0$  e  $\theta_o < \theta < \theta_o + 2\pi$ , dado por  $\log z = \log r + i(\theta + 2k\pi)$ . Podemos usar a regra da cadeia para obter

$$\begin{aligned} f'(z) &= \exp(\alpha \log(z)) \alpha \log' z = \exp(\alpha \log(z)) \alpha \frac{1}{z} = \alpha \frac{\exp(\alpha \log z)}{\exp(\log z)} \\ &= \alpha \exp(\alpha \log z - \log z) = \alpha \exp((\alpha - 1) \log z) = \alpha z^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

onde deve ser entendido que  $z^{\alpha-1}$  é o ramo da função multivalente  $z \mapsto z^{\alpha-1}$  com  $r > 0$  e  $\theta_o < \theta < \theta_o + 2\pi$ .

**Exemplo 45** *Encontre todos os valores de  $i^i$ .*

Temos

$$i^i = \exp(i \log i) = \exp\left(i \left(\log |i| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{4k+1}{2}\pi\right) = e^{-\frac{4k+1}{2}\pi}$$

com  $k \in \mathbb{Z}$ . Note que todos os valores de  $i^i$  são reais. □

**Observação 15** *Algumas propriedades algébricas que são válidas para potenciação real perdem a veracidade no caso complexo. Vejamos duas delas.*

1. *Não é verdade que sempre que  $z \neq 0$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tem-se  $z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta$ , nem mesmo no sentido de igualdade de conjuntos. Basta tomar  $z = 1$ ,  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  e os dois valores distintos para  $z^{\frac{1}{2}}$  um igual a  $-1$  e o outro igual a  $1$ . Daí  $1^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1^1 = 1$  mas  $1^{\frac{1}{2}}1^{\frac{1}{2}} = (-1)1 = -1$ .*
2. *Não é verdade que sempre que  $z \neq 0$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tem-se  $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ , nem mesmo no sentido de igualdade de conjuntos. Basta tomar  $\alpha = p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ , e  $\beta = \frac{1}{np}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e daí vemos que  $(z^p)^{\frac{1}{np}}$  representa  $np$  números distintos enquanto que  $z^{p\frac{1}{np}} = z^{\frac{1}{n}}$  representa apenas  $n$  números distintos.*

No entanto vale a seguinte propriedade cuja demonstração é deixada como exercício.

**Proposição 21** *Se  $z_1$  e  $z_2$  são não nulos e  $\alpha \in \mathbb{C}$  então vale a seguinte igualdade de conjuntos*

$$(z_1 z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha.$$

# Capítulo 12

## Curvas no plano complexo

**Definição 13** Uma curva no plano complexo é uma função contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , isto é, as funções de uma variável real  $\Re\gamma, \Im\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas. Dizemos que a curva é simples se  $a \leq t < s \leq b$  implicar em  $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ , a menos que  $t = a$  e  $s = b$ . Dizemos que a curva é fechada se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Exemplo 46**  $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  representa o círculo unitário centrado na origem. Esta curva é simples e fechada.

**Exemplo 47** A cardióide  $\gamma(\theta) = (\frac{1}{2} + \cos \theta)e^{i\theta} = (\frac{1}{2} + \cos \theta) \cos \theta + i(\frac{1}{2} + \cos \theta) \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  é exemplo de uma curva fechada que não é simples.

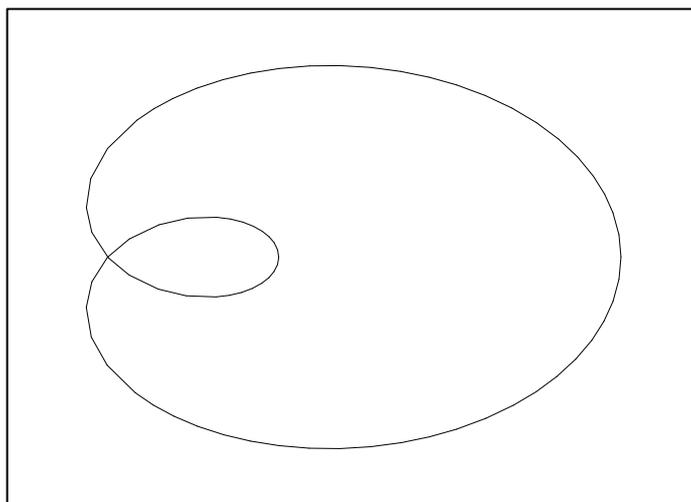


Figura 12.1: Cardióide

**Exemplo 48**  $\gamma(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ ,  $z_0 \neq z_1$ , representa o segmento no plano complexo cujas extremidades são  $z_0$  e  $z_1$ . Note que esta curva é simples mas não é fechada.

**Definição 14** Considere uma curva  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq t \leq b$ . Dizemos que  $\gamma$  é suave se as funções de valores reais  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possuem derivada contínua. O vetor  $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$  é chamado de vetor velocidade ou tangente à curva  $\gamma$  em  $\gamma(t)$ . Se  $\gamma'(t) \neq 0$  para todo  $a \leq t \leq b$ , dizemos que  $\gamma$  é uma curva regular.

**Exemplo 49** Todas as curvas dos exemplos anteriores são exemplos de curvas suaves e regulares. Vejamos mais especificamente o exemplo 47. Neste caso temos

$$\gamma'(\theta) = -\operatorname{sen} \theta e^{i\theta} + i \left( \frac{1}{2} + \cos \theta \right) e^{i\theta} = e^{i\theta} \left( -\operatorname{sen} \theta + i \left( \frac{1}{2} + \cos \theta \right) \right).$$

Como  $e^{i\theta} \neq 0$ , vemos que  $\gamma'(\theta) = 0$  se e somente se  $-\operatorname{sen} \theta + i \left( \frac{1}{2} + \cos \theta \right) = 0$ , ou seja,  $\operatorname{sen} \theta = 0$  e  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ , o que é impossível. Logo,  $\gamma'(\theta) \neq 0$  para todo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Exemplo 50** Considere a curva  $\gamma(t) = t^3 + it^2$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . Esta curva é suave mas como  $\gamma'(0) = 0$ , não é regular.

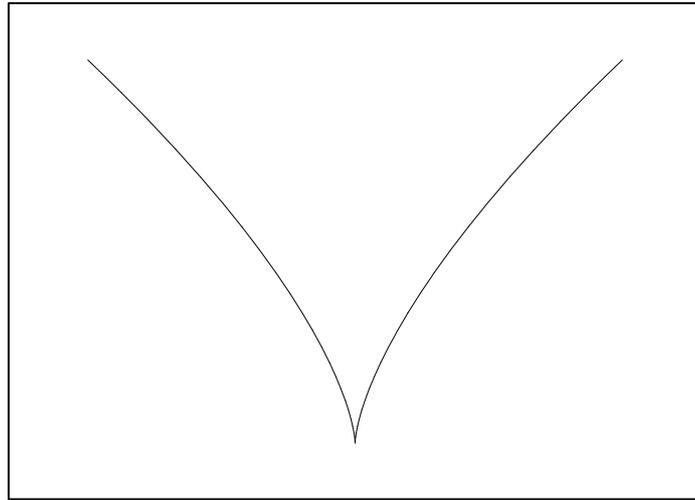


Figura 12.2: Curva não regular

**Definição 15** O traço de uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é a imagem desta curva.

**Observação 16** Muitas vezes usaremos a palavra curva significando, na verdade, o seu traço.

**Exemplo 51** As curvas  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  e  $\tilde{\gamma}(t) = e^{2it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  possuem o mesmo traço. Qual?

O exemplo anterior serve para ilustrar que o mesmo traço pode ser percorrido de formas diferentes. No entanto, naquele exemplo, temos  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(2t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  e percebemos que o que ocorreu foi uma mudança de parâmetro da curva  $\gamma$ . Isto sugere o seguinte:

**Definição 16** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva suave. Seja  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  uma função suave cuja inversa  $\varphi^{-1} : [a, b] \rightarrow [c, d]$  também é suave. Diremos que  $\varphi$  é uma mudança de parâmetro e  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t))$ ,  $c \leq t \leq d$  é uma reparametrização da curva  $\gamma$ .

**Observação 17** Se  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é uma mudança de parâmetro então temos  $\varphi'(t) < 0$  para todo  $t \in [c, d]$  ou  $\varphi'(t) > 0$  para todo  $t \in [c, d]$ . No primeiro caso,  $\varphi(c) = b$  e  $\varphi(d) = a$ ; já no segundo,  $\varphi(c) = a$  e  $\varphi(d) = b$ .

**Exemplo 52** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva suave. Considere  $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$  dada por  $\varphi(t) = a + b - t$ . Vê-se que  $\varphi$  é uma mudança de parâmetro e  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$ ,  $a \leq t \leq b$  é uma reparametrização de  $\gamma$ . Note que essa mudança de parâmetro inverte a ordem sobre a qual o traço de  $\gamma$  é percorrido.

**Exemplo 53** Considere  $\gamma(t) = \cos t + i2 \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . O traço desta curva é uma elipse  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$  que é percorrido no sentido anti-horário. Fazendo-se a mudança do exemplo 52 obtemos  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(0 + 2\pi - t) = \gamma(2\pi - t) = \cos(2\pi - t) + i2 \sin(2\pi - t) = \cos t - i2 \sin t$  que representa a mesma elipse, porém percorrida no sentido horário.

Às vezes nos deparamos com traços de curvas que são mais facilmente parametrizáveis por partes, ou seja, sabemos parametrizar partes de um traço da curva e queremos, a partir daí, parametrizar todo o traço. Neste caso, precisamos saber como proceder para colar estes pedaços (arcos) da curva. Vejamos como fazer. Considere duas curvas  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ .

Definimos  $\gamma : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{se } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t + c - b), & \text{se } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases} \quad (12.1)$$

Note que a condição  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$  assegura a continuidade de  $\gamma$ . No entanto, mesmo que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sejam suaves, podemos ter que não exista a derivada de  $\gamma$  em  $t = b$ . Observe que o traço de  $\gamma$  é a reunião dos traços de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

**Definição 17** A curva  $\gamma$  dada por 12.1 é chamada de justaposição das curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

**Definição 18** Sejam  $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , curvas suaves tais que  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2), \dots, \gamma_{n-1}(b_{n-1}) = \gamma_n(a_n)$ . A justaposição das curvas  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  é chamada de caminho.

**Observação 18** As definições de caminhos fechados e simples são análogas às definições usadas para curvas.

**Definição 19** Um contorno é um caminho fechado e simples.

**Exemplo 54** A justaposição das curvas  $\gamma_1(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\gamma_2(t) = 1 + it$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\gamma_3(t) = 1 - t + i(1 - t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , é o caminho cujo traço representa o triângulo de vértices  $0$ ,  $1$  e  $1+i$ . Este caminho é exemplo de um contorno.

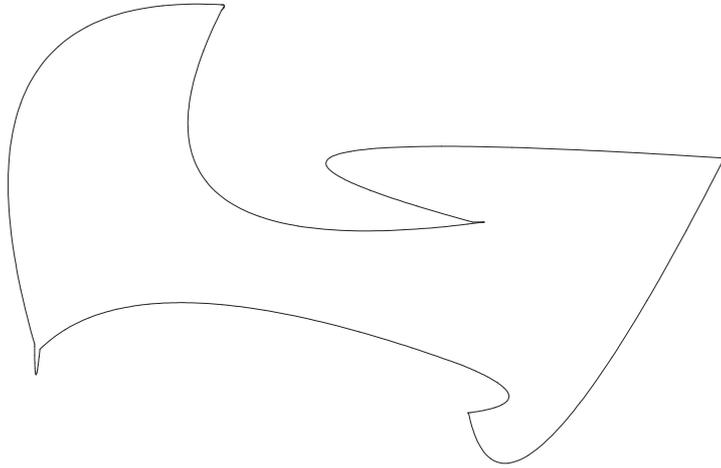


Figura 12.3: Um contorno

**Teorema 4** *Todo contorno  $\gamma$  divide o plano em duas regiões conexas disjuntas  $X_1$  e  $X_2$  com as seguintes propriedades:*

1.  $\partial X_1 = \partial X_2 =$  traço de  $\gamma$ ;
2.  $X_1$  é limitada;
3.  $X_2$  é ilimitada;

A região  $X_1$  é chamada de interior da curva  $\gamma$ .

# Capítulo 13

## Integração

**Definição 20** Seja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva (contínua) com  $u(t) = \Re g(t)$  e  $v(t) = \Im g(t)$ . A integral de  $g$  sobre  $[a, b]$  é definida por

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

**Observação 19**  $\Re \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \Re g(t) dt$  e  $\Im \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \Im g(t) dt$ .

**Proposição 22** Se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  são contínuas e  $\alpha \in \mathbb{C}$  então

1.  $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$ ;
2.  $\int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt$ ;
3.  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ .

**Prova:**

1. Colocando  $u_1 = \Re f$ ,  $v_1 = \Im f$ ,  $u_2 = \Re g$  e  $v_2 = \Im g$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(t) + g(t)) dt &= \int_a^b (u_1(t) + u_2(t) + i(v_1(t) + v_2(t))) dt \\ &= \int_a^b (u_1(t) + u_2(t)) dt + i \int_a^b (v_1(t) + v_2(t)) dt \\ &= \int_a^b u_1(t) dt + i \int_a^b v_1(t) dt + \int_a^b u_2(t) dt + i \int_a^b v_2(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt; \end{aligned}$$

2. Se  $\alpha$  é real temos

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(t) dt &= \int_a^b (\alpha u_1(t) + i\alpha v_1(t)) dt = \int_a^b \alpha u_1(t) dt + i \int_a^b \alpha v_1(t) dt \\ \alpha \int_a^b u_1(t) dt + i\alpha \int_a^b v_1(t) dt &= \alpha \left( \int_a^b u_1(t) dt + i \int_a^b v_1(t) dt \right) = \alpha \int_a^b f(t) dt.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\int_a^b i f(t) dt &= \int_a^b (iu_1(t) - v_1(t)) dt = \int_a^b (-v_1(t) + iu_1(t)) dt \\ &= \int_a^b (-v_1(t)) dt + i \int_a^b u_1(t) dt = - \int_a^b v_1(t) dt + i \int_a^b u_1(t) dt \\ &= i \left( \int_a^b u_1(t) dt + i \int_a^b v_1(t) dt \right) = i \int_a^b f(t) dt.\end{aligned}$$

Finalmente, colocando  $\alpha = \beta + i\eta$ ,  $\beta, \eta \in \mathbb{R}$ , combinando o item anterior e o que já foi demonstrado neste item, obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(t) dt &= \int_a^b (\beta f(t) + i\eta f(t)) dt = \int_a^b \beta f(t) dt + \int_a^b i\eta f(t) dt \\ &= \beta \int_a^b f(t) dt + i\eta \int_a^b f(t) dt = (\beta + i\eta) \int_a^b f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt;\end{aligned}$$

3. Coloque

$$re^{i\theta} = \int_a^b f(t) dt.$$

Temos

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(t) dt \right| &= r = e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt \\ &= \Re \left( \int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt \right) = \int_a^b \Re (e^{-i\theta} f(t)) dt\end{aligned}$$

pois  $\left| \int_a^b f(t) dt \right|$  é real. Daí,

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(t) dt \right| &= \int_a^b \Re (e^{-i\theta} f(t)) dt \leq \int_a^b |\Re (e^{-i\theta} f(t))| dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt.\end{aligned}$$

■

**Definição 21** Sejam  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$  uma curva suave e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. A integral de linha de  $f$  sobre a curva  $\gamma$  é definida por

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Note que  $g(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$  é uma curva contínua se  $f$  e  $\gamma$  são como na definição acima. Se colocarmos  $u = \Re f$ ,  $v = \Im f$ ,  $x = \Re \gamma$  e  $y = \Im \gamma$  então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)] dt = \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt + i \int_a^b [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)] dt = \\ &= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy, \end{aligned}$$

onde as últimas integrais são integrais de linha como visto em Cálculo III.

Valem as seguintes propriedades:

**Proposição 23** Se  $f_1, f_2 : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  são contínuas e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é suave então

$$\int_{\gamma} [\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)] dz = \alpha_1 \int_{\gamma} f_1(z) dz + \alpha_2 \int_{\gamma} f_2(z) dz, \quad \text{onde } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

**Prova:** Colocando  $u_j = \Re f_j$ ,  $v_j = \Im f_j$ ,  $\beta_j = \Re \alpha_j$  e  $\delta_j = \Im \alpha_j$ ,  $j = 1, 2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 &= (\beta_1 + i\delta_1)(u_1 + iv_1) + (\beta_2 + i\delta_2)(u_2 + iv_2) = \\ &= \beta_1 u_1 - \delta_1 v_1 + \beta_2 u_2 - \delta_2 v_2 + i(\beta_1 v_1 + \delta_1 u_1 + \beta_2 v_2 + \delta_2 u_2). \end{aligned}$$

Assim, usando as propriedades de integral de linha como visto em Cálculo III,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} [\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)] dz &= \int_{\gamma} [\beta_1 u_1 - \delta_1 v_1 + \beta_2 u_2 - \delta_2 v_2] dx - [\beta_1 v_1 + \delta_1 u_1 + \beta_2 v_2 + \delta_2 u_2] dy + \\ &+ i \int_{\gamma} [\beta_1 v_1 + \delta_1 u_1 + \beta_2 v_2 + \delta_2 u_2] dx + [\beta_1 u_1 - \delta_1 v_1 + \beta_2 u_2 - \delta_2 v_2] dy = \\ &= (\beta_1 + i\delta_1) \int_{\gamma} u_1 dx - v_1 dy + i \int_{\gamma} v_1 dx + u_1 dy + (\beta_2 + i\delta_2) \int_{\gamma} u_2 dx - v_2 dy + i \int_{\gamma} v_2 dx + u_2 dy = \\ &= \alpha_1 \int_{\gamma} f_1(z) dz + \alpha_2 \int_{\gamma} f_2(z) dz. \end{aligned}$$

■

**Proposição 24** *Sejam  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua, e  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  curva suave. Se  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é uma mudança de parâmetro e  $\gamma_2$  é a reparametrização de  $\gamma_1$  obtida através de  $\varphi$  então*

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \begin{cases} \int_{\gamma_2} f(z) dz, & \text{se } \varphi \text{ é crescente,} \\ -\int_{\gamma_2} f(z) dz, & \text{se } \varphi \text{ é decrescente.} \end{cases}$$

**Prova:** Provaremos apenas o caso em que  $\varphi$  é decrescente. O outro caso é deixado como exercício.

Como  $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$ , temos  $\gamma_2'(t) = \gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)$ . Como  $\varphi$  é decrescente,  $\varphi(c) = b$  e  $\varphi(d) = a$ . Assim, fazendo a mudança  $\tau = \varphi(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_c^d f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t) dt = \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(t)))\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \\ &= \int_b^a f(\gamma_1(\tau))\gamma_1'(\tau)d\tau = -\int_a^b f(\gamma_1(\tau))\gamma_1'(\tau)d\tau = -\int_{\gamma_1} f(z) dz \end{aligned}$$

**Prova:**

**Exemplo 55** *Se  $n \in \mathbb{Z}$ , calcule*

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz,$$

onde  $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ ,  $R > 0$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  e  $n \in \mathbb{Z}$ .

Observe que o traço de  $\gamma$  é o círculo centrado em  $z_0$  de raio  $R$ . A função  $f(z) = (z - z_0)^n$  é contínua (mesmo quando  $n$  é negativo) em  $\Omega = \mathbb{C} \setminus 0$ . Como  $\gamma'(t) = Rie^{it}$  e  $z - z_0 = Re^{it}$ , temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} [Re^{it}]^n Rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} R^{n+1}ie^{i(n+1)t} dt.$$

Se  $n = -1$  então a integral acima se reduz a  $\int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$ .

