Introdução

Os números mais simples são os inteiros positivos: $1, 2, 3$, etc., usados para contar. Estes são chamados *números naturais* e conhecidos há tanto milênios que o famoso matemático Kronecker supostamente disse: "Deus criou os números naturais; todo o resto é obra do homem".

As necessidades básicas do dia a dia levaram à introdução de frações como $1/2$, $2/3$, $5/4$, etc. Estes números são chamados *racionais*, não porque sejam "razoáveis", mas porque são razões de números inteiros.

Podemos pensar nos números naturais como representados por pontos de uma reta (Fig. 1), cada ponto separado do anterior por uma unidade de comprimento como, por exemplo, o número de centímetros ao longo de uma fita métrica.

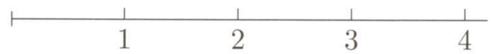

Figura 1

Podemos representar os números racionais na mesma reta (Fig. 2) e pensar neles como medindo frações de comprimento.

Muito mais tarde, os hindus inventaram o importantíssimo número 0 e, no início dos tempos modernos, algebristas italianos inventaram números negativos. Estes também podem ser representados em uma reta, como se vê na Fig. 3.

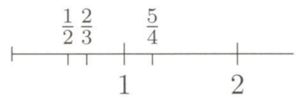

Figura 2

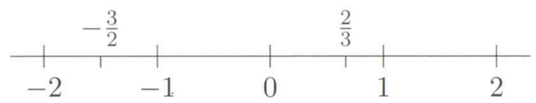

Figura 3

Quando os matemáticos falam de números racionais, eles querem dizer números inteiros positivos ou negativos (que podem ser representados como razões; por exemplo, $2 = 2/1 = 6/3$, etc.), zero e frações ordinárias. Os números inteiros positivos, negativos e zero são também chamados *inteiros*. Portanto, a classe dos números racionais contém a classe dos inteiros.

A descoberta de que as frações não são suficientes para as necessidades da geometria foi feita pelos gregos, há mais de 2500 anos. Eles observaram, para a sua surpresa e consternação, que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário (Fig. 4) não pode ser expresso por nenhum número racional (vamos provar isso no Capítulo 3). Hoje em dia, expressamos esse fato dizendo que a raiz quadrada de 2 (que, de acordo com o Teorema de Pitágoras, é o comprimento da diagonal de um tal quadrado) é um *número irracional.* Isso significa, geometricamente, não existir uma unidade comum de comprimento, uma tira por mais curta que seja, que possa ser colocada um número inteiro de vezes sobre o lado e a diagonal de um quadrado. Em outras palavras, não existe unidade de comprimento, não importa quão pequena, da qual o lado e a diagonal de um quadrado sejam múltiplos inteiros. Para os gregos, essa foi uma descoberta embaraçosa, pois em muitas de suas demonstrações geométricas eles supunham que dois segmentos quaisquer sempre admitiam uma unidade de comprimento comum. Havia, portanto, uma falha na estru-

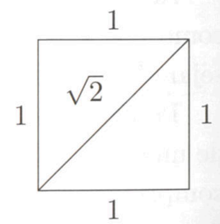

Figura 4

tura lógica da Geometria Euclidiana – a discussão sobre razões e proporções de comprimentos estava incompleta. Na Seção 3.7 mostraremos como essa falha pode ser sanada e a teoria da proporção completada.

Analogamente, o perímetro de uma circunferência é um múltiplo irracional do diâmetro, a saber π. Outros números irracionais aparecem quando tentamos calcular os valores de algumas funções básicas em matemática. Por exemplo, o cálculo dos valores de uma função trigonométrica, digamos $\operatorname{sen} x$, para x igual a $60°$, nos leva ao número irracional $\sqrt{3}/2$; analogamente, o cálculo do valor da função logarítmica $\log x$, mesmo para valores racionais de x, quase sempre nos leva a números irracionais. Apesar de os números que figuram em tabelas de logaritmos e funções trigonométricas serem ostensivamente racionais, na realidade são apenas aproximações racionais dos verdadeiros valores que, com raras exceções, são irracionais.

Fica claro, então, que números irracionais ocorrem naturalmente e de várias maneiras na matemática elementar.

