CM 068 - variáveis Complexas

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

PROVA 1 - 14/04/2017

1. Todas as respostas devem ser justificadas.
2. Resolva apenas 5 questões.
3. Cada questão tem valor de 20 pontos.
4. As equações de Cauchy-Riemann são: $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$

Exercício 1 *Resolva as seguintes equações:*

(a) $z^3 = 8$. *(b)* $exp(z) = w$. *(c)* $z - \overline{z} = 1$.

Exercício 2 *Quais das funções abaixo são holomorfas?*

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(z) = |z|^2$.

(b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por* $g(z) = e^{z^2}$.

Exercício 3 *Suponha* $f = u + iv$ *uma função analítica em uma região* $G \subset \mathbb{C}$ *satisfazendo*

$$v(x, y) = [u(x, y)]^2, \ \forall z = x + iy \in G.$$

Mostre que f *é constante em* G.

Exercício 4 *Sejam* A *um conjunto aberto de* $\mathbb{C}$ *e* $f : A \to \mathbb{C}$ *uma função analítica. Defina o conjunto aberto* $A^* = \{\overline{z};\ z \in A\}$ *e a função* $g : A^* \to \mathbb{C}$ *dada por* $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. *Prove que* g *é analítica e que vale*

$$g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}.$$

Exercício 5 *Considere a função* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(z) = \exp(z)$. *Fixado um número* $a \in \mathbb{R}$ *determine a imagem do conjunto*

$$R = \{z \in \mathbb{C};\ Re(z) = a\}$$

pela função f *e faça um esboço dessa imagem.*

Exercício 6 *Sejam* $G \subset \mathbb{C}$ *uma região e* $f : G \to \mathbb{C}$ *uma função contínua satisfazendo* $e^{f(z)} = 1$, *para todo* $z \in G$. *Mostre que* f *é uma função constante cujo valor pertece ao conjunto* $\{2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\}$.