Se  $n \neq -1$  então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} R^{n+1}i[\cos((n+1)t) + i \operatorname{sen}((n+1)t)] dt = \\ &= R^{n+1}i \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) - R^{n+1}i \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}((n+1)t) dt = \\ &= R^{n+1}i \frac{\operatorname{sen}((n+1)t)}{n+1} \Big|_0^{2\pi} + R^{n+1}i \frac{\cos((n+1)t)}{n+1} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\gamma_1} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = -1, \\ 0 & \text{se } n \neq -1. \end{cases}$$

□

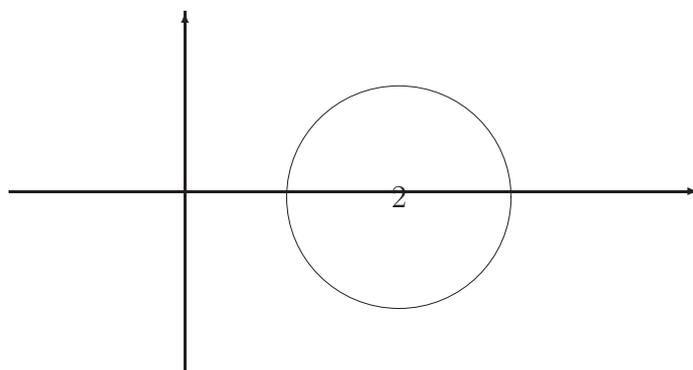


Figura 13.1: Contorno de integração

**Exemplo 56** Calcule  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$  onde  $\gamma(t) = 2 + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

Veja que  $\frac{1}{z} = (z - 0)^{-1}$  mas o centro de  $\gamma$  é o número 2 (o raio é 1), ou seja, este exemplo não é um caso particular do exemplo anterior.

Assim  $\frac{1}{z}$  é contínua numa região contendo o traço de  $\gamma$ .

Sabemos que qualquer ramo do logaritmo satisfaz  $(\log z)' = \frac{1}{z}$ . Como a curva sobre a qual estamos integrando fica no semiplano  $x > 0$ , tomaremos um ramo do logaritmo denotado por  $\log$ , pela restrição  $-\pi < \theta < \pi$ . Desta forma, a função  $\varphi(t) = \log(2 + e^{it}), 0 \leq t \leq 2\pi$  é bem definida e suave.

Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2 + e^{it}} i e^{it} = \frac{i e^{it}}{2 + e^{it}}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}}{2 + e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} \varphi'(t) dt = \\ \varphi(2\pi) - \varphi(0) &= \log(2 + e^{2\pi i}) - \log(2 + e^{0i}) = \log 3 - \log 3 = 0. \end{aligned}$$

□

**Definição 22** Se  $\gamma[a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$  é um caminho formado pela justaposição das curvas suaves  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua, definimos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

**Observação 20** A propriedade enunciada na proposição 23 continua válida para caminhos.

**Exemplo 57** Calcule  $\int_{\gamma} z dz$  onde o traço de  $\gamma$  é o triângulo de vértices 0, 1 e  $i$  percorrido no sentido anti-horário.

Parametrizando cada um dos lados do triângulos por

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= t, 0 \leq t \leq 1, \\ \gamma_2(t) &= 1 - t + it, 0 \leq t \leq 1, \\ \gamma_3(t) &= (1 - t)i, 0 \leq t \leq 1,\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} z dz &= \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \\ \int_{\gamma_2} z dz &= \int_0^1 (1 - t + it)(-1 + i) dt = \int_0^1 (t - 1 - t) dt + i \int_0^1 (1 - t - t) dt \\ &= - \int_0^1 dt + i \int_0^1 (1 - 2t) dt = -1 + i(t - t^2)|_0^1 = -1 \\ \int_{\gamma_3} z dz &= \int_0^1 (1 - t)i(-i) dt = \int_0^1 (1 - t) dt = t - \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\int_{\gamma} z dz = \int_{\gamma_1} z dz + \int_{\gamma_2} z dz + \int_{\gamma_3} z dz = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0.$$

□

**Definição 23** Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é uma curva suave, definimos o comprimento de  $\gamma$  por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Se  $\gamma$  é um caminho obtido pela justaposição das curvas suaves  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , definimos o seu comprimento por

$$\ell(\gamma) = \sum_{j=1}^n \ell(\gamma_j).$$

**Exemplo 58** Encontre o comprimento da cardióide  $\gamma(t) = (1 + \cos t)e^{it}$ .

Temos,

$$\gamma'(t) = -\operatorname{sen} t e^{it} + i(1 + \cos t)e^{it} = e^{it}(-\operatorname{sen} t + i(1 + \cos t))$$

e

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + (1 + \cos t)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos t}.$$

Assim, devido à simetria da cardióide,

$$\ell(\gamma) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt =$$

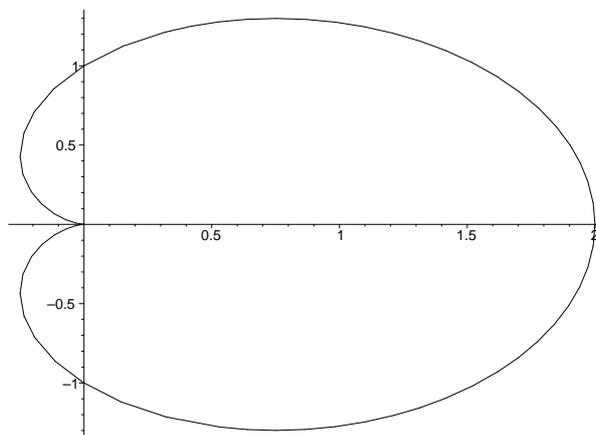


Figura 13.2: Cardióide:  $\gamma(t) = (1 + \cos t)e^{it}$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{\frac{(1 + \cos t)(1 - \cos t)}{1 - \cos t}} dt = \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^\pi \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\sqrt{1 - \cos t}} dt = 2\sqrt{2} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin^2 t}}{\sqrt{1 - \cos t}} dt = \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^\pi \frac{|\sin t|}{\sqrt{1 - \cos t}} dt = 2\sqrt{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \cos t}} dt = \\
 &= 4\sqrt{2} \int_0^\pi \frac{d}{dt} \sqrt{1 - \cos t} dt = 4\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} \Big|_0^\pi = \\
 &= 4\sqrt{2}(\sqrt{2} - 0) = 8.
 \end{aligned}$$

**Proposição 25** Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$  é um caminho e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua, então

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| \ell(\gamma),$$

onde  $\gamma^*$  é o traço de  $\gamma$ .

Em particular, se  $|f(z)| \leq M$ , para todo  $z \in \Omega$  então,

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq M \ell(\gamma).$$

**Prova:** Se  $\gamma$  é o caminho obtido pela justaposição das curvas suaves  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  então

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| = \left| \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{\gamma_j} f(z) dz \right|.$$

Assim, basta mostrar a proposição quando  $\gamma$  é uma curva suave.

Como  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  é contínua, o seu traço  $\gamma^*$  é um conjunto compacto.

Como a função  $g : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(z) = |f(z)|$  também é contínua e  $\gamma^*$  é compacto então ela atinge um máximo em  $\gamma^*$ , que denotaremos por  $m = \max_{z \in \gamma^*} g(z) = \max_{z \in \gamma^*} |f(z)|$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \int_a^b m |\gamma'(t)| dt \\ &= m \int_a^b |\gamma'(t)| dt = m \ell(\gamma). \end{aligned}$$

■

**Exemplo 59** Utilize a proposição 25 para obter uma estimativa da integral  $\int_{\gamma} z^n dz$  onde  $n \in \mathbb{Z}$  e  $\gamma(t) = Re^{it}$ ,  $R > 0$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

Precisamos saber o comprimento da curva e o máximo de  $|z^n|$  sobre o seu traço. Ora, o comprimento é  $\pi R$  e para todo  $0 \leq t \leq \pi$ , temos  $|(Re^{it})^n| = R^n |e^{int}| = R^n$ . Assim,

$$\left| \int_{\gamma} z^n dz \right| \leq R^n \pi R = \pi R^{n+1}.$$

Observe que se  $n \leq -2$  então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} z^n dz = 0.$$

**Exemplo 60** Idem para

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^4 + 1} dz, \text{ onde } \gamma(t) = Re^{it}, \text{ } 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ } R > 1.$$

Sobre o traço de  $\gamma$ , a função  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$  pode ser majorada como segue:

$$|f(\gamma(t))| = |f(Re^{it})| = \frac{1}{|R^4 e^{4it} + 1|} \leq \frac{1}{||R^4 e^{4it}| - 1|} = \frac{1}{|R^4 - 1|} = \frac{1}{R^4 - 1}$$

onde foi usada a seguinte versão da desigualdade triangular:  $||a| - |b|| \leq |a + b|$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{C}$ .

Desta forma,

$$\left| \int_{\gamma} \frac{1}{z^4 + 1} dz \right| \leq \frac{1}{R^4 - 1} \ell(\gamma) = \frac{2\pi R}{R^4 - 1}.$$

# Capítulo 14

## O Teorema de Cauchy-Goursat

Neste capítulo faremos uso do Teorema de Green como visto em Cálculo III.

**Teorema 5 (Teorema de Green)** *Sejam  $\gamma$  um contorno orientado no sentido anti-horário e  $R$  o seu interior. Se  $P$  e  $Q$  são funções de classe  $C^1$  definidas em  $\bar{R}$  então*

$$\int_{\gamma} Pdx + \int_{\gamma} Qdy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

**Observação 21**  $\bar{R} = R \cup \partial R$

**Teorema 6 (Teorema de Cauchy-Goursat)** *Sejam  $\gamma$  e  $R$  como no enunciado do Teorema de Green. Se  $f$  é uma função analítica definida em um aberto contendo  $\bar{R}$  então*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

**Prova:** A demonstração que faremos será somente no caso em que  $f$  é de classe  $C^1$ . Esta parte é devida a Cauchy. A parte sem a hipótese de  $f$  ser de classe  $C^1$  é bem mais elaborada e é creditada a Goursat.

Coloque  $u = \Re f$  e  $v = \Im f$ . Aplicando o teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx - udy = \\ &= \iint_R \left( \frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_R \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = \\ &= - \iint_R \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_R \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0 \end{aligned}$$

pois, pelas equações de Cauchy-Riemann,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ .

■

**Exemplo 61** Calcule  $\int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz$  onde  $\gamma = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Como o contorno  $\gamma$  delimita a região  $R = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$  e  $f(z) = \frac{1}{z-2}$  é claramente analítica em  $\bar{R} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ , obtemos

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz = 0$$

**Exemplo 62** Calcule  $\int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz$  onde  $\gamma = 2 + e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Note que, agora, a função  $f$  não está definida em toda a região delimitada por  $\gamma$ . Basta observar que  $2 \in \{z \in \mathbb{C}; |z-2| \leq 1\}$ .

Desta maneira, o teorema de Cauchy-Goursat não se aplica. Devemos, assim, calcular a integral usando apenas a definição. Temos

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

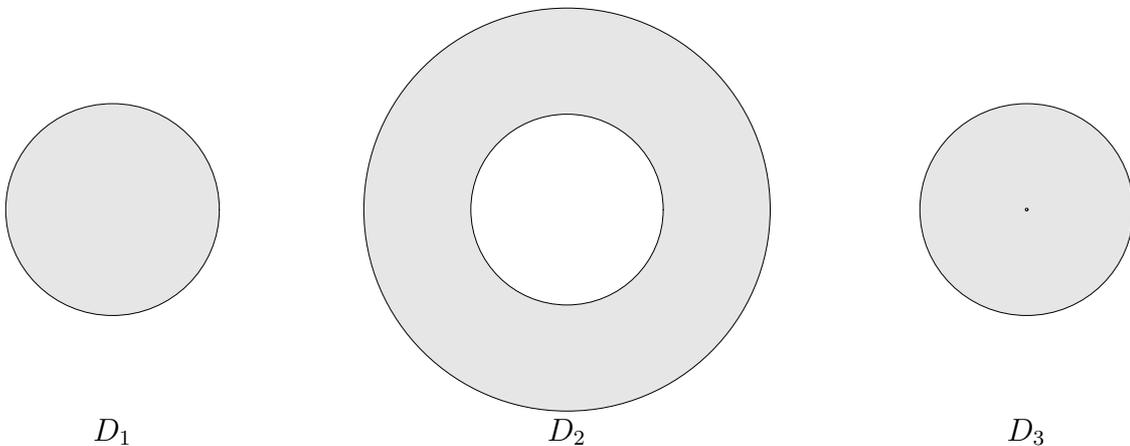
O teorema de Cauchy-Goursat se aplica a regiões mais gerais do que aquelas dadas por interior de contornos. Mais precisamente, ele continua válido para regiões simplesmente conexas, que passamos a definir.

**Definição 24** Seja  $D$  um aberto conexo. Dizemos que  $D$  é simplesmente conexo se o interior de qualquer contorno contido em  $D$ , está contido em  $D$ .

**Observação 22** Grosso modo, um conjunto simplesmente conexo não apresenta buracos.

**Exemplo 63** Considere os conjuntos:

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}, \quad D_2 = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 3\} \quad e \quad D_3 = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}.$$



Todos os três conjuntos são abertos e conexos. No entanto, somente  $D_1$  é simplesmente conexo. Observe que embora o contorno  $\gamma_1(t) = 2e^{it}$  esteja contido em  $D_2$ , os seu interior,  $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 2\}$  não está. O mesmo acontece em  $D_3$  com o contorno  $\gamma_2(t) = \frac{1}{2}e^{it}$ .

**Exemplo 64** O plano complexo é simplesmente conexo.

Com esta nova linguagem, temos:

**Teorema 7** (Teorema de Cauchy-Goursat) Seja  $D$  um conjunto simplesmente conexo. Se  $f$  é analítica em  $D$  então para qualquer contorno  $\gamma$  contido em  $D$  temos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

**Exemplo 65** Se  $n \in \mathbb{N}$  então  $\int_{\gamma} z^n dz = 0$ , para qualquer contorno  $\gamma$ . Em particular, tomando-se  $n = 2$  vemos que

$$\int_{\gamma} (x^2 - y^2)dx - 2xydy = \int_{\gamma} 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

para qualquer contorno.

## 14.1 Independência do Caminho

**Definição 25** Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. Dizemos que a integral de  $f$  independe do caminho se para quaisquer dois caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$  tais que  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$  tem-se

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

**Observação 23** Se a integral de  $f$  independe do caminho, usaremos a notação

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$

para designar a integral de  $f$  ao longo de qualquer caminho contido em  $\Omega$  que una os pontos  $z_0$  a  $z_1$ , nesta ordem.

**Teorema 8** Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. São equivalentes:

- (i)  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  para qualquer caminho fechado contido em  $\Omega$ ;
- (ii) A integral de  $f$  independe do caminho.

**Prova:** Suponha que (i) seja válido. Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$  são dois caminhos tais que  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$  então  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  dado por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t - a), & \text{se } a \leq t \leq \frac{a+b}{2} \\ \gamma_2(a + 2b - 2t), & \text{se } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases}$$

é um caminho fechado. Logo,  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ .

Mas

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

pois  $\gamma_2$  é percorrida de  $\gamma_2(a)$  a  $\gamma_2(b)$ . Assim

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Reciprocamente, suponha que (ii) seja válida. Se  $\gamma$  é um caminho fechado vemos que

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t), \quad a \leq t \leq b$$

tem o mesmo traço de  $\gamma$ , porém é percorrido no sentido oposto.

Além do mais, como  $\gamma$  é fechada,  $\tilde{\gamma}$  também é. Assim,

$$\tilde{\gamma}(a) = \gamma(b) = \gamma(a) \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}(b) = \gamma(a) = \gamma(b).$$

Logo, por (ii),

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz. \quad (14.1)$$

Mas, já sabemos que se invertermos o sentido do percurso da curva, a integral muda de sinal. Assim,

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz. \quad (14.2)$$

Comparando as equações 14.1 e 14.2 obtemos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

■

**Observação 24** O teorema de Cauchy-Goursat (veja 7) continua válido se a integral for feita sobre caminhos fechados (lembre que um contorno é um caminho fechado simples).

Juntando a observação acima e o teorema 8 obtemos:

**Teorema 9** Seja  $\Omega$  um conjunto simplesmente conexo. Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é analítica então a integral de  $f$  independe do caminho.

**Exemplo 66** Calcule  $\int_{\gamma} e^z dz$  onde  $\gamma$  é uma poligonal que liga o ponto  $z = 0$  a  $z = i$ .

Como  $f(z) = e^z$  é uma função inteira podemos substituir a poligonal por qualquer outro caminho que ligue  $z = 0$  a  $z = i$ .

Por exemplo,  $\gamma_1(t) = it$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Temos:

$$\int_{\gamma_1} e^z dz = \int_0^1 e^{it} i dt = e^{it} \Big|_0^1 = e^i - 1.$$

# Capítulo 15

## Primitiva

**Definição 26** Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Dizemos que  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é uma primitiva de  $f$  se  $F'(z) = f(z)$  para todo  $z \in \Omega$ .

**Teorema 10** Se  $\Omega$  é um conjunto simplesmente conexo e  $f$  é uma função analítica em  $\Omega$  então, fixado  $z_0 \in \Omega$ , a função

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega$$

é uma primitiva de  $f$ .

**Prova:** Como  $\Omega$  é simplesmente conexo e  $f$  é analítica, a função  $F$  está bem definida, pois a integral de  $f$  independe do caminho.

Queremos mostrar que para cada  $z \in \Omega$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Fixemos  $z_0 \in \Omega$  e tomemos  $h \in \mathbb{C}$  tal que o segmento ligando  $z$  até  $z+h$  esteja contido em  $\Omega$ .

Lembrando que  $F(z+h)$  representa a integral de  $f$  de  $z_0$  até  $z+h$  e que  $F(z)$  é a integral de  $f$  de  $z_0$  até  $z$ , então, a diferença  $F(z+h) - F(z)$  representa a integral de  $f$  de  $z$  até  $z+h$ , isto é,

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta.$$

Como a integral acima independe do caminho, podemos escolher como caminho o segmento que liga  $z$  até  $z+h$ , isto é,

$$\gamma(t) = z + th, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Como  $\int_z^{z+h} d\zeta = h$  (exercício), podemos escrever

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} |F(z+h) - F(z) - hf(z)| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_z^{z+h} f(z) d\zeta \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|h|} \left| \int_{\gamma} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| \leq \frac{1}{|h|} \max_{0 \leq t \leq 1} |f(\gamma(t)) - f(z)| \ell(\gamma) \\
&= \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z + th) - f(z)|,
\end{aligned} \tag{15.1}$$

pois  $\ell(\gamma) = |\gamma|$ .

Como  $f$  é contínua, dado  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que para todo  $|w| < \delta$  temos  $|f(z + w) - f(z)| < \varepsilon$ .

Assim, se tomarmos  $h$  tal que  $|h| < \delta$  então  $w = th$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , satisfaz  $|w| = |th| \leq |h| < \delta$  e, portanto,  $|f(z + w) - f(z)| < \varepsilon$ .

Assim segue de 15.1

$$\left| \frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon$$

sempre que  $|h| < \delta$ , ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} = f(z).$$

■

**Corolário 5** *Sejam  $\Omega$  um conjunto simplesmente conexo e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Então, fixado  $z_0 \in \Omega$  a função  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega$$

*é analítica.*

**Prova:** Pelo teorema anterior, a derivada de  $F$  existe em todo  $\Omega$  (e é igual a  $f$ ). Logo,  $F$  é analítica em  $\Omega$ .

■

**Proposição 26** *Sejam  $\Omega$  um conjunto simplesmente conexo e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Se  $F$  e  $G$  são primitivas de  $f$  então a diferença entre  $F$  e  $G$  é constante. Em particular, dado  $z_0 \in \Omega$  existe  $C \in \mathbb{C}$  tal que*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C.$$

**Prova:** Seja  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $H(z) = F(z) - G(z)$ .

Como  $H'(z) = F'(z) - G'(z) = f(z) - f(z) = 0$  e  $\Omega$  é conexo, segue de 19 que  $H(z)$  é constante.