Os *números reais* são todos os números racionais e irracionais e formam o sistema de números central da matemática. Em geometria, qualquer discussão de comprimentos, áreas ou volumes leva imediatamente aos números reais. A geometria oferece, de fato, um esquema simples e intuitivo para descrever os números reais, i.e., os números necessários para medir todos os possíveis comprimentos em termos de uma dada unidade de comprimento. Se novamente considerarmos a representação dos números como pontos de uma reta, veremos que, apesar de qualquer segmento, não importa quão pequeno, conter uma infinidade de pontos racionais, existem muitos outros pontos (tais como $\sqrt{2}, \pi$, etc.) medindo comprimentos, que não podem ser expressos por números racionais. Mas se considerarmos os números reais, todo ponto da reta corresponderá a exatamente um número real e todo número real corresponderá a exatamente um ponto da reta. O fato de *todos* os comprimentos poderem ser expressos como números reais é conhecido como a *propriedade de completude* desses números e todo o desenvolvimento da Análise Matemática depende desta propriedade.

Portanto, há duas espécies de números reais: os racionais e os irracionais. Existe uma outra separação dos números reais, muito mais recente, em duas categorias: os números *algébricos* e os números *transcendentes.* Um número real se diz algébrico se satisfizer alguma equação algébrica com coeficientes inteiros. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é um número algébrico, porque satisfaz $x^2-2=0$. Se um número não for algébrico, ele será transcendente. Com essa definição, não fica claro que existam números transcendentes, isto é, números não algébricos. Em 1851, o matemático francês Liouville estabeleceu a existência de números transcendentes. Ele o fez exibindo certos números que provou serem não algébricos. No Capítulo 7, vamos seguir o método de Liouville para estabelecer a existência de números transcendentes.

Mais tarde, ainda no século XIX, provou-se que π é um número transcendente e esse resultado resolveu, de vez, um problema antigo de construção geométrica conhecido como a "quadratura do círculo". Isso será discutido no Capítulo 5. Um outro avanço, no século XIX, foi feito por Cantor, um matemático alemão, que demonstrou a existência de números transcendentes por um caminho inteiramente diferente. Apesar de o método de Cantor, em contraste com o de Liouville, não exibir um número transcendente de forma explícita, ele tem a vantagem de demonstrar que, em certo sentido, há muito mais números transcendentes do que algébricos. Uma tal afirmação requer a comparação de classes infinitas, pois existem infinitos números algébricos e infinitos números transcendentes. Essas ideias fogem um pouco do tema central deste livro, razão porque a prova da existência de números transcendentes, de Cantor, é dada no Apêndice C.

O plano do livro é apresentar os números naturais, inteiros, racionais e reais nos primeiros três capítulos. Em seguida, no Capítulo 4, é dado um procedimento padrão para identificar números irracionais. O Capítulo 5 trata dos chamados números trigonométricos e logarítmicos, isto é, daqueles números cujos valores são dados aproximadamente nas tabelas de logaritmos e de funções trigonométricas. O Capítulo 6 trata do problema de quão próximo é possível chegar de um número irracional, usando números racionais. Esse capítulo é mais difícil e especializado do que os anteriores. Foi incluído para dar ao leitor uma oportunidade de explorar argumentos matemáticos de natureza nova.

O Capítulo 7 e o Apêndice C oferecem duas demonstrações, inteiramente independentes, da existência de números transcendentes: o Capítulo 7, pelo método de Liouville e o Apêndice C, pelo método de Cantor. As técnicas são

acentuadamente diferentes e será compensador acompanhar cada uma. A demonstração do Capítulo 7 é carregada de pormenores técnicos inevitáveis e, ainda mais do que em capítulos anteriores, o leitor terá que usar lápis e papel para acompanhar os argumentos. De fato, é possível que o leitor ache os Capítulos de 1 a 5 não muitos complicados, o Capítulo 6 bastante difícil e o Capítulo 7 virtualmente impossível. Se esse for o caso, sugere-se ao leitor adiar o estudo do Capítulo 7 até adquirir maior experiência matemática. Por outro lado, quem encontrar pouca dificuldade nos Capítulos 1 a 5, talvez prefira ler o Capítulo 7 antes do Capítulo 6. Na verdade, o Capítulo 7 é independente do resto do livro, salvo por um resultado bem conhecido sobre desigualdades, dado na Seção 6.1.