Quanto à outra conclusão, basta lembrar que

$$z \mapsto \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

é primitiva de  $f$ . Portanto,  $F(z) - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = C$  para alguma constante  $C$ . Além do mais, tomando  $z = z_0$ , vemos que  $C = F(z_0)$ .

■

**Observação 25** Segue do Teorema 10 e da Proposição 26 que toda primitiva de uma função analítica definida em um conjunto simplesmente conexo é da forma  $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C$ , para algum  $z_0 \in \Omega$  e algum  $C \in \mathbb{C}$ .

**Proposição 27** Sejam  $\Omega$  um conjunto simplesmente conexo e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica. Se  $F$  é uma primitiva de  $f$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  é um caminho então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

**Prova:** Sabemos que  $F$  pode ser escrita como

$$F(z) = \int_{\gamma(a)}^z f(\zeta) d\zeta + C,$$

com  $C = F(\gamma(a))$ . Também é sabido que a integral de  $f$  independe do caminho. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(z) dz = \\ &= \left[ \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(z) dz + C \right] - C = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

■

**Exemplo 67** Calcule  $\int_{\gamma} e^{z^2} z dz$  onde  $\gamma(t) = (1 + \cos t)e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

Como  $\frac{d}{dz}(\frac{1}{2}e^{z^2}) = e^{z^2}z$ , temos que  $F(z) = \frac{1}{2}e^{z^2}$  é uma primitiva de  $f(z) = e^{z^2}z$ .

Assim,

$$\int_{\gamma} e^{z^2} z dz = \frac{1}{2}e^{z^2} \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(\pi)} = \frac{1}{2}e^{z^2} \Big|_2^0 = \frac{1 - e^4}{2}.$$

**Exemplo 68** Seja  $\Omega$  um conjunto simplesmente conexo que não contém a origem. Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um caminho então

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \log(\gamma(b)) - \log(\gamma(a)). \quad (15.2)$$

Em particular se  $\gamma$  é fechada,  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0$ .

Isto segue do fato que a função  $\log z$  é uma primitiva de  $\frac{1}{z}$  definida no conjunto simplesmente conexo  $\Omega$ . Porém, se  $\Omega$  contiver a origem, a fórmula 15.2 deixa de ser válida. Basta lembrar que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

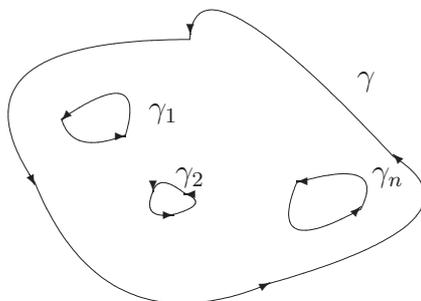


Figura 15.1: Integração sobre região que não é simplesmente conexa

**Observação 26** *O mesmo resultado do exemplo 68 é válido para a função  $\frac{1}{z-a}$  se o contorno  $\gamma$  não contiver o ponto  $a$  no seu interior. Neste caso, a primitiva é  $\log(z-a)$ .*

Vejamos agora como podemos proceder com a integração sobre um contorno  $\gamma$ , no caso em que a função a ser integrada não é necessariamente analítica em todo o interior de  $\gamma$ .

Considere um contorno  $\gamma$  e  $n$  contornos  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) cada  $\gamma_j$  está contido no interior de  $\gamma$ ;
- ii) se  $j_1 \neq j_2$  então  $\gamma_{j_1}$  está contido no exterior de  $\gamma_{j_2}$ .

Seja  $R$  a região obtida do interior de  $\gamma$  eliminando-se cada  $\gamma_j$  bem como o seu interior. Note que a fronteira de  $R$  é a reunião dos contornos  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ .

Se  $f$  é uma função analítica definida em um aberto contendo  $\overline{R}$  e se  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  são percorridos no sentido anti-horário então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz. \quad (15.3)$$

A prova deste fato requer mais ferramentas do que dispomos neste curso. No entanto, é facilmente visualizada pelas figuras 15 e 15 onde separamos a região  $R$  em duas partes simplesmente conexas.

A fronteira de cada uma destas partes é um contorno e a função  $f$  é analítica sobre ela e o seu interior. Assim, a integral de  $f$  ao longo de cada um destes dois contornos no sentido anti-horário se anula. Somando as duas integrais, observamos que o resultado é uma soma de integrais ao longo de  $\gamma$  (no sentido anti-horário) e de  $\gamma_j$  (no sentido horário),  $j = 1, \dots, n$ .

Ao revertermos a ordem do processo das integrais sobre  $\gamma_j$ , obtemos o resultado.

**Exemplo 69** *Seja  $\gamma$  um contorno contendo no seu interior o ponto  $a \in \mathbb{C}$ , percorrido no sentido anti-horário. Verifique que*

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

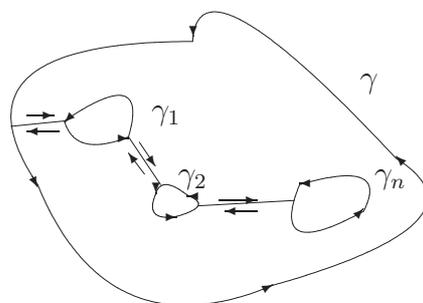
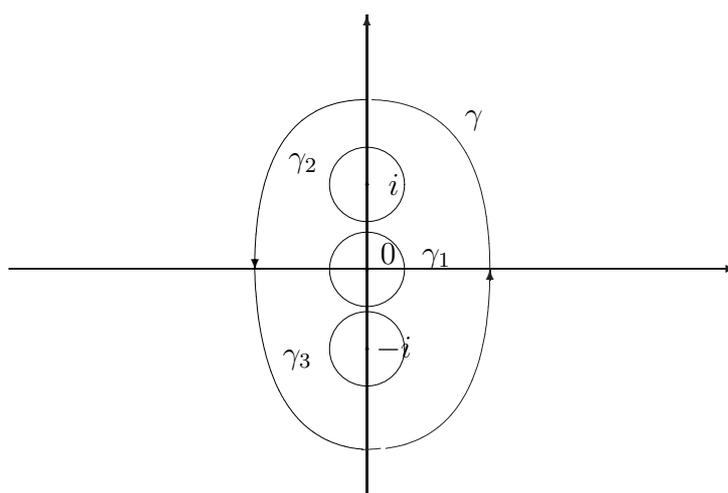


Figura 15.2: Subdividindo a região em duas simplesmente conexas



Vamos retirar do interior de  $\gamma$  um disco fechado, centrado em  $a$  e de raio  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno.

Nesta nova região, a função  $f(z) = \frac{dz}{z-a}$  é analítica e por 15.3 temos

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{dz}{z-a}$$

onde  $\gamma_{\varepsilon}(t) = a + \varepsilon e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Logo,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon e^{it} i dt = 2\pi i.$$

**Exemplo 70** Calcule

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2+1)} dz$$

onde  $\gamma$  é a elipse  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ , percorrida no sentido anti-horário.

Do interior da elipse retiramos três conjuntos fechados de raio  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, centrado nos pontos  $0$ ,  $i$  e  $-i$ .

Neste novo domínio a função  $\frac{1}{z(z^2+1)}$  é analítica e

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z(z^2+1)} dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz + \int_{\gamma_3} \frac{1}{z(z^2+1)} dz$$

onde  $\gamma_1(t) = \varepsilon e^{it}$ ,  $\gamma_2(t) = i + \varepsilon e^{it}$ ,  $\gamma_3(t) = -i + \varepsilon e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Usando frações parciais, temos

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+i} - \frac{1}{2} \frac{1}{z-i}.$$

Temos

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz - \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z+i} dz - \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-i} dz.$$

Usando o Exemplo 68 e a Observação 26, vemos que

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i, \quad e \quad \int_{\gamma_1} \frac{1}{z+i} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-i} dz = 0.$$

Analogamente,

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z+i} dz = 0, \quad e \quad \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-i} dz = 2\pi i.$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_3} \frac{1}{z-i} dz = 0, \quad e \quad \int_{\gamma_3} \frac{1}{z+i} dz = 2\pi i.$$

Reagrupando os resultados, obtemos

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i - \frac{1}{2} 2\pi i - \frac{1}{2} 2\pi i = 0.$$

# Capítulo 16

## A fórmula de Cauchy

**Teorema 11 (Fórmula de Cauchy)** *Sejam  $\Omega$  um conjunto simplesmente conexo,  $\gamma$  um contorno contido em  $\Omega$  orientado no sentido anti-horário. Se  $f$  é uma função analítica em  $\Omega$  então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (16.1)$$

para todo  $z_0$  contido no interior de  $\gamma$ .

**Prova:** Como o interior do contorno  $\gamma$  é um conjunto aberto, existe  $r_0 > 0$  tal que para todo  $0 < r < r_0$  o círculo centrado em  $z_0$  de raio  $r$  também está contido no interior de  $\gamma$ .

Coloque  $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Como a função  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  é analítica em  $\Omega \setminus z_0$ , segue de 15.3 que

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z - z_0} dz = \\ &= \int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) \int_{\gamma_r} \frac{1}{z - z_0} dz = \\ &= \int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) 2\pi i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) 2\pi i \right| &= \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \\ &= \left| \int_a^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it}) - f(z_0)}{re^{it}} rie^{it} dt \right| = \\ &= \left| \int_0^{2\pi} (f(z_0 + re^{it}) - f(z_0)) dt \right| \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^{2\pi} |(f(z_0 + re^{it}) - f(z_0))| dt.$$

Como  $f$  é contínua em  $z_0$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|z - z_0| < \delta$  implica em  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon/2\pi$ .

Deste modo, tomando  $r$  menor do que  $r_0$  e  $\delta$  vemos que  $w = z_0 + re^{it}$  satisfaz, para todo  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $|w - z_0| = |re^{it}| = r < \delta$ .

Logo,  $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon/2\pi$ , isto é,  $|f(z_0 + re^{it}) - f(z_0)| < \varepsilon/2\pi$ .

Desta maneira,

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0)2\pi i \right| \leq \int_0^{2\pi} |(f(z_0 + re^{it}) - f(z_0))| dt < \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2\pi} dt = \varepsilon. \quad (16.2)$$

Como a primeira expressão de 16.2 não depende de  $\varepsilon$ , vemos que

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)2\pi i,$$

que após a divisão por  $2\pi i$  é a fórmula desejada. ■

**Exemplo 71** Se  $\gamma$  é um contorno que contém  $z_0$  no seu interior e percorrido no sentido anti-horário então tomando  $f(z) = 1$  na fórmula de Cauchy, obtemos um resultado que já nos é familiar:

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz, \text{ isto é, } \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

**Exemplo 72** Seja  $\gamma$  é um contorno que contém  $z_0$  no seu interior. Calcule  $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz$ ,  $\gamma$  percorrido no sentido anti-horário. Basta tomar  $f(z) = \cos z$  e  $z_0 = 0$  na fórmula de Cauchy. Obtemos

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i.$$

**Exemplo 73** Vamos refazer o cálculo da integral  $\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2+1)} dz$  onde  $\gamma$  é a elipse  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  percorrida no sentido anti-horário, fazendo uso da fórmula de Cauchy.

Como não é possível colocar a função  $\frac{1}{z(z^2+1)}$  na forma  $\frac{f(z)}{z-z_0}$ , com  $f$  analítica no interior da elipse e para algum  $z_0$ , (veja que a única possibilidade seria  $f(z) = \frac{z-z_0}{z(z^2+1)}$  que não é analítica no interior da elipse mesmo quando  $z_0$  é tomado dentre um dos valores de  $0, i, -i$ ).

Vamos percorrer a elipse como mostra a figura abaixo

Devido aos cancelamentos das integrais calculadas nos arcos que se encontram no interior da elipse (cada um deles é percorrido duas vezes, porém em sentidos opostos), temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2+1)} dz &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{z(z^2+1)} dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz + \int_{\gamma_3} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z-i} dz + \int_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{z} dz + \int_{\gamma_3} \frac{f_3(z)}{z+i} dz, \end{aligned}$$

onde  $f_1(z) = \frac{1}{z(z+i)}$ ,  $f_2(z) = \frac{1}{z^2+1}$  e  $f_3(z) = \frac{1}{z(z-i)}$  são analíticas sobre  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  e seus interiores, respectivamente.

Desse modo, podemos aplicar a fórmula de Cauchy em cada uma das integrais, obtendo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2+1)} dz &= 2\pi i f_1(i) + 2\pi i f_2(0) + 2\pi i f_3(-i) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{-1}{2}\right) + 2\pi i + 2\pi i \left(\frac{-1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

A integral  $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$ , onde  $\gamma$  é um contorno contendo a origem no seu interior, não pode ser tratada diretamente usando a fórmula de Cauchy. A razão para isto é que se colocarmos  $\frac{1}{z^2} = \frac{z-z_0}{z-z_0}$ , a função  $f(z) = \frac{z-z_0}{z^2}$  não é analítica no interior de  $\gamma$  para qualquer escolha de  $z_0$ . Note que nem mesmo a escolha  $z_0 = 0$  é útil aqui, tampouco é possível usar de argumentos como no exemplo anterior, em que percorremos a curva  $\gamma$  usando três curvas auxiliares. A diferença aqui é que a função  $\frac{1}{z^2}$  só não está definida em  $z = 0$  enquanto que  $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z+i)(z-i)}$  não está definida para mais de um ponto (daí o uso de curvas auxiliares) e as raízes de  $z(z+i)(z-i)$  são todas simples (a raiz de  $z^2$  é dupla).

O teorema 12, que fornece uma generalização da fórmula de Cauchy, será útil para tratar integrais como, por exemplo,  $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$ .

**Teorema 12 (Fórmula de Cauchy para derivadas)** *Sejam  $\Omega$ ,  $\gamma$ ,  $f$  e  $z_0$  como no teorema 16.1. Então  $f$  possui todas as derivadas em  $z_0$  e a  $n$ -ésima derivada é dada por*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad (16.3)$$

onde  $\gamma$  é percorrido no sentido anti-horário.

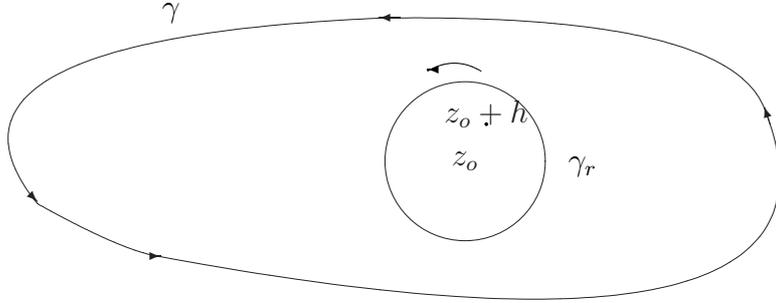
**Prova:** Mostremos o caso  $n = 1$ .

Precisamos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz.$$

Pela fórmula de Cauchy, para  $h \neq 0$  suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [f(z_0+h) - f(z_0)] &= \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0-h)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_{\gamma} f(z) \left[ \frac{1}{(z-z_0-h)} - \frac{1}{(z-z_0)} \right] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_{\gamma} f(z) \frac{h}{(z-z_0-h)(z-z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)} dz. \end{aligned}$$



Deste modo,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h}[f(z_0 + h) - f(z_0)] - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)[z - z_0 - (z - z_0 - h)]}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} dz = \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} dz = \\
 &= \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} dz \tag{16.4}
 \end{aligned}$$

onde  $\gamma_r$  é um círculo contido no interior de  $\gamma$ , centrado em  $z_0$  de raio  $r$  contendo o ponto  $z_0 + h$  no seu interior,  $\gamma_r$  é percorrido no sentido anti-horário.

Assim se  $0 < |h| < \frac{r}{2}$ , e  $|z - z_0| < r$

$$\begin{aligned}
 |(z - z_0 - h)(z - z_0)^2| &= |z - z_0 - h||z - z_0|^2 = \\
 &= |z - z_0 - h| \geq (|z - z_0| - |h|)r^2 = \\
 &(r - |h|)r^2 > (r - \frac{r}{2})r^2 = \frac{r^3}{2}
 \end{aligned}$$

e daí,

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} \right| \leq \frac{|f(z)|}{|(z - z_0 - h)(z - z_0)^2|} \leq \frac{2M}{r^3},$$

onde  $M$  é o máximo de  $|f(z)|$  sobre o círculo  $|z - z_0| = r$  ( $\gamma_r$ ).

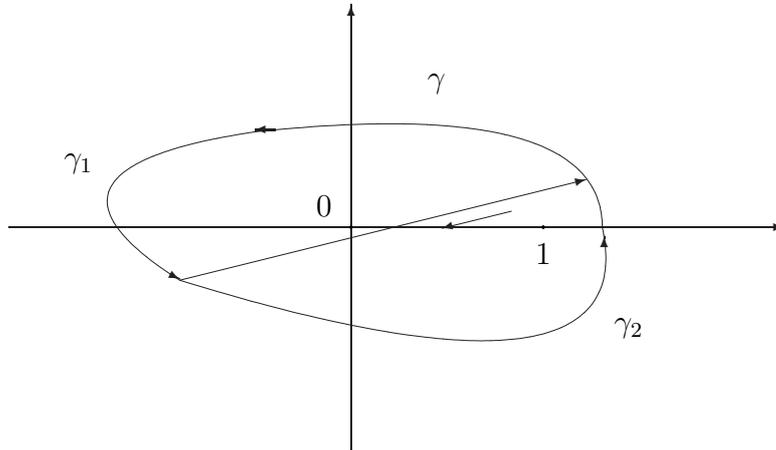
Com isto, obtemos de [16.4](#)

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{h}[f(z_0 + h) - f(z_0)] - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| &\leq \frac{|h|}{2\pi} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} dz \right| \\
 &\leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{2M}{r^3} \ell(\gamma) = \frac{M\ell(\gamma)}{r^3} |h|
 \end{aligned}$$

que tende a zero quando  $h$  tende a zero.

Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$



A prova do caso  $n \geq 2$  segue os passos da prova que acabamos de mostrar, com adaptações apropriadas. ■

**Corolário 6** *Toda função analítica é de classe  $C^\infty$ .*

**Prova:** Dados  $n \in \mathbb{N}$  e  $f$  analítica, segue do teorema anterior que  $f^{(n+1)}$  existe em todo o domínio de  $f$ . Conseqüentemente, a função  $f^{(n)}$  é contínua (por ser derivável). ■

**Corolário 7** *A derivada de uma função analítica é também analítica.*

**Exemplo 74** *Seja  $\gamma$  um contorno que envolve a origem. A integral  $\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz$  pode ser calculada usando-se a fórmula 16.3 com  $f(z) = 1$  e  $z_0 = 0$ , obtendo*

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i 0 = 0.$$

**Exemplo 75** *Calcule  $\int_\gamma \frac{z+1}{z^3(z-1)} dz$  onde  $\gamma$  é um contorno percorrido no sentido anti-horário e que envolve os pontos  $z = 0$  e  $z = 1$ .*

*Se tomarmos os contornos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  como na figura 75 então*

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{z+1}{z^3(z-1)} dz &= \int_{\gamma_1} \frac{z+1}{z^3(z-1)} dz + \int_{\gamma_2} \frac{z+1}{z^3(z-1)} dz = \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z^3} dz + \int_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{(z-1)} dz, \end{aligned}$$

onde  $f_1(z) = \frac{z+1}{z-1}$  e  $f_2(z) = \frac{z+1}{z^3}$ .

*Usando a fórmula de Cauchy para derivada, calculamos*

$$\int_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f_1''(0) = \pi i f_1''(0).$$

Mas,  $f_1'(z) = \frac{-2}{(z-1)^2}$  e  $f_1''(z) = \frac{4}{(z-1)^3}$ .

Logo,

$$\int_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z^3} dz = \pi i(-4) = -4\pi i.$$

Agora,

$$\int_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{(z-1)} dz = 2\pi i f_2(1) = 4\pi i.$$

Portanto,

$$\int_{\gamma} \frac{z+1}{z^3(z-1)} dz = -4\pi i + 4\pi i = 0.$$

**Teorema 13 (Morera)** *Sejam  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  contínua e  $\Omega$  simplesmente conexo. Se a integral de  $f$  independe do caminho ou, equivalentemente, a integral de  $f$  se anula sobre qualquer caminho fechado contido em  $\Omega$ , então  $f$  é analítica.*

**Prova:** Fixado  $z_0$ , a função

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega$$

está bem definida em  $\Omega$ .

Mostremos que  $F'(z) = f(z)$ . Para isto, procedemos como na prova do teorema 10. Temos

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta.$$

Como a integral acima independe do caminho, podemos escolher como caminho o segmento que liga  $z$  até  $z+h$ , isto é,

$$\gamma(t) = z + th, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Como  $\int_z^{z+h} d\zeta = h$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} |F(z+h) - F(z) - hf(z)| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_z^{z+h} f(z) d\zeta \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{\gamma} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| \leq \frac{1}{|h|} \max_{0 \leq t \leq 1} |f(\gamma(t)) - f(z)| \ell(\gamma) \\ &= \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z+th) - f(z)|, \end{aligned} \tag{16.5}$$

pois  $\ell(\gamma) = |\gamma|$ .

Como  $f$  é contínua, dado  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que para todo  $|w| < \delta$  temos  $|f(z+w) - f(z)| < \varepsilon$ .

Assim, se tomarmos  $h$  tal que  $|h| < \delta$  então  $w = th$ ,  $a \leq t \leq 1$ , satisfaz  $|w| = |th| \leq |h| < \delta$  e, portanto,  $|f(z+w) - f(z)| < \varepsilon$ .

Assim segue de 16.5

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon$$

sempre que  $|h| < \delta$ , ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Pelo Corolário 7,  $F'(z) = f(z)$  também é analítica em  $\Omega$ . ■

**Teorema 14 (Liouville)** *Se  $f$  é uma função inteira e limitada então  $f$  é constante.*

**Prova:** Seja  $M$  tal que  $|f(z)| \leq M$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Tomando  $\gamma(t) = z + Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , temos

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\zeta \in \gamma^*} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| \ell(\gamma)$$

mas  $\ell(\gamma) = 2\pi R$  e para  $\zeta \in \gamma^*$ , isto é,  $|\zeta - z| = R$ , temos

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} = \frac{|f(\zeta)|}{R^2} \leq \frac{M}{R^2}.$$

Logo,

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R},$$

que tende a zero quando  $R$  tende a  $+\infty$ .

Desta forma,  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Segue daí que  $f(z)$  é constante. ■

**Teorema 15 (Teorema fundamental da álgebra)** *Todo polinômio não constante possui uma raiz em  $\mathbb{C}$ .*

**Prova:** Seja  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio. Suponha que  $p(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

A função  $f(z) = \frac{1}{p(z)}$  é inteira. Mostremos que  $f$  também é limitada.

Escrevendo  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ , com  $a_n \neq 0$  vemos que para  $z = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ , temos

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |a_n z^n| \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \\ &\geq |a_n| r^n \left[ 1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n| r} - \dots - \frac{|a_1|}{|a_n| r^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|a_n| r^n} \right]. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n| r} - \dots - \frac{|a_1|}{|a_n| r^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|a_n| r^n} \right] = 1,$$

existe  $R_0$  tal que  $\forall R > R_0$  implica em

$$1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|R} - \dots - \frac{|a_1|}{|a_n|R^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|a_n|R^n} > \frac{1}{2}.$$

Logo, para  $|z| > R_0$ , temos

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} < \frac{2}{|a_n||z|^n} < \frac{2}{|a_n|R_0^n}.$$

Como  $f$  é contínua, também é limitada para todo  $|z| \leq R_0$ . Logo,  $f$  é limitada em  $\mathbb{C}$ .

Pelo Teorema de Liouville [14](#),  $f$  deve ser constante e, portanto,  $p$  também é constante. Isto é uma contradição.

Portanto, existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $p(z_0) = 0$ .

■

# Capítulo 17

## Funções Harmônicas

Considere  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , uma função analítica. Sabemos que  $f$  é de classe  $C^\infty$ , isto é, possui derivadas de qualquer ordem em  $\Omega$ . Segue daí que as funções  $u = \Re f$  e  $v = \Im f$  também são de classe  $C^\infty$  em  $\Omega$ .

Como  $f$  é analítica,  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{em } \Omega.$$

Derivando a primeira das equações acima com relação a  $x$  e a segunda com relação a  $y$ , obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \text{em } \Omega.$$

Somando-se ambas as equações,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

pois  $v$  tem derivadas parciais de segunda ordem contínua.

Vemos, assim, que  $u$  satisfaz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

A equação acima é chamada de equação de Laplace e uma função de classe  $C^2$  que a satisfaça é dita harmônica.

**Exercício 14** Prove que  $v = \Im f$ ,  $f$  analítica, é também uma função harmônica.

**Exemplo 76** As funções

$$u_1(x, y) = x^2 - y^2 = \Re z^2, \quad u_2(x, y) = e^x \cos y = \Re e^z \quad \text{e} \quad u_3(x, y) = \cosh y \cos x = \Re \cos z$$

são exemplos de funções harmônicas em  $\mathbb{C}$ .

**Exemplo 77** Não existe função analítica cuja parte real seja  $u(x, y) = x^2 + y^2$ . Pois, se existisse,  $u$  deveria ser harmônico, porém,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 4 \neq 0$$

Como vimos, toda parte real de uma função analítica é harmônica.

O próximo teorema diz que se  $u$  for harmônica em uma região simplesmente conexa então  $u$  é a parte real de alguma função analítica.

**Teorema 16** Sejam  $\Omega$  um conjunto simplesmente conexo e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica. Então existe uma função analítica  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $u = \Re f$ .

**Prova:** Seja  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Como  $u$  é de classe  $C^2$ , vemos que  $g$  é de classe  $C^1$ . Como

$$\frac{\partial}{\partial x} \Re g = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \Im g$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} \Re g = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \Im g$$

vemos que  $g$  é analítica em  $\Omega$ .

Como  $\Omega$  é simplesmente conexo, existe uma primitiva  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  de  $g$ , isto é,  $G' = g$  em  $\Omega$ . Lembre que  $G$  é analítica.

Agora, colocando  $\varphi = \Re G$  e  $\psi = \Im G$  temos

$$G' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

e também,

$$G' = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Daí,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - u) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}(\varphi - u) = 0$$

Como  $\Omega$  é conexo, vemos que  $\varphi - u$  é constante, digamos,  $\varphi - u = c \in \mathbb{R}$ .

Desta maneira, colocando  $f = G - c$ , vemos que  $f$  é analítica e

$$\Re f = \Re(G - c) = \varphi - c = u.$$

■

**Observação 27** A função  $f$  do teorema acima é dada por

$$f(z) = \int_{z_0}^z \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) dz - C,$$

conforme a prova do teorema 10

**Exercício 15** Verifique que se  $u$  e  $\Omega$  são como no teorema acima e se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  é tal que  $\gamma(a) = (z_0, y_0)$  e  $\gamma(b) = (x, y)$ , então

$$\int_{\gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) dz = u(x, y) - u(x_0, y_0) + i \int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

**Definição 27** Seja  $\Omega$  um aberto. Denotamos por  $\mathcal{H}(\Omega)$  o conjunto de todas as funções harmônicas em  $\Omega$ .

**Exemplo 78**  $\mathcal{H}(\Omega)$  é um espaço vetorial.

**Exemplo 79** Se  $\Omega$  é simplesmente conexo então  $\mathcal{H}(\Omega) = \{\Re f; f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ é analítica}\}$ .

**Exemplo 80** Seja  $\Omega$  um conjunto simplesmente conexo que contenha a origem. Se  $R$  é tal que  $\gamma(t) = Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  esteja contida em  $\Omega$  então, para todo  $a$  tal que  $|a| < R$  temos

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |a|^2}{|z - a|^2} u(z) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{it} - a|^2} u(Re^{it}) dt \quad (17.1)$$

Seja  $f$  analítica tal que  $\Re f = u$  em  $\Omega$ .

Se  $a = 0$  então

$$\begin{aligned} u(0) &= \Re f(0) = \Re \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz = \\ &= \Re \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it}) Ric^{it}}{Re^{it}} dt = \Re \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re f(Re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) dt \end{aligned}$$

que é 17.1 com  $a = 0$ .

Suponha agora que  $a \neq 0$ . Pela fórmula de Cauchy temos

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz \quad (17.2)$$

Agora, como  $w = \frac{R^2}{\bar{a}}$  é tal que

$$w = \frac{R^2}{|\bar{a}|} = \frac{R^2}{|a|} = R \frac{R}{|a|} > R,$$

vemos que a função  $g(z) = \frac{f(z)}{z - \frac{R^2}{\bar{a}}}$  é analítica em  $z; |z| \leq R$ . Logo,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \frac{R^2}{\bar{a}}} dz \quad (17.3)$$

Subtraindo 17.3 de 17.2 temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \left[ \frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - \frac{R^2}{\bar{a}}} \right] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{|a|^2 - R^2}{(z - a)(z\bar{a} - R^2)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{|a|^2 - R^2}{(Re^{it} - a)(Re^{it}\bar{a} - R^2)} Re^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{|a|^2 - R^2}{(Re^{it} - a)(\bar{a} - Re^{-it})} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - |a|^2}{(Re^{it} - a)(\overline{Re^{it} - a})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - |a|^2}{|a - Re^{it}|^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \frac{|z|^2 - |a|^2}{|z - a|^2} dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x, y) = \Re \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \frac{|z|^2 - |a|^2}{|z - a|^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z) \frac{|z|^2 - |a|^2}{|z - a|^2} dt.$$

**Exemplo 81** Tomando  $u = 1$ , vemos que se  $|a| < R$

$$\int_0^{2\pi} \frac{|z|^2 - |a|^2}{|z - a|^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{it} - a|^2} dt = 2\pi.$$

Ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|Re^{it} - a|^2} dt = \frac{2\pi}{R^2 - |a|^2}.$$

**Observação 28** Observe que pela fórmula 17.1, o valor de  $u$  no interior do disco  $z; |z| \leq R$  só depende dos valores de  $u$  na fronteira deste mesmo disco.

# Capítulo 18

## Seqüências e Séries

**Definição 28** Considere uma seqüência de números complexos  $(z_n)$ , isto é, uma aplicação que para cada  $n \in \mathbb{N}$  associa um único número complexo  $z_n$ . Dizemos que  $z_n$  é convergente se existir  $z \in \mathbb{C}$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_o \in \mathbb{N}$  satisfazendo

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{sempre que } n \geq n_o.$$

**Proposição 28** Se  $z_n$  é convergente então existe um único número complexo  $z$  satisfazendo a definição acima.

**Prova:** Se  $z$  e  $w$  satisfazem a definição acima então, dado  $\varepsilon > 0$  é possível encontrar  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon/2 \quad \text{sempre que } n \geq n_1$$

e também  $n_2 \in \mathbb{N}$  satisfazendo

$$|z_n - w| < \varepsilon/2 \quad \text{sempre que } n \geq n_2.$$

Tomando  $n_o$  como o maior entre os números  $n_1$  e  $n_2$  vemos que se  $n \geq n_o$  então

$$0 \leq |z - w| \leq |z - z_n| + |z_n - w| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Logo,  $|z - w| = 0$ , isto é,  $z = w$ . ■

**Observação 29** Se  $z_n$  é convergente e se  $z$  é o único número complexo que satisfaz a definição 28, dizemos que  $z$  é o limite da seqüência  $z_n$  e denotaremos por

$$z_n \rightarrow z \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

**Observação 30** Geometricamente, o fato de  $z_n \rightarrow z$  significa que por menor que seja o disco centrado em  $z_o$ , sempre será possível encontrar  $n_o \in \mathbb{N}$  de modo que  $z_n$  pertença a este disco para todo  $n \geq n_o$ . Em geral, quanto menor o disco, maior será  $n_o$ .

**Observação 31** Se uma seqüência não for convergente, diremos que ela é divergente.

Deixamos como exercício as provas das seguintes proposições:

**Proposição 29** Se  $z_n \rightarrow z$  e  $w_n \rightarrow w$  então

- i)  $z_n + w_n \rightarrow z + w$ ;
- ii)  $\lambda z_n \rightarrow \lambda z$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
- iii) existe  $M > 0$  tal que  $|z_n| \leq M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , isto é, a seqüência  $z_n$  é limitada.

**Proposição 30** Seja  $z_n$  uma seqüência em  $\mathbb{C}$ . Sejam  $x_n = \Re z_n$  e  $y_n = \Im z_n$ . Então  $z_n$  é convergente se e somente se as seqüências de números reais  $x_n$  e  $y_n$  convergem. Em caso afirmativo, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**Exemplo 82** Analise a convergência das seguintes seqüências:

$$z_n = \frac{i}{n}, \quad w_n = i^n \quad e \quad \zeta_n = \frac{1}{n} + in.$$

Como  $\Re z_n = 0 \rightarrow 0$  e  $\Im z_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , a proposição 30 nos diz que  $z_n$  é convergente e seu limite é zero.

Note que  $\Re w_{2k} = \Re i^{2k} = (-1)^k$  não é convergente. Logo, pela proposição 30, a seqüência  $w_n$  também não converge.

Quanto à última seqüência, vemos que ela não é limitada, pois para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$|\zeta_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + n^2} \geq \sqrt{n^2} = n.$$

Logo, pelo terceiro item da proposição 29,  $\zeta_n$  não pode ser convergente. □

**Definição 29** Seja  $z_n$  uma seqüência em  $\mathbb{C}$ . Dizemos que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é convergente se a seqüência  $s_n = z_0 + \dots + z_n$  for convergente. Ou seja, se existir  $S \in \mathbb{C}$  tal que para cada  $\varepsilon > 0$  existir  $n_o \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| S - \sum_{j=0}^n z_j \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_o.$$

Neste caso, denotamos  $S$  por  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ .

**Observação 32** A seqüência  $z_n$  que dá origem à série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é chamada de termo geral desta série.

Seguem das proposições 29 e 30 as seguintes proposições:

**Proposição 31** Se  $S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$  e  $T = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$  então

- i)  $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) = S + T$ ;  
 ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda z_n = \lambda S$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Proposição 32** *Sejam  $z_n = x_n + iy_n$ ,  $x_n = \Re z_n$  e  $\Im z_n = y_n$ . Então a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  converge se e somente se as séries de números reais  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  convergem. Neste caso,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Também temos

**Proposição 33** *Se  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é convergente então  $z_n \rightarrow 0$ .*

**Prova:** Coloque  $x_n = \Re z_n$  e  $y_n = \Im z_n$ . Pela proposição 32, as séries de números reais  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  convergem. Portanto, por um resultado de Cálculo II, temos  $x_n, y_n \rightarrow 0$ , isto é,  $z_n = x_n + iy_n \rightarrow 0$ . ■

**Exemplo 83** *A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}$  não é convergente pois  $\sum_{n=1}^{\infty} \Im \frac{i}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge (série harmônica). No entanto, temos  $\frac{i}{n} \rightarrow 0$ .*

**Observação 33** *O exemplo acima mostra que a condição  $z_n \rightarrow 0$  não é suficiente para que a série formada por  $z_n$  seja convergente. No entanto, a proposição 33 nos diz que esta condição ( $z_n \rightarrow 0$ ) é necessária para a convergência de  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ , isto é, se o limite de  $z_n$  não existir ou se convergir para um número diferente de zero então a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  será divergente.*

**Exemplo 84** *Pela proposição 32, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^3}$  é convergente, pois as séries de números reais  $\sum_{n=1}^{\infty} \Re \frac{n+i}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \Im \frac{n+i}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  são ambas convergentes.*

**Definição 30** *Dizemos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  é absolutamente convergente se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  for convergente.*

**Exemplo 85** *A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$  é absolutamente convergente. Basta notar que a série de números reais  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente.*

**Proposição 34** *Se  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é absolutamente então ela também é convergente.*

**Prova:** Colocando  $x_n = \Re z_n$  e  $y_n = \Im z_n$ , vemos que  $x_n^2 \leq x_n^2 + y_n^2 = |z_n|^2$  e, portanto,  $|x_n| \leq |z_n|$ . Assim, usando o critério de comparação para séries de números reais vemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  é absolutamente convergente e, portanto, convergente.

De modo semelhante se mostra que  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  também é convergente. Logo, pela proposição 32 temos que  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é convergente. ■

**Exemplo 86** Nem toda série convergente é absolutamente convergente como pode ser verificado pela série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{n}$ .

Esta série não converge absolutamente pois  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^{2n}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

No entanto,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  é convergente pelo critério de Leibnitz (Cálculo II), isto é, como a seqüência  $\frac{1}{n}$  é decrescente e tende a zero, então a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  é convergente.

# Capítulo 19

## Séries de Potências

**Definição 31** *Sejam  $z_o \in \mathbb{C}$  e  $a_n$  uma seqüência de números complexos. A cada  $z \in \mathbb{C}$  coloque  $z_n = a_n(z - z_o)^n$ . A série dada por  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  é chamada de série de potências. O número complexo  $z_o$  é chamado de centro da série de potências.*

Neste capítulo trataremos de estudar sob que condições uma série de potências é convergente. Note que quando tomamos  $z = z_o$  a série de potências é convergente e seu valor é o termo independente  $a_0$ .

Veremos mais adiante que se a série de potências convergir quando tomamos algum outro valor de  $z \neq z_o$  então será possível definir uma função numa vizinhança (pelo menos num disco aberto) de  $z_o$  que a cada  $z$  nesta vizinhança associa o valor da série, isto é,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ .

Na maior parte do capítulo passaremos a estudar propriedades desta função. A principal delas será que  $f$  é uma função analítica.

Reciprocamente, o teorema de Taylor par funções analíticas nos garantirá que toda função analítica pode ser escrita como uma série de potências convergente em uma vizinhança de cada ponto do domínio (aberto) da função.

Vamos começar a nossa investigação considerando a série geométrica que é obtida tomando-se  $z_o = 0$  e  $a_n = 1$  na definição 31.

Sabemos que uma condição necessária para que uma série seja convergente é que seu termo geral tenda a zero. Como no presente caso  $z_n = z^n$  vemos  $z_n \rightarrow 0$  se e somente se  $|z| < 1$ . Assim, para  $|z| \geq 1$  a série geométrica é divergente.

Para  $|z| < 1$ , considere a seqüência formada pelas somas parciais,

$$s_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n.$$

Temos

$$(1 - z)s_n(z) = s_n(z) - zs_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n - (z + z^2 + \cdots + z^{n+1}) = 1 - z^{n+1}$$

e, daí,

$$s_n(z) = \sum_{j=0}^n z^j = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}. \quad (19.1)$$

Como  $|z| < 1$ , vemos que

$$\left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \rightarrow 0.$$

Desta maneira, segue de 19.1 que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| < 1.$$

Vale a pena observar que a convergência também é absoluta neste disco  $D_1 = \{z; |z| < 1\}$  pois a série geométrica de números reais  $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$  é convergente pois a  $|z| < 1$ .

**Definição 32** Dizemos que uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  converge uniformemente em um conjunto  $D \subset \mathbb{C}$  se existir uma função  $S$  em  $D$  tal que dado  $\varepsilon > 0$  existir  $n_o \in \mathbb{N}$  satisfazendo

$$\left| S(z) - \sum_{j=0}^n a_j(z - z_o)^j \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_o.$$

**Observação 34** É claro que se a série converge uniformemente em  $D$  então, para  $z \in D$  temos que a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  converge para  $S(z)$ .