O Apêndice C pode ser lido independentemente do Capítulo 7, mas o Teorema 7.2 será necessário. Para o leitor não familiarizado com a teoria dos conjuntos, as ideias do Apêndice C parecerão muito novas.

Para a leitura do livro não é necessário o Apêndice A, sobre a existência de infinitos números primos, que foi incluído por sua pertinência ao tema central e por ser do tempo de Euclides essa demonstração tão elegante. Por outro lado, o Apêndice B, sobre o teorema fundamental da aritmética, é essencial para nossa argumentação, principalmente nos Capítulos 4 e 5; a demonstração deste teorema foi relegada a um apêndice por ser um pouco mais longa e difícil do que as demais demonstrações dos primeiros cinco capítulos. O leitor matematicamente inexperiente poderá simplesmente acreditar no teorema fundamental da aritmética.

No fim das seções há muitos exercícios; o leitor deverá tentar fazer um bom número para testar sua compreensão do texto. (Não se pode aprender matemática, vendo como os outros a fazem!) Alguns problemas têm uma estrela, indicando maior dificuldade. O leitor não deve necessariamente se sentir frustrado se não conseguir resolver todos esses. Muitas vezes, o sucesso vai depender de sua maturidade matemática, isto é, de sua familiaridade com uma coleção bastante ampla de procedimentos matemáticos provenientes de seus outros estudos de matemática. Respostas dos problemas, bem como sugestões para resolver alguns mais difíceis, são dadas no fim do livro.

O sistema de números reais – racionais e irracionais – pode ser abordado em vários níveis de *rigor* (a palavra "rigor" é o termo técnico usado em matemática para indicar o cuidado lógico no desenvolvimento de um tópico, em contraste com uma posição mais *intuitiva*, na qual afirmações são aceitas como corretas por parecerem razoáveis ou evidentes). É nossa intenção fazer uma apresentação do assunto de um modo bastante intuitivo. Por isso, não oferecemos axiomas ou postulados como base para o estudo. O futuro matemático a cujas mãos este livro venha a chegar, desejará examinar, algum dia, um desenvolvimento axiomático cuidadoso do sistema de números reais. Por quê? O motivo é que nosso ponto de vista aqui é tão descritivo que deixará algumas questões básicas sem resposta. Por exemplo, no Capítulo 3 dizemos que os números reais podem ser descritos desse modo, daquele modo e de outro modo. Mas como poderemos ter certeza de que esses vários modos são descrições do mesmo sistema? Para dar um exemplo mais concreto de uma questão que não respondemos neste livro: como sabemos que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ou que $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$? Para responder tais questões, é necessário que seja dada uma definição precisa das operações com números reais. Isso não será feito aqui, pois não é tão simples como possa parecer e é melhor adiar esse tipo de tratamento até que o estudante não só tenha maior habilidade matemática, mas também possa apreciar melhor a natureza e o significado de uma demonstração matemática. Como disse o matemático americano E. H. Moore: "Sufficient unto the day is the rigor thereof" (esse rigor é suficiente para hoje).

"A natureza e o significado de uma demonstração matemática!" Não é possível dar aqui e agora uma descrição precisa do que seja uma demonstração e nisso reside um dos maiores enigmas para principiantes em matemática. Se a natureza de uma demonstração não pode ser descrita ou formulada em detalhe, como pode alguém aprender a fazer demonstrações? Para usar uma analogia super simplificada: aprende-se a fazer demonstrações do mesmo modo pelo qual uma criança aprende a identificar cores, isto é, observando alguém identificar coisas verdes, azuis, etc. e imitando, então, o que acabou de observar. Pode haver falhas no início, causadas por uma compreensão inadequada das categorias e padrões, mas finalmente quem está aprendendo pega o jeito. E é o que acontece com o mistério das demonstrações matemáticas. Com intuito de familiarizar o leitor com noções

e métodos de demonstração, algumas de nossas discussões tentam esclarecer padrões de técnicas de demonstração. Assim, apesar de não termos uma receita infalível para distinguir demonstrações válidas das não válidas, falamos do assunto e esperamos que o leitor, antes do término do livro, não só reconheça demonstrações válidas, como também encontre prazer em construir algumas por si próprio.