**Observação 35** Note que embora as definições de convergência e de convergência uniforme sejam bastante semelhantes, nesta última é possível escolher, para cada  $\varepsilon > 0$ , um mesmo  $n_o$  que sirva para todo  $z \in D$ . Na definição de convergência, o  $n_o$  pode variar de acordo com o ponto  $z$ .

**Proposição 35** Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  um série de potências tal que para todo  $n$  tenhamos  $|a_n(z - z_o)^n| \leq b_n$  para todo  $z \in D$ , onde  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  é convergente. Então,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  é uniformemente convergente em  $D$ .

**Prova:**

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_o$  tal que

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} b_j - \sum_{j=0}^n b_j \right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_o.$$

É claro que a série de potências é (absolutamente) convergente para todo  $z \in D$ .

Assim, se  $n \geq n_o$  e todo  $z \in D$  temos

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_o)^j - \sum_{j=0}^n a_j(z - z_o)^j \right| = \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j(z - z_o)^j \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j(z - z_o)^j| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \varepsilon$$

■

**Exemplo 87** A série geométrica converge uniformemente no disco fechado  $\overline{D_{r'}} = \{z; |z| \leq r'\}$  onde  $0 \leq r' < 1$ . Porém a convergência não é uniforme no disco aberto  $D_1 = \{z; |z| < 1\}$ .

Passemos a verificar estes fatos notamos primeiramente que se  $z \in \overline{D_{r'}}$  então  $|z|^n \leq (r')^n$ . Segue da proposição 35 com  $b_n = (r')^n$  (note que  $0 \leq r' < 1$ ) que a série geométrica é uniformemente convergente em  $\overline{D_{r'}}$ .

Quanto à segunda afirmação, vemos que, por 19.1, para  $\varepsilon > 0$  existirá  $n_o$  tal que para todo  $n \geq n_o$  tem-se

$$\left| s_n(z) - \sum_{j=0}^{\infty} z^j \right| < \varepsilon$$

se e somente se

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} < \varepsilon &\Leftrightarrow |z|^{n+1} < \varepsilon|1-z| \Leftrightarrow (n+1) \log |z| < \log(\varepsilon|1-z|) \\ &\Leftrightarrow n+1 > \frac{\log(\varepsilon|1-z|)}{\log |z|}, \end{aligned}$$

pois  $|z| < 1$ . Note agora, que à medida que tomamos os pontos mais próximos à fronteira do disco ( $|z| = 1$ ), teremos que tomar  $n_o$  cada vez maior para que 19.1 fique válida para todo  $n \geq n_o$ .

**Teorema 17** Dada uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  então ocorre uma e somente uma das seguintes situações:

- i)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  só converge em  $z = z_o$ ;
- ii) existe  $r > 0$  tal que se  $|z - z_o| < r$  a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  converge absolutamente e se  $0 \leq r' < r$ , a convergência é uniforme no disco fechado  $\overline{D_{r'}} = \{z; |z - z_o| \leq r'\}$ .  
Além do mais, se  $|z - z_o| > r$  a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  diverge;
- iii) a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  converge absolutamente para todo  $z \in \mathbb{C}$  e uniformemente em todo disco fechado  $\overline{D_{r'}} = \{z; |z - z_o| \leq r'\}$ .

**Prova:** Seja  $D = \{z; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n \text{ converge absolutamente}\}$ .

Se  $D = \{z_o\}$  então temos i).

Se  $D \neq \{z_o\}$  então existe  $z_1 \in D$ ,  $z_1 \neq z_o$ . Coloque  $r_o = |z_1 - z_o| > 0$ .

Como  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_o)^n$  converge, o seu termo geral tende a zero e é, portanto, limitado. Assim, existe  $M > 0$  tal que  $|a_n(z_1 - z_o)^n| \leq M$  para todo  $n$ .

Se  $0 \leq r' < r_o$  e  $|z - z_o| \leq r'$  então

$$|a_n(z - z_o)^n| = \left| \frac{z - z_o}{z_1 - z_o} \right|^n |a_n(z_1 - z_o)^n| \leq M \left( \frac{r'}{r_o} \right)^n. \quad (19.2)$$

Como  $0 \leq \frac{r'}{r_o} < 1$ , vemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_o)^n|$  converge. logo,  $z \in D$ .

Note que por 19.2 a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  converge uniformemente em  $\overline{D_{r'}}$ . Para ver isto, basta notar que o último membro de 19.2 independe de  $z \in \overline{D_{r'}}$ .

Veja que mostramos que  $\overline{D_{r'}} \subset D$  para todo  $r' < |z_1 - z_o|$  onde  $z_1 \in D$ ,  $z_1 \neq z_o$ .

Agora, se todos os discos centrados em  $z_o$  estiverem contidos em  $D$  então teremos  $D = \mathbb{C}$  e com o que já foi demonstrado, obteremos *iii*). Por outro lado, se isto não acontecer então existirá  $r > 0$  tal que

$$D_r = \{z; |z - z_o| < r\} \subset D \quad \text{e} \quad D_s \not\subset D \quad \text{para todo } s > r. \quad (19.3)$$

As estimativas feitas em 19.2 com  $r = r_o$  mostram as duas primeiras afirmativas de *ii*). Quanto à terceira, basta ver que se  $|z - z_o| > r$  então se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  convergisse, seria possível encontrar  $M' > 0$  tal que  $|a_n(z - z_o)^n| \leq M'$  para todo  $n$  e, assim, para todo  $z'$  satisfazendo  $r < |z' - z_o| < |z - z_o|$ , teríamos

$$|a_n(z' - z_o)^n| = \left| \frac{z' - z_o}{z - z_o} \right|^n |a_n(z - z_o)^n| \leq M' \left| \frac{z' - z_o}{z - z_o} \right|^n.$$

Como

$$\left| \frac{z' - z_o}{z - z_o} \right| < 1,$$

a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z' - z_o)^n$  convergiria absolutamente e, portanto,  $z' \in D$ . Mas, segue daí que  $\overline{D_s} \subset D$  onde  $s = |z_1 - z_o|$ , que contradiz 19.3 pois  $s > r$ . ■

**Observação 36** *O número  $r$  que aparece em *ii*) da proposição acima é chamado de raio de convergência da série. Estendemos este conceito para dizer que em *i*) o raio de convergência é zero e em *iii*) é infinito.*

**Observação 37** *O segundo item do teorema anterior nada afirma sobre a convergência da série sobre o círculo  $|z - z_o| = r$ .*

A próxima proposição nos fornece uma maneira de calcularmos o raio de convergência de uma série de potências desde que um determinado limite exista.

**Proposição 36** *Considere a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n.$$

*Se o limite da seqüência  $\sqrt[n]{|a_n|}$  converge então o raio de convergência da série acima será dado por  $r$  onde*

$$r = \begin{cases} 0, & \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0; \\ \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{se } 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty. \end{cases}$$

**Prova:** Provaremos apenas o caso em que  $\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 0$ . Se  $s < r$  então  $1/s > 1/r$  e pela definição de limite existe  $n_o$  tal que  $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/s$  para todo  $n \geq n_o$ . Daí,

$$|a_n| < \frac{1}{s^n} \quad \text{se } n \geq n_o.$$

Assim, para  $|z - z_o| < s$  e  $n \geq n_o$  temos

$$|a_n(z - z_o)^n| \leq \left( \frac{|z - z_o|}{s} \right)^n.$$

Como  $|z - z_o|/s < 1$ , a série  $\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_o)^n$  é absolutamente convergente. Como  $s < r$  foi arbitrário, a mesma série é absolutamente convergente em  $D_r$ .

Agora, dado  $r' < r$ , tome  $s$  tal que  $r' < s < r$ . Um cálculo como acima nos diz que

$$|a_n(z - z_o)^n| \leq \left( \frac{s}{r'} \right)^n, \quad \text{para } |z - z_o| \leq r' \text{ e } n \text{ grande.}$$

Assim, a série é uniformemente convergente em  $\overline{D_{r'}}$ .

Agora, se  $s > r$  então  $1/s < 1/r$ . Logo, existe  $n_1$  tal que  $1/s < \sqrt[n]{|a_n|}$  para todo  $n \geq n_1$ . Se tomarmos  $|z - z_o| \geq s$  vemos que

$$|a_n(z - z_o)^n| > \left( \frac{|z - z_o|}{s} \right)^n.$$

Como

$$\frac{|z - z_o|}{s} \geq 1$$

então  $a_n(z - z_o)^n$  não tende a zero e, portanto, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  não pode ser convergente.

Vemos assim, que o número  $r$  é o raio de convergência da série. ■

**Exemplo 88** *Encontre os raios de convergências das seguintes séries:*

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} n 2^n z^n$ ;

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ ;

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ .

a) Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 2$ , vemos que o raio de convergência é  $1/2$ .

b) Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ , vemos que o raio de convergência é zero.

c) Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ , vemos que o raio de convergência é infinito.

Deixamos como exercício a prova da seguinte

**Proposição 37** Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n.$$

Se o limite da seqüência  $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  converge então o raio de convergência da série acima será dado por

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

mesmo que o limite dê infinito.

**Exemplo 89** A série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$  converge absolutamente para todo  $z \in \mathbb{C}$  pois, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty,$$

o seu raio de convergência é infinito pela proposição 37.

**Teorema 18** Seja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

uma série de potências cujo raio de convergência  $r$  seja diferente de zero.

Então  $f$  é contínua no disco  $D_r = \{z; |z - z_o| < r\}$ .

**Prova:** Seja  $z_1 \in D_r$ . Tome  $r'$  satisfazendo  $|z_1 - z_o| < r' < r$ .

Sabemos que a série dada por  $f$  converge uniformemente em  $\overline{D_{r'}}$ . Assim, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_o$  tal que

$$\left| f(z) - \sum_{j=0}^n a_j (z - z_o)^j \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } z \in \overline{D_{r'}}, n \geq n_o. \quad (19.4)$$

Como o polinômio

$$p_{n_o}(z) = \sum_{j=0}^{n_o} a_j (z - z_o)^j$$

é contínuo em  $z_1$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|p_{n_o}(z) - p_{n_o}(z_1)| < \varepsilon/3$  se  $|z - z_1| < \delta$ .

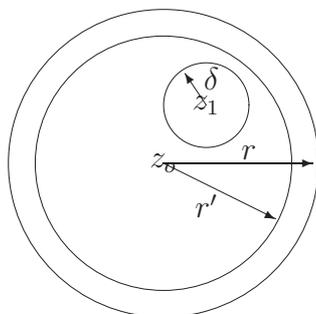
Diminuindo  $\delta > 0$  se necessário podemos supor que o disco aberto centrado em  $z_1$  de raio  $\delta$  esteja contido em  $D_{r'}$ .

Assim, se  $|z - z_1| < \delta$ ,

$$|f(z) - f(z_1)| \leq |f(z) - p_{n_o}(z)| + |p_{n_o}(z) - p_{n_o}(z_1)| + |p_{n_o}(z_1) - f(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

pois,  $z, z_1 \in D_{r'}$  e também  $|z - z_1| < \delta$ .

■



**Teorema 19 (Integração termo a termo)** *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

uma série de potências cujo raio de convergência  $r$  seja diferente de zero. Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um caminho cujo traço esteja contido em  $D_r = \{z; |z - z_0| < r\}$  então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} [(\gamma(b) - z_0)^{n+1} - (\gamma(a) - z_0)^{n+1}].$$

Em particular, se  $\gamma$  é um caminho fechado,  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

**Prova:** Como o traço  $\gamma^*$  de um caminho é um conjunto compacto, existe  $r' > 0$  tal que  $\gamma^* \subset \overline{D_{r'}}$ . Como a convergência de  $f$  é uniforme em  $\overline{D_{r'}}$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_o$  tal que

$$\left| \sum_{j=n}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \right| < \varepsilon$$

para todo  $z \in \overline{D_{r'}}$  e  $n \geq n_o$ .

Desta forma, como  $f$  é contínua, sua integral sobre  $\gamma$  existe e podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} \sum_{j=0}^n a_j (z - z_0)^j dz + \int_{\gamma} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j (z - z_0)^j dz \\ &= \sum_{j=0}^n \int_{\gamma} a_j (z - z_0)^j dz + \int_{\gamma} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j (z - z_0)^j dz \end{aligned}$$

pois a primeira soma só apresenta um número de termos. Segue daí, que se  $n \geq n_o$  então

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{j=0}^n \int_{\gamma} a_j (z - z_0)^j dz \right| = \left| \int_{\gamma} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j (z - z_0)^j dz \right|$$

$$\leq \max_{z \in \gamma^*} \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j (z - z_o)^j \right| \ell(\gamma^*) < \varepsilon \ell(\gamma^*).$$

Como  $\gamma$  está fixa, segue que

$$\sum_{j=0}^n \int_{\gamma} a_j (z - z_o)^j dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz,$$

isto é,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\gamma} a_j (z - z_o)^j dz.$$

A fórmula final segue do fato que  $\frac{a_j}{j+1} (z - z_o)^{j+1}$  é uma primitiva de  $a_j (z - z_o)^j$  para  $j \geq 0$ . ■

**Exemplo 90** *Vamos aplicar o teorema anterior à função*

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Como o disco  $D_1 = \{z; |z| < 1\}$  é simplesmente conexo e  $f$  é analítica em  $D_1$ , sabemos que ela possui primitiva neste domínio. Uma tal primitiva é dada por  $F(z) = -\log(1-z)$ , onde tomamos o ramo do logaritmo satisfazendo

$$\begin{cases} z - 1 = re^{i\theta}, & 0 < \theta < 2\pi \\ \log(1-z) = \log|1-z| + i(\theta - \pi). \end{cases}$$

Note que com este ramo temos  $\log 1 = 0$ , pois  $0 - 1 = e^{\pi i}$ . Assim,  $F(0) = 0$ .

Para cada  $z \in D_1$ , tomamos  $\gamma(t) = tz$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Pelo teorema anterior e pelo fato de  $F$  ser uma primitiva de  $f$ , temos

$$\begin{aligned} -\log(1-z) &= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \int_{\gamma} \frac{1}{1-\zeta} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \zeta^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} [\gamma(1)^{n+1} - \gamma(0)^{n+1}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, com o ramo escolhido acima,

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

**Corolário 8** *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$$

*uma série de potências cujo raio de convergência  $r$  seja diferente de zero.*

*Então  $f$  é analítica no disco  $D_r = \{z; |z - z_o| < r\}$ .*

**Prova:** Pelo teorema 18  $f$  é contínua em  $D_r$  e pelo teorema 19 a integral de  $f$  é zero sobre todo caminho fechado contido em  $D_r$ . Segue do teorema de Morera que  $f$  é analítica em  $D_r$ . ■

**Teorema 20 (Derivação termo a termo)** *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$$

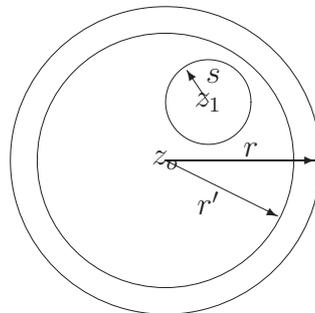
*uma série de potências cujo raio de convergência  $r$  seja diferente de zero.*

*Então a derivada  $k$ -ésima de  $f$  num ponto  $z \in D_r = \{z; |z - z_o| < r\}$  é dada por*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{j=k}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1)a_j(z - z_o)^{j-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!} a_{n+k}(z - z_o)^n$$

*e o raio de convergência da série acima também é  $r$ .*

**Prova:** Fixado  $z_1 \in D_r$ , tome  $|z_1 - z_o| < r' < r$ . Selecione  $s > 0$  de modo que o disco centrado em  $z_1$  de raio  $s$  esteja contido no disco  $D_{r'}$ .



Coloque  $\gamma(t) = z_1 + se^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Como  $f$  é analítica em  $D_r$ , segue da fórmula de Cauchy para derivadas que

$$f^{(k)}(z_1) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_1)^{k+1}} dz.$$

Mas, para todo  $z \in D_r$ ,

$$\frac{f(z)}{(z - z_1)^{k+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{(z - z_o)^j}{(z - z_1)^{k+1}} = \sum_{j=0}^N a_j \frac{(z - z_o)^j}{(z - z_1)^{k+1}} + \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j \frac{(z - z_o)^j}{(z - z_1)^{k+1}}.$$

Integrando a expressão acima sobre  $\gamma$ , obtemos

$$f^{(k)}(z_1) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_1)^{k+1}} dz = \sum_{j=0}^N \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} a_j \frac{(z - z_o)^j}{(z - z_1)^{k+1}} dz + \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j \frac{(z - z_o)^j}{(z - z_1)^{k+1}} dz. \quad (19.5)$$

Mas

$$\left| \int_{\gamma} \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j \frac{(z - z_o)^j}{(z - z_1)^{k+1}} dz \right| \leq \max_{z \in \gamma^*} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{|a_j (z - z_o)^j|}{|z - z_1|^{k+1}} \ell(\gamma^*) \\ = \frac{2\pi s}{s^{k+1}} \max_{z \in \gamma^*} \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j (z - z_o)^j| = \frac{2\pi}{s^k} \max_{z \in \gamma^*} \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j (z - z_o)^j|.$$

Como  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_o)^j$  converge absoluta e uniformemente em  $|z - z_o| < r'$  e o traço de  $\gamma$  está contido neste disco, vemos que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_o$  tal que para todo  $N \geq n_o$  e para todo  $z \in \gamma^*$  temos

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j (z - z_o)^j| < \varepsilon.$$

Segue de 19.5 que para todo  $N \geq n_o$  temos

$$\left| f^{(k)}(z_1) - \sum_{j=0}^N a_j \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_o)^j}{(z - z_1)^{k+1}} dz \right| < \varepsilon \frac{k!}{2},$$

ou seja,

$$f^{(k)}(z_1) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_o)^j}{(z - z_1)^{k+1}} dz.$$

Usando a fórmula de Cauchy para derivada,

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_o)^j}{(z - z_1)^{k+1}} dz = \left. \frac{d^k}{dz^k} (z - z_o)^j \right|_{z=z_1} \\ = \begin{cases} 0, & \text{se } j = 0, \dots, k-1 \\ j(j-1) \cdots (j-k+1) (z_1 - z_o)^{j-k}, & \text{se } j \geq k. \end{cases}$$

Portanto,

$$f^{(k)}(z_1) = \sum_{j=k}^{\infty} a_j j(j-1) \cdots (j-k+1) (z_1 - z_o)^{j-k}$$

$$= \sum_{j=k}^{\infty} a_j \frac{j!}{(j-k)!} (z_1 - z_o)^{j-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} (z_1 - z_o)^n.$$

Seja  $R$  o raio de convergência da série da primeira derivada de  $f$ . Claramente, por dominação, temos  $R \leq r$ .

Suponha que  $R > r$ . Então existem  $s$  satisfazendo  $r < s < R$  e  $z$  tal que  $|z - z_o| = s$ . Integrando a série da derivada  $(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_o)^n)$  termo a termo do segmento que liga  $z_o$  a  $z$  obtemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_o)^n = f(z) - f(z_o)$  é convergente. Isto é um absurdo, pois  $|z - z_o| > r$ . Logo,  $R = r$ .

Por indução, o raio de convergência da série da  $k$ -ésima derivada também é  $R$ . ■

**Exemplo 91** Podemos aplicar a série da derivada de

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

para obter várias outras representações de funções em série de potências.

De fato, derivando a expressão acima obtemos

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \quad |z| < 1.$$

Derivando mais uma vez,

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n, \quad |z| < 1,$$

ou seja,

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n, \quad |z| < 1.$$

Prosseguindo o processo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^k} &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-1) \cdots (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n, \quad |z| < 1, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

**Exemplo 92** Verifique que

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

Como

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad |w| < 1,$$

tomando  $w = -z^2$  vemos que

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1$$

pois  $|w| = |-z^2| < 1$  é equivalente a  $|z| < 1$ .

Derivando a expressão acima obtemos para  $|z| < 1$

$$\begin{aligned} -\frac{2z}{(1+z^2)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2nz^{2n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n nz^{2n-1} \\ &= 2z \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n nz^{2n-2} = 2z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)z^{2n}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{z}{(1+z^2)^2} = -z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)z^{2n}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

## 19.1 Série de Taylor

Já vimos que toda série de potências cujo raio de convergência seja positivo é uma função analítica. O próximo teorema diz que toda função analítica pode ser representada localmente como série de potências, isto é, se  $f$  é analítica em  $z_0$  então existe  $r > 0$  e uma seqüência  $a_n$  satisfazendo  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ , para todo  $|z-z_0| < r$ . Mais precisamente, temos

**Teorema 21 (Série de Taylor)** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica definida em um aberto  $\Omega$ . Se  $z_0 \in \Omega$  e  $r > 0$  é tal que  $D_r = \{z; |z-z_0| < r\} \subset \Omega$  então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad \text{para todo } z \in D_r.$$

**Prova:** Dado  $z \in D_r$  tome  $s$  tal que  $|z-z_0| < s < r$ . Coloque  $\gamma(t) = z_0 + se^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Pela fórmula de Cauchy e manipulação algébrica podemos escrever

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \frac{1}{w-z} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \frac{1}{w-z_0 + (z_0-z)} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} dw.
\end{aligned}$$

Como para  $w \in \gamma^*$ , isto é,  $|w - z_0| = s$ , vemos que

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{s} < 1$$

e daí, usando a série geométrica,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^N \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^N (z-z_0)^n \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n dw \quad (19.6)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^N (z-z_0)^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n dw. \quad (19.7)$$

Mas, como  $f$  é contínua e  $\gamma^*$  é compacto, existe  $M > 0$  tal que  $|f(w)| \leq M$  para todo  $w \in \gamma^*$ . Desta forma, o último membro do lado esquerdo de 19.7 pode tende a zero quando  $N$  tende a infinito, pois

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n dw \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \gamma^*} \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}} |z-z_0|^n \right) \ell(\gamma^*) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M}{s^{n+1}} |z-z_0|^n 2\pi s = M \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( \frac{|z-z_0|}{s} \right)^n \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando  $N \rightarrow \infty$ , pois é o resto da série geométrica cuja razão é  $\frac{|z-z_0|}{s} < 1$ . Logo,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad \text{para todo } z \in D_r.$$

■

**Observação 38** Note que se  $f$  é inteira, isto é,  $\Omega = \mathbb{C}$ , então o raio de convergência da série de Taylor de  $f$  é infinito pois  $D_r \subset \mathbb{C}$  para todo  $r > 0$ .

**Observação 39** Nos referiremos à série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$  como a série de Taylor de  $f$  centrada em  $z_0$ .

**Exercício 16** Prove o seguinte:

Se uma função analítica definida em um disco centrado em  $z_0$  é representada por uma série de potências centrada em  $z_0$ , então esta série é a série de Taylor de  $f$  centrada em  $z_0$ .

**Observação 40** Quando  $z_0 = 0$  a série de Taylor também é conhecida como série de MacLaurin.

**Exemplo 93** Encontre a expansão em série de MacLaurin da função  $f(z) = e^z$ .

Como para todo  $n = 0, 1, \dots$ , temos  $f^{(n)}(z) = e^z$ , vemos que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

que é válida para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Exemplo 94** Do exemplo anterior podemos escrever, para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n$$

e

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} z^n.$$

Somando as duas expressões obtemos

$$2 \cos z = e^{iz} + e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{n!} z^n = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k},$$

pois quando  $n$  é ímpar,  $i^n + (-i)^n = 0$  e quando  $n = 2k$ ,  $i^n + (-i)^n = (i^2)^k + ((-i)^2)^k = 2(-1)^k$ .

Assim,

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Derivando a expressão acima obtemos

$$\operatorname{sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Exemplo 95** Encontre a expansão em série de Taylor em torno de  $z_0 = 1$  do ramo da função  $f(z) = \sqrt{z}$  com  $\sqrt{1} = 1$  e  $z = re^{i\theta}$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ .

O maior disco aberto centrado em  $z_0 = 1$  contido no domínio do ramo acima é  $D_1 = \{z; |z - 1| < 1\}$ .

É fácil ver que as derivadas de  $f$  são dadas por

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left( \frac{1}{2} - (n-1) \right) z^{\frac{1}{2}-n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-2}{2} \right) \cdots \left( \frac{1-2(n-1)}{2} \right) z^{\frac{1}{2}-n}.$$

É claro que  $f^{(0)}(1) = f(1) = 1$ ,  $f^{(1)}(1) = 1/2$  e quando  $z = 1$ ,  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(1) &= \frac{1}{2^n} (-1)(-3) \cdots (-(2n-3)) = \frac{1}{2^n} \frac{(-1)(-2)(-3) \cdots (-(2n-3))(-2(n-1))}{(-2) \cdots (-2(n-1))} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{(2(n-1))!}{(-1)^{n-1} 2^{n-1} (n-1)!} = (-1)^{n-1} 2 \frac{(2(n-1))!}{4^n (n-1)!}. \end{aligned}$$

Como a última expressão é válida mesmo com  $n = 1$ , temos

$$\sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (z-1)^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2(n-1))!}{4^n n! (n-1)!} (z-1)^n, \quad z \in D_1 = \{z; |z-1| < 1\}.$$

## 19.2 Zeros de função analítica

Nesta seção faremos uma aplicação da série de Taylor para mostrar que os zeros de uma função analítica não identicamente nula são isolados. Isto quer dizer que se  $z_0$  é zero de uma função analítica  $f$  não identicamente nula (o mesmo que dizer que  $z_0$  é uma raiz da equação  $f(z) = 0$ ) então em algum disco centrado em  $z_0$  não existe nenhum outro zero de  $f$ . Note que esta propriedade é satisfeita pelos polinômios que são os exemplos mais simples de funções analíticas.

Resumiremos os resultados que temos em mente nos seguintes teoremas:

**Teorema 22** Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica definida em um aberto  $\Omega$ . Se  $z_0 \in \Omega$  é tal que todas as derivadas de  $f$  se anulam em  $z_0$  então  $f$  se anula identicamente em todo um disco aberto centrado em  $z_0$ .

**Prova:** Seja  $D_r$  um disco centrado em  $z_0$  contido em  $\Omega$ . Pela série de Taylor, para todo  $z \in D_r$  temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Mas como  $f^{(n)}(z_0) = 0$  para todo  $n$ , segue da fórmula acima que  $f(z) = 0$  para todo  $z \in D_r$ . ■

**Observação 41** Se  $\Omega$  é conexo e  $f$  satisfaz as hipóteses do teorema acima, pode-se mostrar que  $f$  é identicamente nula.

**Corolário 9** Se  $z_o$  é um zero isolado de uma função analítica  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  então pelo menos uma das derivadas de  $f$  se anula em  $z_o$ .

**Observação 42** Considere a função de uma variável real a valores reais dada por  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . Pode-se verificar que todas as derivadas de  $f$  existem e em  $x = 0$  elas se anulam. No entanto,  $f$  não é identicamente nula.

**Teorema 23** Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica definida em um aberto  $\Omega$ . Se  $z_o \in \Omega$  é tal  $f(z_o) = 0$  e nem todas as derivadas de  $f$  se anulam em  $z_o$  então  $z_o$  é um zero isolado de  $f$ , isto é, em algum disco centrado em  $z_o$  não existe nenhum outro zero de  $f$ .

**Prova:** Seja  $m$  o menor número inteiro não negativo tal que  $f^{(m)}(z_o) = 0$  mas  $f^{(m+1)}(z_o) \neq 0$ . Seja  $r > 0$  tal que o disco  $D_r = \{z; |z - z_o| < r\} \subset \Omega$ . Tomando a série de Taylor de  $f$  em torno de  $z_o$  vemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z - z_o)^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z - z_o)^n \\ &= (z - z_o)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+m+1)}(z_o)}{(n+m+1)!} (z - z_o)^n = (z - z_o)^{m+1} g(z) \end{aligned}$$

onde  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+m+1)}(z_o)}{(n+m+1)!} (z - z_o)^n$ , é claramente analítica em  $D_r$ . Note que como

$$g(z_o) = \frac{f^{(m+1)}(z_o)}{(m+1)!} \neq 0,$$

existe  $0 < \delta < r$  tal que  $|g(z)| \geq |g(z_o)|/2$  para todo  $z \in D_\delta = \{z; |z - z_o| < \delta\}$ .

Desta forma, vemos que para  $z \in D_\delta$  temos

$$|f(z)| \geq |z - z_o|^{m+1} \frac{|g(z_o)|}{2}.$$

Assim, se  $z \in D_\delta$  e  $z \neq z_o$  então  $|f(z)| > 0$ , isto é,  $f(z) \neq 0$ . Isto mostra que  $z_o$  é um zero isolado de  $f$ . ■

**Corolário 10** Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica definida em um aberto  $\Omega$ . Se  $z_o \in \Omega$  é um zero isolado de  $f$  então existe um inteiro positivo  $n$  e uma função analítica  $g$  definida em um disco aberto  $D$  centrado em  $z_o$  satisfazendo

$$f(z) = (z - z_o)^n g(z), \quad g(z_o) \neq 0, \text{ para todo } z \in D.$$

**Prova:** Se  $g$  e  $m$  são como na prova do teorema anterior, basta tomar  $n = m + 1$ . ■

**Definição 33** Sejam  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica definida em um aberto e  $z_o \in \Omega$  um zero isolado de  $f$ . O número  $n$  do corolário acima é chamado de ordem do zero  $z_o$ .

**Exemplo 96** A função  $f(z) = 1 - |z|^2 = 1 - x^2 - y^2$  não é analítica pois os seus zeros não são isolados. Note que os zeros de  $f$  representam o círculo centrado na origem de raio 1.

**Exemplo 97**  $z_o = 0$  é um zero de ordem dois da função  $f(z) = 1 - \cos z$ . Basta ver que  $f(0) = 1 - \cos 0 = 0$ ,  $f'(0) = \sin 0 = 0$ ,  $f''(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$ .

Note também que

$$\begin{aligned} 1 - \cos z &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2(k-1)} \\ &= z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!} z^{2k} = z^2 g(z), \end{aligned}$$

onde  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!} z^{2k}$  é analítica e  $g(0) = -\frac{1}{2}$ .



# Capítulo 20

## Séries de Laurent

Neste capítulo vamos tratar de séries de potências não necessariamente positivas, isto é, queremos estudar convergência e propriedades de séries dadas na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n. \quad (20.1)$$

O significado da primeira parcela acima é o limite, caso exista, da seqüência das somas parciais

$$\sum_{j=1}^n b_j(z - z_o)^{-j} = \frac{b_1}{z - z_o} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_o)^n}.$$

Fixada uma seqüência  $b_n$  considere  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$ . Se  $r$  é o raio de convergência desta série, o qual suporemos diferente de zero, então se  $0 < r' < r$ , a série converge uniforme e absolutamente no disco  $\overline{D_{r'}} = \{z; |z - z_o| \leq r'\}$ .

Colocando  $w = (z - z_o)^{-1}$ , vemos que  $|w| \leq r'$  é equivalente a  $|z - z_o| \geq \frac{1}{r'}$ . Deste modo a série de potências negativas

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_o)^{-n}$$

converge uniforme e absolutamente na região  $\{z; |z - z_o| \geq \frac{1}{r'}\}$  onde  $r'$  é qualquer número positivo menor do que  $r$ .

Note ainda que se  $s > r$  então  $|z - z_o| \leq 1/s$  é equivalente a  $|w| \geq s > r$ . Logo a série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_o)^{-n}$  diverge.

Note que se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$  for inteira então  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_o)^{-n}$  converge para todo  $z \neq z_o$ .

Resumindo, uma série de potências negativas  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_o)^{-n}$  que converge em algum ponto, convergirá absoluta e uniformemente no complementar de discos abertos centrados em  $z_o$ .

Se o raio de convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$  for  $r < \infty$  então a série de potências negativas  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_o)^{-n}$  diverge quando  $|z - z_o| < r$ .

Se  $r = \infty$  então a convergência de  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_o)^{-n}$  se dá para todo  $z \neq z_o$ .

Ao considerarmos uma série como em 20.1 precisamos assegurar a convergência de ambas parcelas. A menos do caso trivial (convergir somente em  $z_o$ ) a série  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$  converge em um disco  $D_R = \{z; |z - z_o| < R\}$  (pode acontecer de  $R = \infty$  e, neste caso,  $D_R = \mathbb{C}$ ).

Quanto à série de potências negativas, o seu domínio de convergência é vazio (caso em que não converge em nenhum ponto) ou da forma  $C_r = \{z; |z - z_o| > r\}$  onde  $r \geq 0$ .

Desta forma, para que 20.1 fique bem definida num aberto, precisamos ter  $r < R$ . Neste caso, o domínio de 20.1 é dado pelo anel

$$A_{r,R} = \{z; r < |z - z_o| < R\}.$$

É claro que pode acontecer de 20.1 convergir em pontos dos círculos de raio  $r$  ou  $R$ .

Deve estar claro que em  $A_{r,R}$  a série 20.1 define uma função analítica. No entanto, como  $A_{r,R}$  não é simplesmente conexo, a integral desta série não precisa se anular em todas as curvas fechadas contidas em  $A_{r,R}$ . Agora, se um contorno cujo traço esteja em  $A_{r,R}$  for tal que seu interior também esteja contido em  $A_{r,R}$  então, necessariamente, a integral da série sobre esta curva se anulará.

Vale observar que continuam válidos teoremas análogos aos de integração e derivação termo a termo para a série 20.1. O único cuidado a ser tomado na integração termo a termo é que o traço da curva sobre a qual a integração ocorre deve estar contido em  $A_{r,R}$ .

O próximo teorema diz que toda função analítica definida em um anel  $A_{r,R}$  possui representação em série de potências como em 20.1. Tal expansão é chamada de série de Laurent da função.

**Teorema 24 (Série de Laurent)** *Seja  $f$  analítica em  $A_{r,R} = \{z, r < |z - z_o| < R\}$ . Então, para todo  $z \in A_{r,R}$*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

e

$$\gamma(t) = z_o + s_o e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad r < s_o < R.$$

**Prova:** Dado  $z \in A_{r,R}$  tome  $s$  e  $S$  tais que  $r < s < S < R$ . Considere o contorno  $\Gamma$  abaixo que consiste nos arcos  $C_s, C_S$  dos segmentos  $l_1$  e  $l_2$ , percorrido no sentido anti-horário e contendo  $z$  em seu interior.

Os arcos são dados por

$$C_S(t) = z_o + S e^{it}, \theta_0 \leq t \leq \theta_0 + 2\pi - \varepsilon$$

$$C_s(t) = z_o + s e^{-it}, \theta_0 \leq t \leq \theta_0 + 2\pi - \varepsilon$$

Colocando

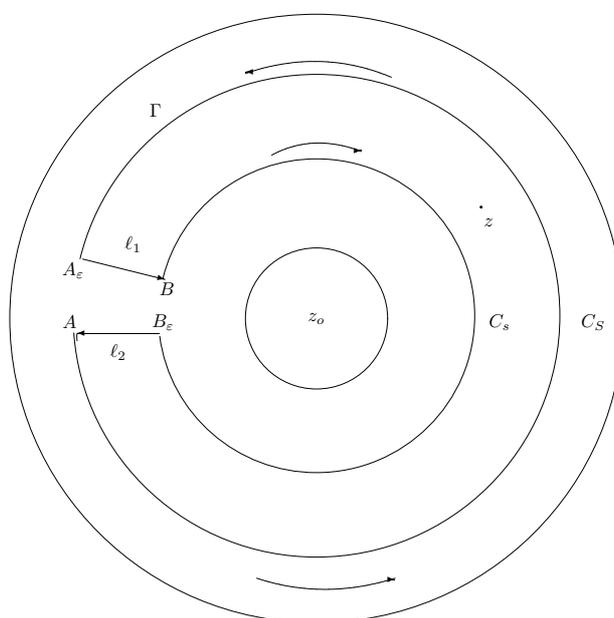
$$A = C(\theta_0), \quad A_\varepsilon = C(\theta_0 + 2\pi - \varepsilon)$$

$$B = C(\theta_0), \quad B_\varepsilon = C(\theta_0 + 2\pi - \varepsilon)$$

os segmentos  $l_1$  e  $l_2$  são dados por

$$l_1(t) = A_\varepsilon + t(B - A_\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$l_2(t) = B_\varepsilon + t(A - B_\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Como o interior do contorno  $\Gamma$  está contido em  $A_{r,R}$ , segue da fórmula de Cauchy que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{s'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Como a expressão acima é válida para todo  $\varepsilon > 0$ , tomando o limite quando  $\varepsilon$  tende a zero e usando o fato que a função  $g(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z)$  é contínua sobre cada um dos caminhos  $C_s$ ,  $C_{s'}$ ,  $l_1$  e  $l_2$ , obtemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{s'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

$\gamma_s(t) = z_0 + S e^{it}$ ,  $\gamma_{s'}(t) = z_0 + s e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Observe que  $B_\varepsilon \rightarrow B$  e  $B_\varepsilon \rightarrow B$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Agora, a integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

é desenvolvida como na prova do teorema de Taylor (veja 19.6), resultando em

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_o)^n \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{n+1}} d\zeta.$$

Colocando

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{n+1}} d\zeta, \quad (20.2)$$

obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n.$$

Analisemos agora a integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Temos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_o - (z - z_o)} = -\frac{1}{z - z_o} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_o}{z - z_o}}.$$

Como para  $\zeta \in \gamma_s^*$ , também é valido

$$\left| \frac{\zeta - z_o}{z - z_o} \right| = \frac{s}{|z - z_o|} < 1,$$

podemos lançar mão da série geométrica e obter

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_o} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - z_o}{z - z_o} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_o)^n}{(z - z_o)^{n+1}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_o)^n}{(z - z_o)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^N \frac{1}{(z - z_o)^{n+1}} \int_{\gamma_s} f(\zeta) (\zeta - z_o)^n d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_o)^n}{(z - z_o)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Tome  $M > 0$  tal que  $|f(\zeta)| \leq M$  para todo  $\zeta \in \gamma_s^*$ .

Usando a majoração como na proposição 25, segue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_o)^n}{(z - z_o)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta \right| &\leq \frac{M}{2\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\zeta - z_o|^n}{|z - z_o|^{n+1}} \ell(\gamma_s) \\ &= M \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{s^{n+1}}{|z - z_o|^{n+1}} = M \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( \frac{s}{|z - z_o|} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

que tende a zero quando  $N$  tende a infinito pois  $s < |z - z_o|$ .

Assim, passando ao limite a expressão 20.3 chegamos a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_o)^{n+1}} \int_{\gamma_s} f(\zeta)(\zeta - z_o)^n d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_o)^n} \int_{\gamma_s} f(\zeta)(\zeta - z_o)^{n-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_o)^n} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{-n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Colocando

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{-n+1}} d\zeta \quad (20.4)$$

vemos que

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_o)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_o)^{-n}, \quad n \geq 1.$$

Como as integrais que aparecem nas definições de  $a_n$  e  $a_{-n}$  (veja 20.2 e 20.4) continuam as mesmas quando substituimos  $\gamma_S$  e  $\gamma_s$  por  $\gamma_{s_o}$  dada por  $\gamma_{s_o}(t) = z_o + s_o e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , onde  $s_o \in (s, R)$ , chegamos ao resultado procurado. ■

**Observação 43** O círculo centrado em  $z_o$  e de raio  $s_o$  que aparece no enunciado do teorema anterior pode ser substituído por qualquer outro contorno contido em  $A_{r,R}$  que contenha  $z_o$  no seu interior.

Temos também o seguinte

**Corolário 11** Se  $f$  é como no teorema anterior (veja 24) e  $\gamma$  é um contorno em  $A_{r,R}$  contendo  $z_o$  no seu interior, então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i a_{-1},$$

onde  $a_{-1}$  é o coeficiente do termo  $(z - z_o)^{-1}$  da série de Laurent de  $f$  centrada em  $z_o$ .

**Observação 44** Mais adiante veremos um resultado mais geral do corolário acima.

**Observação 45** A série de Laurent de uma função  $f$  definida em  $A_{r,R}$  é única, isto é, se

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_o)^n, \quad z \in A_{r,R}$$

então  $a_n = b_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 34** Seja  $f$  como no teorema 24. O número  $a_{-1}$ , que é o coeficiente do termo  $(z - z_0)^{-1}$  da série de Laurent de  $f$  centrada em  $z_0$  é chamado de resíduo de  $f$  em  $z_0$  e é denotado por

$$a_{-1} = \text{Res } f|_{z=z_0}.$$

**Exemplo 98** Encontre a série de Laurent de  $f(z) = e^{1/z}$  em torno de  $z_0 = 0$  e dê seu domínio de convergência.

Como

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n, \quad w \in \mathbb{C},$$

vemos que

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}, \quad z \neq 0.$$

**Exemplo 99** Seja  $f$  a função definida em  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$  por  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ . Note que  $f$  é analítica em  $\Omega$ . Encontre

1. A série de MacLaurin de  $f$  e o seu raio de convergência.
2. A série de Laurent de  $f$  em  $A_{1,2} = \{z; 1 < |z| < 2\}$ .
3. A série de Laurent de  $f$  em  $A_{2,\infty} = \{z; 2 < |z|\}$ .

Temos

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

1. Usando a série geométrica vemos que

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Temos também

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z/2| < 1, \text{ isto é, } |z| < 2.$$

Como a intersecção do domínio de validade das duas séries acima é o disco  $|z| < 1$ , temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2^{n+2}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2^{n+2}}} = 1,$$

o raio de convergência da série é um.

2. Se  $1 < |z| < 2$  então  $|1/z| < 1$  e, pela série geométrica,

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1.$$

Como  $|z| < 2$  então  $|z/2| < 1$  e, pela série geométrica,

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2.$$

Assim, se  $z \in A_{1,2}$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{z^n}{2^{n+1}} \right).$$

3. Se  $|z| > 2$  então  $|2/z| < 1$  e também  $|1/z| < 1$ . Temos

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

e

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

Logo,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

□

**Exemplo 100** *Encontre a série de Laurent de*

$$f(z) = z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$$

*em torno da origem.*

*Como*

$$\operatorname{sen} w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}, \quad w \in \mathbb{C},$$

*temos*

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n-1}, \quad z \neq 0$$

*e daí,*

$$z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n+2} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} z^{-2k} = z^2 - \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} z^{-2k}. \quad (20.5)$$

**Exemplo 101** Calcule

$$\int_{\gamma} z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Segue do corolário 11 que

$$\int_{\gamma} z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = 2\pi i a_{-1}$$

onde  $a_{-1}$  é o resíduo de  $f$  em  $z_0 = 0$ .

Mas, de 20.5 temos  $a_{-1} = 0$ . Assim,

$$\int_{\gamma} z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = 0.$$

**Exemplo 102** Calcule

$$\int_{\gamma} \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Usando o teorema 24, temos

$$\int_{\gamma} \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}}{z^3} dz = \int_{\gamma} \frac{z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}}{z^{2+1}} dz = a_2 2\pi i,$$

mas por 20.5,  $a_2 = 1$ . Logo,

$$\int_{\gamma} \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

# Capítulo 21

## Singularidades

**Definição 35** Um ponto  $z_o \in \mathbb{C}$  é um ponto singular isolado (ou uma singularidade isolada) de uma função  $f$  se  $f$  não for analítica em  $z_o$  e existir  $r > 0$  tal que  $f$  é analítica em  $A_{0,r} = \{z; 0 < |z - z_o| < r\}$ .

**Exemplo 103** A origem é ponto singular isolado das seguintes funções:

$$f_1(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z^n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{e de} \quad f_3(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

**Definição 36** Se uma função não for analítica em  $z_o$  e, além disso, para todo  $r > 0$  existir um ponto em  $A_{0,r}$  onde  $f$  também não é analítica, diremos que  $z_o$  é uma singularidade não isolada (ou ponto singular não isolado) de  $f$ .

**Exemplo 104** A origem é uma singularidade não isolada da função  $f(z) = 1/\operatorname{sen}(1/z)$ . Basta ver que para cada  $r > 0$ , tomando  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n\pi < r$ ,  $f$  não é analítica em  $z = 1/n\pi$ .

**Definição 37** Um ponto singular isolado  $z_o$  de uma função  $f$  é classificado como

1. Removível quando existe um número complexo  $c$  tal que a função

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \neq z_o \\ c & \text{se } z = z_o \end{cases}$$

é analítica em um disco centrado em  $z_o$ . Em outras palavras, existe uma função analítica numa vizinhança de  $z_o$  que coincide com  $f$  nesta vizinhança a menos do ponto  $z_o$ .

2. Pólo quando existirem um inteiro positivo  $m$  e um número complexo  $c \neq 0$  tal que a função

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_o)^m f(z) & \text{se } z \neq z_o \\ c & \text{se } z = z_o \end{cases}$$

é analítica em um disco centrado em  $z_o$ . Em outras palavras, existe uma função analítica numa vizinhança de  $z_o$  que coincide com a função  $z \mapsto (z - z_o)^m f(z)$  nesta vizinhança a menos do ponto  $z_o$  e esta função é diferente de zero em  $z_o$ .

3. *Essencial quando não for removível nem pólo.*

**Observação 46** *Seja  $z_o$  um pólo de  $f$ . Suponha que  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ,  $c_1 \neq 0$  e  $c_2 \neq 0$  sejam tais que*

$$g_1(z) = \begin{cases} (z - z_o)^{m_1} f(z) & \text{se } z \neq z_o \\ c_1 & \text{se } z = z_o \end{cases} \quad e \quad g_2(z) = \begin{cases} (z - z_o)^{m_2} f(z) & \text{se } z \neq z_o \\ c_2 & \text{se } z = z_o \end{cases}$$

*sejam analíticas em um disco centrado em  $z_o$ .*

*Então, como  $c_1$  e  $c_2$  são diferentes de zero, temos*

$$\lim_{z \rightarrow z_o} (z - z_o)^{m_1 - m_2} = \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{(z - z_o)^{m_1}}{(z - z_o)^{m_2}} = \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{(z - z_o)^{m_1} f(z)}{(z - z_o)^{m_2} f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{g_1(z)}{g_2(z)} = \frac{c_1}{c_2} \neq 0.$$

*Mas isto só é possível quando  $m_1 = m_2$  e, conseqüentemente,  $c_1 = c_2$ .*

**Definição 38** *Diremos que a ordem de um pólo de uma função  $f$  é o (único) inteiro que aparece na definição 2.*

**Observação 47** *Se  $z_o$  é uma singularidade removível de  $f$  então existe o limite  $\lim_{z \rightarrow z_o} f(z)$ .*

**Observação 48** *Se  $z_o$  é um pólo de ordem  $m$  de  $f$  então o limite  $\lim_{z \rightarrow z_o} (z - z_o)^m f(z)$  existe e é diferente de zero.*

**Exemplo 105** *A origem é uma singularidade removível de  $f_1(z) = \text{sen } z/z$  pois a função  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$  é inteira (para verificar isto, use a proposição 37) e satisfaz*

$$g(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{\text{sen } z}{z}, \quad z \neq 0.$$

**Exemplo 106** *A origem é um pólo de ordem  $m$  da função  $f(z) = 1/z^m$ . Basta tomarmos  $g(z) = 1$  na definição de pólo.*

**Exemplo 107** *A origem é uma singularidade essencial de  $f(z) = e^{1/z}$ . Basta notar que para todo inteiro  $m \geq 0$ , o limite de  $f$  quando  $z$  tende a zero não existe. Basta ver que sobre o eixo real temos*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^m e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

## 21.1 Singularidades e Série de Laurent

Um modo simples de classificar uma singularidade isolada de uma função é através de sua série de Laurent. De fato, se  $z_o$  é uma singularidade isolada de uma função  $f$ , então, para algum  $r > 0$ , podemos escrever

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n, \quad z \in A_{0,r}.$$

Veamos como identificar uma singularidade removível. Sabemos que  $z_o$  é uma tal singularidade de  $f$  se existir uma função analítica definida em um disco centrado em  $z_o$  e que coincida com  $f$  a menos do ponto  $z_o$ . Esta função  $g$  por ser analítica coincide com sua série de Taylor centrada em  $z_o$ ,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_o)^n = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n.$$

Agora, sabemos que a série de Taylor é a série de Laurent onde os coeficientes das potências negativas são todos nulos. Desta forma, pela unicidade da série de Laurent, temos  $a_{-n} = 0$ ,  $n \geq 1$ .

Resumindo,  $z_o$  é uma singularidade removível de  $f$  se e somente se todos os coeficientes das potências negativas da sua série de Laurent se anulam, ou seja, a série de Laurent de  $f$  é uma série de Taylor.

Passemos agora aos pólos. Note que  $z_o$  é um pólo de ordem  $m$  de  $f$  se e somente se o mesmo  $z_o$  for uma singularidade removível de  $h(z) = (z - z_o)^m f(z)$  e  $\lim_{z \rightarrow z_o} h(z) = c \neq 0$ . Pelo que acabamos de aprender sobre singularidades removíveis, isto equivale à série de Laurent de  $h$  centrada em  $z_o$  ser uma série de Taylor, isto é,

$$h(z) = (z - z_o)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_o)^n, \quad \text{e } b_0 = \lim_{z \rightarrow z_o} h(z) \neq 0$$

em algum  $A_{0,r}$ .

Dividindo por  $(z - z_o)^m$ , obtemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_o)^{n-m} = \frac{b_0}{(z - z_o)^m} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{z - z_o} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{m+j}(z - z_o)^j$$

com  $b_0 \neq 0$ .

Assim, para que  $z_o$  seja um pólo de ordem  $m$  de  $f$  é necessário e suficiente que os coeficientes  $a_{-n}$  das potências negativas  $(z - z_o)^{-n}$  da série de Laurent de  $f$  em torno de  $z_o$  se anulem para  $n \geq m + 1$  e  $a_{-m} \neq 0$ .

Finalmente, para que  $z_o$  seja uma singularidade essencial de  $f$  é necessário e suficiente que na série de Laurent de  $f$  em torno de  $z_o$  haja uma infinidade de coeficientes  $a_{-n}$  não nulos das potências negativas  $(z - z_o)^{-n}$ .

**Exemplo 108** *A função*

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad 0 < |z| < 1$$

*apresenta na origem um pólo de ordem três.*

**Exemplo 109** *A função*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{-2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n = \dots + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{2^2} z^2 + \dots$$

*apresenta uma singularidade essencial na origem.*

**Exercício 17** *Uma singularidade isolada  $z_0$  de  $f$  é removível se e somente se existe o limite de  $f(z)$  quando  $z$  tende a  $z_0$ .*

# Capítulo 22

## O Teorema do Resíduo e Aplicações

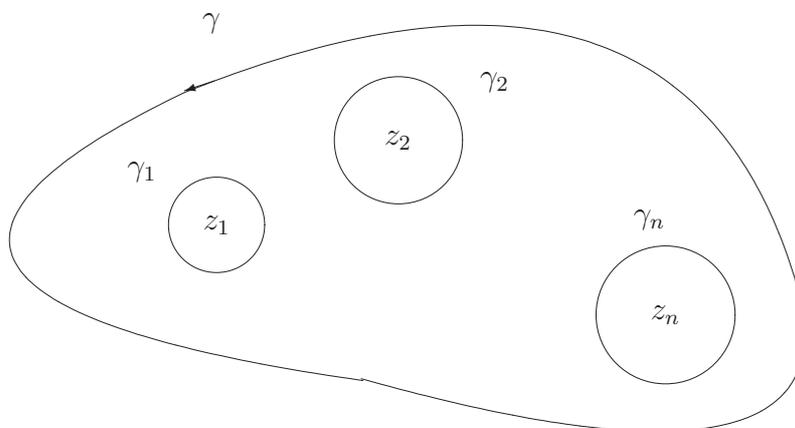
**Teorema 25 (Teorema do Resíduo)** *Seja  $f$  uma função analítica definida em um aberto  $\Omega$ . Se  $\gamma$  é um contorno contido em  $\Omega$  tal que no seu interior a função  $f$  tenha somente singularidades isoladas e apenas um número finito delas, denotadas por  $z_1, \dots, z_n$ , então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res } f|_{z=z_1} + \dots + \text{Res } f|_{z=z_n}] \quad (22.1)$$

com o contorno sendo percorrido no sentido anti-horário.

**Prova:** Tome círculos  $\gamma_j(t) = z_j + r_j e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , satisfazendo

- i) cada  $\gamma_j$  está contido no interior de  $\gamma$ ;
- ii) se  $j_1 \neq j_2$  então  $\gamma_{j_1}$  está contido no exterior de  $\gamma_{j_2}$ .



Então, por 15.3 temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

Aplicando o corolário 11 a cada uma das integrais do lado direito da igualdade acima, obtemos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res } f|_{z=z_1} + \cdots + \text{Res } f|_{z=z_n}].$$

■

Antes de aplicarmos o teorema acima no cálculo de integrais, vejamos como podemos proceder para o cálculo do resíduo de uma função  $f$  em um pólo  $z_o$ .

Se  $z_o$  é um pólo simples, isto é, de ordem um então a série de Laurent de  $f$  em torno deste ponto é da seguinte forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_o} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n. \quad (22.2)$$

Multiplicando a expressão acima por  $z - z_o$  e tomando o limite quando  $z$  tende a  $z_o$ , obtemos

$$\lim_{z \rightarrow z_o} (z - z_o) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_o} \left[ a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^{n+1} \right] = a_{-1} = \text{Res } f|_{z=z_o}.$$

**Exemplo 110** Encontre o resíduo de  $f(z) = \cos z/z$  na origem. Como  $\cos z = zf(z)$ , é analítica e  $\cos 0 = 1 \neq 0$ , vemos que 0 é um pólo simples de  $f$ . Assim,

$$\text{Res } f|_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1.$$

Se  $z_o$  é um pólo de ordem  $m$  então

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_o)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_o} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_o)^j, \quad \text{em } A_{0,r},$$

com  $a_{-m} \neq 0$ . Desta maneira, existe uma função analítica  $g$  definida em um disco centrado em  $z_o$  satisfazendo  $g(z_o) \neq 0$  e e

$$\begin{aligned} g(z) &= (z - z_o)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-m+n} (z - z_o)^n \\ &= a_{-m} + a_{-m+1} (z - z_o) + \cdots + a_{-1} (z - z_o)^{m-1} + \cdots \end{aligned} \quad (22.3)$$

Note que  $g(z_o) = a_{-m}$ .

Derivando 22.3,

$$g'(z) = a_{-m+1} + 2a_{-m+2}(z - z_o) + \cdots + (m - 1)a_{-1}(z - z_o)^{m-2} + \cdots$$

e calculando em  $z = z_o$ , obtemos  $g'(z_o) = a_{-m+1}$ .

Derivando mais uma vez,

$$g''(z) = 2a_{-m+2} + \cdots + (m - 1)(m - 2)a_{-1}(z - z_o)^{m-3} + \cdots$$

e calculando em  $z = z_o$ , obtemos  $g''(z_o) = 2a_{-m+2}$ .

Prosseguindo, obteremos

$$g^{m-1}(z_o) = (m-1)!a_{-1},$$

isto é, o resíduo de  $f$  em  $z_o$ , um pólo de ordem  $m$ , é dado por

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{m-1}(z_o) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_o)^m f(z)] \Big|_{z=z_o}.$$

**Exemplo 111** A função  $f(z) = \cos z/z^2$  tem um pólo de ordem dois na origem, pois  $z^2 f(z) = \cos z$ , que é inteira e  $\cos 0 = 1 \neq 0$ .

O resíduo de  $f$  na origem é dado por

$$\frac{d}{dz} [z^2 f(z)] \Big|_{z=0} = \frac{d}{dz} [\cos z] \Big|_{z=0} = -\sin 0 = 0.$$

A próxima proposição apresenta um modo de reconhecermos a ordem de um pólo.

**Proposição 38** Sejam  $f$  e  $g$  analíticas em um disco centrado em  $z_o$ . Se  $f(z_o) \neq 0$  e  $g$  tem um zero de ordem  $m$  em  $z_o$  então  $h = f/g$  tem um pólo de ordem  $m$  em  $z_o$ .

**Prova:** Como  $z_o$  é um zero isolado de  $g$ , temos que  $z_o$  é uma singularidade isolada de  $h$ .

Também podemos escrever

$$g(z) = (z-z_o)^m \varphi(z),$$

com  $\varphi$  analítica em um disco centrado em  $z_o$  e satisfazendo  $\varphi(z_o) \neq 0$ . Desta forma,

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{(z-z_o)^m \varphi(z)} = \frac{1}{(z-z_o)^m} \frac{f(z)}{\varphi(z)}.$$

E, assim,  $(z-z_o)^m h(z)$  que é igual a  $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ , coincide com uma função analítica num disco centrado e em  $z_o$  e  $\frac{f(z_o)}{\varphi(z_o)} \neq 0$ . Ou seja,  $z_o$  é um pólo de ordem  $m$  de  $h$ . ■

Mais geralmente, temos

**Proposição 39** Sejam  $f$  e  $g$  analíticas em um disco centrado em  $z_o$ . Se  $z_o$  é um zero de ordem  $n$  de  $f$  e um zero de ordem  $m$  de  $g$  então a função  $h = f/g$

1. tem um zero de ordem  $n - m$  em  $z_o$  se  $n > m$ ;
2. tem uma singularidade removível em  $z_o$  se  $n = m$ ;
3. tem um pólo de ordem  $m - n$  em  $z_o$  se  $m > n$ .

**Prova:** Por hipótese, podemos escrever  $f(z) = (z - z_0)^n \psi(z)$   $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$  com  $\psi$  e  $\varphi$  analíticas num disco centrado em  $z_0$  e tais que  $\psi(z_0) \neq 0$  e  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

Segue daí que, colocando  $\vartheta = \psi/\varphi$ ,

$$h(z) = \frac{(z - z_0)^n \psi(z)}{(z - z_0)^m \varphi(z)} = (z - z_0)^{n-m} \vartheta(z) = \frac{1}{(z - z_0)^{m-n}} \vartheta(z)$$

e os resultados seguem, analisando-se o sinal de  $n - m$ , pois  $\vartheta$  é analítica em um disco centrado em  $z_0$  e  $\vartheta(z_0) \neq 0$ . ■

**Observação 49** Temos um outro modo de calcularmos o resíduo no caso de um pólo simples. Poderíamos também ter utilizado a definição de pólo de ordem um, ou mesmo a expressão 22.2, para obter uma função analítica  $g$  tal que  $g(z_0) \neq 0$  com  $g(z) = (z - z_0)f(z)$ . Como  $g(z_0) = a_{-1} \neq 0$  podemos escrever

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z - z_0}{g(z)}.$$

Derivando esta expressão, obtemos

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)' = \frac{g(z) - (z - z_0)g'(z)}{[g(z)]^2}$$

que calculada em  $z_0$  fornece

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{1}{f(z)}\right)' = \frac{1}{g(z_0)} = \frac{1}{a_{-1}},$$

ou seja,

$$\text{Res } f|_{z=z_0} = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \left(\frac{1}{f(z)}\right)' \right]^{-1}.$$

**Exemplo 112** Calcule o resíduo de  $f(z) = \cot z$  na origem.

Como  $\cot z = \cos z / \sin z$ ,  $\cos 0 = 1$  e  $0$  é um zero simples da função seno, vemos que  $0$  é um pólo simples de  $f$ .

Temos

$$\left[ \left(\frac{1}{f(z)}\right)' \right]^{-1} = [(\text{tg } z)']^{-1} = [\sec^2 z]^{-1}.$$

Logo,  $\text{Res } f|_{z=0} = 1$ .

**Exemplo 113** Calcule

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)} dz$$

onde  $\gamma(t) = 2e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

A função

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)}$$

possui três pólos nos pontos  $z = -1$  (duplo, isto é, de ordem dois),  $z = i$  (simples) e  $z = -i$  (simples).

Note que como todos estes pontos estão contidos no interior de  $\gamma$ , pelo teorema do resíduo, temos

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)} dz = 2\pi i [\text{Res } f|_{z=-1} + \text{Res } f|_{z=i} + \text{Res } f|_{z=-i}].$$

Calculando o resíduo em  $z = -1$  :

$$\text{Res } f|_{z=-1} = \frac{d}{dz} [(z+1)^2 f(z)] \Big|_{z=-1} = \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{z^2+1} \right] \Big|_{z=-1} = \frac{1-z^2}{(z^2+1)^2} \Big|_{z=-1} = 0.$$

Calculando o resíduo em  $z = i$  :

$$\text{Res } f|_{z=i} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z}{(z+1)^2(z+i)} = \frac{i}{(i+1)^2 2i} = -\frac{i}{4}.$$

Calculando o resíduo em  $z = -i$  :

$$\text{Res } f|_{z=-i} = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i)f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z}{(z+1)^2(z-i)} = \frac{-i}{(-i+1)^2(-2i)} = \frac{i}{4}.$$

Logo,

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)} dz = 2\pi i \left[ 0 - \frac{i}{4} + \frac{i}{4} \right] = 0.$$

□

## 22.1 Integrais Impróprias Reais

O teorema do resíduo é útil no cálculo de integrais impróprias reais da forma  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

Vamos considerar o caso em que  $f$  é uma função racional do tipo  $f = p/q$ , onde  $p$  e  $q$  são polinômios com coeficientes reais satisfazendo

- i)  $q(x) \neq 0$  para todo  $x$  real;
- ii) se  $n$  é o grau de  $p$  e  $m$  é o grau de  $q$  então  $n \leq m - 2$ .

Sabemos de Cálculo II que as condições acima garantem a existência da integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx.$$

**Proposição 40** *Sejam  $p$  e  $q$  polinômios com coeficientes reais satisfazendo i) e ii) acima. Então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i [\text{soma dos res\u00edduos de } p(z)/q(z) \text{ nos p\u00f3los contidos no semiplano } \Im z > 0.]$$

**Prova:** Considere o contorno  $\gamma_R$  percorrido no sentido anti-hor\u00e1rio dado pela justaposi\u00e7\u00e3o dos caminhos  $\eta_R(t) = t$ ,  $-R \leq t \leq R$  e  $\sigma_R(t) = Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , onde  $R > 0$ . Veja 22.1.

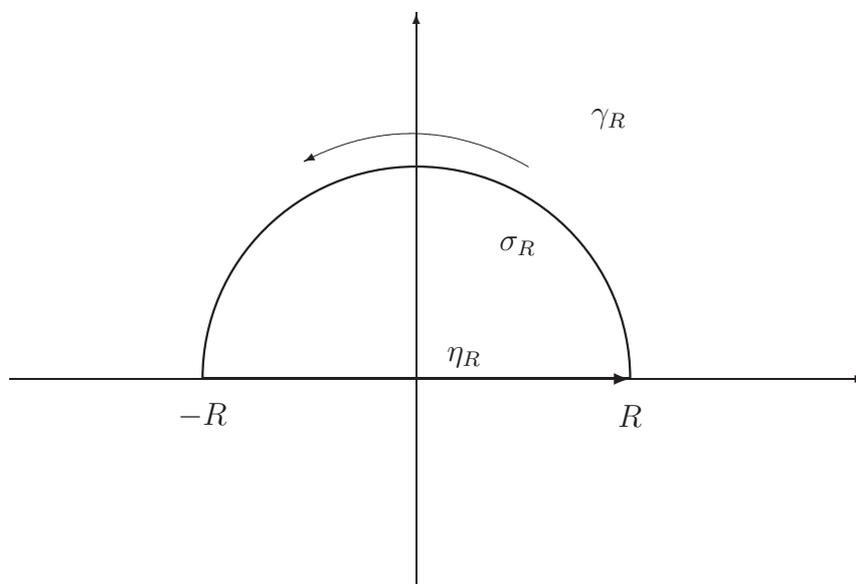


Figura 22.1: O contorno  $\gamma_R$

Pelo teorema do res\u00edduo,

$$\int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{\eta_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz + \int_{\sigma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz \quad (22.4)$$

$$= 2\pi i [\text{soma dos res\u00edduos de } p(z)/q(z) \text{ nos p\u00f3los contidos no interior de } \gamma_R.]$$

Note que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\eta_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{p(t)}{q(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(t)}{q(t)} dt,$$

pois sabemos que esta integral existe.

Coloque

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \quad \text{e} \quad q(z) = b_m z^m + \dots + b_0$$

onde  $n$  e  $m$  s\u00e3o os graus de  $p$  e  $q$ , respectivamente.

Se  $R > 1$   $z \in \sigma_R^*$ , isto \u00e9,  $|z| = R$ , ent\u00e3o

$$|p(z)| = |a_n z^n + \dots + a_0| \leq |a_n| |z|^n + \dots + |a_0| \leq (|a_n| + \dots + |a_0|) |z|^n = cR^n.$$

Também temos

$$\begin{aligned} |q(z)| &= |b_m z^m| \left| 1 + \frac{b_{m-1}}{b_m z} + \cdots + \frac{b_1}{b_m z^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m z^m} \right| \\ &\geq |b_m| R^m \left[ 1 - \frac{|b_{m-1}|}{|b_m| R} - \cdots - \frac{|b_1|}{|b_m| R^{m-1}} - \frac{|b_0|}{|b_m| R^m} \right]. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{|b_{m-1}|}{|b_m| R} - \cdots - \frac{|b_1|}{|b_m| R^{m-1}} - \frac{|b_0|}{|b_m| R^m} \right] = 1,$$

existe  $R_0 > 1$  tal que  $\forall R > R_0$  implica em

$$1 - \frac{|b_{m-1}|}{|b_m| R} - \cdots - \frac{|b_1|}{|b_m| R^{m-1}} - \frac{|b_0|}{|b_m| R^m} > \frac{1}{2}.$$

Logo, para  $R > R_0$ , temos

$$|q(z)| \geq \frac{|b_m|}{2} R^m, \quad \text{isto é,} \quad \frac{1}{|q(z)|} \leq c' \frac{1}{R^m}.$$

Desta forma, para todo  $R > R_0$ , temos

$$\left| \int_{\sigma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| \leq \max_{|z|=R} \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \ell(\sigma_R) \leq c c' \frac{R^n}{R^m} \pi R = \pi c c' R^{n-m+1}.$$

Como  $n - m + 1 \leq -2 + 1 = -1$ , vemos que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\sigma_R} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0.$$

Por fim, note que à medida que  $R$  cresce, o contorno  $\gamma_R$  engloba todos pólos de  $p/q$  que estão no semiplano  $\Im z > 0$ .

O resultado segue de 22.4 tomando o limite quando  $R \rightarrow +\infty$ . ■

**Exemplo 114** *Calcule*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

Tomando  $p(z) = 1$  e  $q(z) = z^4 + 1$ , vemos que as hipóteses da proposição 40 estão satisfeitas. Desta maneira, tudo o que precisamos saber é onde estão os pólos de  $p/q$  no semiplano  $\Im z > 0$ , e o resíduo desta função nestes pontos.

Os pólos de  $p/q$  são os pontos onde  $z^4 + 1 = 0$ . Das quatro raízes de  $z^4 = -1$ , isto é,

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad z_3 = e^{\frac{5\pi}{4}i} \quad \text{e} \quad z_4 = e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

as únicas que estão no semiplano  $\Im z > 0$  são  $z_1$  e  $z_2$ .

Como  $z^4 + 1$  se fatora em termos lineares como  $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$ , vemos que os pólos de  $1/(z^4 + 1)$  são simples.

Para calcularmos o resíduo, usaremos o método da observação 49, isto é,

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4 + 1} \Big|_{z=z_0} = [(z^4 + 1)']^{-1} \Big|_{z=z_0}.$$

Em  $z_1$ ,

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4 + 1} \Big|_{z=z_1} = [4z^3]^{-1} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1 + i).$$

Em  $z_2$ ,

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4 + 1} \Big|_{z=z_2} = [4z^3]^{-1} \Big|_{z=z_2} = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi}{4}i}} = \frac{1}{4e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 - i).$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \left[ -\frac{\sqrt{2}}{4}i \right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

**Exercício 18** Se  $p$  e  $q$  satisfazem as hipóteses da proposição 22.4 então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx =$$

$$= -2\pi i [\text{soma dos resíduos de } p(z)/q(z) \text{ nos pólos contidos no semiplano } \Im z < 0.]$$

Mais geralmente, temos

**Proposição 41** Se  $f$  é uma função analítica tendo somente singularidades isoladas, mas nenhuma delas sobre o eixo real e que satisfaz  $|f(z)| \leq M|z|^{-k}$ , onde  $k > 1$ , para todo  $z$  com módulo suficientemente grande e  $\Im z > 0$ , então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =$$

$$= 2\pi i [\text{soma dos resíduos de } f(z) \text{ nas singularidades contidas no semiplano } \Im z > 0].$$

**Prova:** A prova da proposição 22.4 pode ser usada com pequenas modificações para mostrar o que se pede. A verificação deste fato é deixada como exercício. ■

**Exemplo 115** Calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx. \tag{22.5}$$

Como o integrando é par, temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

A função  $f(z) = e^{iz}/(z^2 + 1)$  satisfaz as condições da proposição 41. Para ver isto, note que as únicas singularidades de  $f$  são os pólos simples em  $z_1 = i$  e  $z_2 = -i$ .

Também, se  $|z| > 2$ , e  $\Im z > 0$  temos

$$\frac{1}{2}|z|^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right)|z|^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |z|^2 - 1 > \frac{1}{2}|z|^2$$

e

$$\left| \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \right| = \frac{e^{-\Im z}}{|z^2 + 1|} \leq \frac{1}{|z^2 + 1|} \leq \frac{1}{|z|^2 - 1} \leq 2|z|^{-2}.$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \Big|_{z=i}.$$

Mas

$$\operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \Big|_{z=i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)e^{iz}}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}}{z + i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}.$$

Mas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx,$$

pois a função  $x \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$  é ímpar.

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

□

## 22.2 Outros Tipos de Integrais

Suponha que  $f(\theta) = R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$  seja uma função contínua em  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . A integral

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$$

pode ser calculada com o auxílio do teorema dos resíduos se fizermos a mudança  $z = e^{i\theta}$ . De fato, como  $z^{-1} = e^{-i\theta}$ , vemos que

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2zi}.$$

Além do mais,  $ie^{i\theta}d\theta = dz$ , ou seja,  $d\theta = \frac{1}{iz}dz$ . Assim, colocando  $\gamma(t) = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , e assumindo que a função

$$f(z) = \frac{1}{zi}R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right)$$

esteja definida em  $|z| \leq 1$ , seja analítica sobre  $\gamma^* = \{z; |z| = 1\}$  e tenha apenas um número finito de singularidades no interior de  $\gamma$  e que estas singularidades sejam todas isoladas, então

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta &= \int_{\gamma} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right) \frac{1}{iz} dz \\ &= 2\pi \left[ \text{soma dos resíduos de } \frac{1}{z}R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right) \text{ em } |z| < 1 \right]. \end{aligned}$$

**Exemplo 116** Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 - \sin \theta} d\theta.$$

A função

$$f(\theta) = \frac{1}{4 - \sin \theta}$$

é uma função nos moldes acima. Note que  $\sin \theta \neq 4$ .

Fazendo  $z = e^{i\theta}$ , obtemos

$$\sin \theta = \frac{z^2 - 1}{2zi} \quad \text{e} \quad d\theta = \frac{1}{iz} dz.$$

Assim, colocando  $\gamma(t) = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , obtemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 - \sin \theta} d\theta = \int_{\gamma} \frac{1}{4 - \frac{z^2-1}{2zi}} \frac{1}{iz} dz = \int_{\gamma} \frac{2}{-z^2 + 8zi + 1} dz. \quad (22.6)$$

Note que

$$-z^2 + 8zi + 1 = 0 \Leftrightarrow z = (4 + \sqrt{15})i \quad \text{ou} \quad z = (4 - \sqrt{15})i.$$

Como  $|(4 + \sqrt{15})i| = 4 + \sqrt{15} > 1$  e  $|(4 - \sqrt{15})i| = 4 - \sqrt{15} < 1$ , vemos que o único pólo do integrando de 22.6 que está no interior do contorno é  $(4 - \sqrt{15})i$ . O resíduo neste ponto é

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[ \frac{2}{-z^2 + 8zi + 1} \right] \Big|_{z=(4-\sqrt{15})i} &= 2 \lim_{z \rightarrow (4-\sqrt{15})i} \frac{z - (4 - \sqrt{15})i}{-z^2 + 8zi + 1} \\ &= -2 \lim_{z \rightarrow (4-\sqrt{15})i} \frac{1}{z - (4 + \sqrt{15})i} = \frac{1}{\sqrt{15}i}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 - \sin \theta} d\theta = \frac{2}{\sqrt{15}} \pi.$$

□

Terminamos com o cálculo da seguinte integral que não se encaixa em nenhum dos exemplos anteriores.

**Exemplo 117** Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} dx.$$

Considere a função

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1}.$$

Considere o contorno  $\gamma_R$  percorrido no sentido anti-horário dado pela justaposição dos caminhos  $\eta_R(t) = t$ ,  $-R \leq t \leq R$  e  $\sigma_R(t) = Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , onde  $R > 0$ . Veja 22.1. Como o único pólo de  $f$  no interior do contorno  $\gamma_R$  é  $z = i$ , pelo teorema do resíduo, temos

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res} f(z)|_{z=i} &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{ze^{iz}}{z+i} = \frac{\pi}{e} i = \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz \\ &= \int_{\eta_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz + \int_{\sigma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz = \int_{-R}^R \frac{te^{it}}{t^2 + 1} dt + \int_{\sigma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz \\ &= \int_{-R}^R \frac{t \cos t}{t^2 + 1} dt + i \int_{-R}^R \frac{t \operatorname{sen} t}{t^2 + 1} dt + \int_{\sigma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz \\ &= i \int_{-R}^R \frac{t \operatorname{sen} t}{t^2 + 1} dt + \int_{\sigma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz, \end{aligned}$$

pois  $t \mapsto t \cos t / (t^2 + 1)$  é ímpar.

Se  $R > 1$  e  $z \in \sigma_R^*$ , isto é,  $z = Re^{i\theta} = R \cos \theta + iR \operatorname{sen} \theta$ , temos

$$\left| \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} \right| = \left| \frac{z}{z^2 + 1} \right| |e^{iz}| = \frac{|z|}{|z^2 + 1|} e^{\Re(iz)} = \frac{|z|}{|z^2 + 1|} e^{-R \operatorname{sen} \theta} \leq \frac{R}{R^2 - 1} e^{-R \operatorname{sen} \theta}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta} e^{iRe^{i\theta}}}{R^2 e^{i2\theta} + 1} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{R^2}{R^2 - 1} \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta = \frac{2R^2}{R^2 - 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta, \end{aligned}$$

pois

$$\int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta \quad (22.7)$$

e substituindo  $\alpha = \pi - \theta$  na segunda integral acima, obtemos

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R \operatorname{sen}(\pi - \alpha)} d\alpha = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R \operatorname{sen} \alpha} d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} \alpha} d\alpha.$$

Substituindo a última integral em 22.7, chegamos a

$$\int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta.$$

Mas, se  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  temos  $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ . Para ver isto, considere a função

$$\varphi(\theta) = \sin \theta - 2\theta/\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Como  $\varphi(0) = 0 = \varphi(\pi/2)$  e

$$\varphi''(\theta) = -\sin \theta < 0 \quad \text{em } 0 < \theta < \pi/2,$$

vemos que  $\varphi$  é uma função cuja concavidade é voltada para baixo no intervalo  $[0, \pi/2]$  e se anula nos extremos deste intervalo. Portanto,  $\varphi(\theta) \geq 0$  em  $[0, \pi/2]$ , como queríamos verificar.

Voltando à nossa integral, temos

$$\left| \int_{\sigma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{2R^2}{R^2 - 1} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \frac{2R^2}{R^2 - 1} \int_0^{\pi/2} e^{-R \frac{2\theta}{\pi}} d\theta = \frac{1}{\pi} \frac{R}{R^2 - 1} (1 - e^{-R})$$

que tende a zero quando  $R$  tende a  $+\infty$ .

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \operatorname{sen} t}{t^2 + 1} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{t \operatorname{sen} t}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{e}.$$

# Índice Remissivo

- caminho, 65
  - comprimento de, 72
- conjunto
  - aberto, 25
  - conexo, 52
  - fechado, 25
  - fronteira, 25
- continuidade, 40
- contorno, 65
- curva, 63
  - comprimento de, 72
  - interior, 66
  - justaposição de, 65
  - regular, 64
  - simples, 63
  - suave, 64
- derivada, 41
- distância, 13
- equações de Cauchy-Riemann, 44
  - forma polar, 47
- fórmula de Cauchy, 85
  - para derivadas, 87
- fórmula de De Moivre, 19
- função
  - analítica, 51
  - contínua, 40
  - cosseno, 32
  - cosseno hiperbólico, 35
  - derivada, 41
  - exponencial, 30
  - harmônica, 93
  - holomorfa, 51
  - inteira, 51
  - limite, 37
  - polinomial, 29
  - seno, 32
  - seno hiperbólico, 35
- integral, 67
  - de linha, 69
- limite, 37
- logaritmo, 59
- número complexo, 9
  - argumento, 17
  - conjugado, 13
  - forma polar, 17
  - módulo, 13
  - parte imaginária, 11
  - parte real, 11
  - raízes, 22
- pólo, 127
  - ordem de, 128
  - simples, 132
- poligonal, 52
- ponto interior, 25
- ponto singular
  - essencial, 128
  - isolado, 127
  - não isolado, 127
  - removível, 127
- potenciação, 61
- primitiva, 79
- ramo
  - da potência, 61
  - da raiz  $n$ -ésima, 58
  - do logaritmo, 60

- principal da potência, 61
- principal da raiz  $n$ -ésima, 58
- principal do logaritmo, 60
- resíduo, 124
- série, 98
  - convergente, 98
  - de Laurent, 120
  - de MacLaurin, 114
  - de potências, 101
  - de potências, centro de, 101
  - de potências, derivação de, 109
  - de potências, integração de, 107
  - de potências, raio de convergência, 104
  - de Taylor, 112
- seqüência, 97
  - convergente, 97
- singularidade
  - essencial, 128
  - isolada, 127
  - não isolada, 127
  - removível, 127
- teorema
  - de Cauchy-Goursat, 75
  - de derivação termo a termo, 109
  - de Green, 75
  - de integração termo a termo, 107
  - de Liouville, 91
  - de Morera, 90
  - do resíduo, 131
  - fundamental da álgebra, 91
- zero isolado, 115

# Referências Bibliográficas

- [C] CHURCHILL, R. V. Variáveis Complexas e Aplicações, Editora McGraw-Hill, 1975, São Paulo.