Roberto Romano

CÁLCULO DIFERENCIAL e INTEGRAL

(Funções de uma Variável)

Volume I

atlas

0

Algumas Notações e Noções da Teoria dos Conjuntos

0.1. SÍMBOLOS

Vamos usar os símbolos $\forall$, $\exists$, $\Longrightarrow$ e $\Longleftrightarrow$ com os seguintes significados:

a) $\forall$: "qualquer que seja" ou "para todo";
b) $\exists$: "existe";
c) $\Longrightarrow$: "implica" ou "acarreta" ou "se..., então...";
d) $\Longleftrightarrow$: "é equivalente a" ou "se, e somente se" ou possui o significado de uma dupla implicação ($\Longrightarrow$ e $\Longleftarrow$).

Os símbolos $\forall$ e $\exists$ são chamados de quantificadores universal e existencial, respectivamente.

0.2. NOTAÇÕES

Sejam A e B partes de um conjunto E, chamado universo. Vamos usar as seguintes notações:

ϕ = conjunto vazio

$a \in A$ (lê-se: "a pertence a A") se a é elemento de A;

$a \notin A$ (lê-se: "a não pertence a A") se a não é elemento de A;

$A \subset B$ (lê-se: "A contido em B") quando A é subconjunto ou parte de B, isto é, quando todo elemento de A é elemento de B;

$A \not\subset B$ (lê-se: "A não contido em B") a negação de $A \subset B$;

$A \cup B$ (lê-se: "A u B") = $\{x \in E \mid x \in A$ ou $x \in B\}$ = reunião de A e B;

$A \cap B$ (lê-se: "A inter B") = $\{x \in E \mid x \in A$ e $x \in B\}$ = intersecção de A e B;

$A - B$ (lê-se "A menos B") = $\{x \in E \mid x \in A$ e $x \notin B\}$ = diferença entre A e B;

Se $A \subset B$, indica-se com

$\complement_B A$ (lê-se complementar de A com relação a B) $= B - A$;

No caso em que $A \subset B = E =$ *universo* usa-se a notação mais simples

$$\complement A = E - A$$

O conjunto cujos elementos são $a, b, c, ..., r, s$ será indicado com a notação

$$\{a, b, c, ..., r, s\}$$

Assim, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ representa o conjunto cujos elementos são 1, 2, 3, 4 e 5.

0.3. NOÇÃO DE VARIÁVEL

Chama-se *variável* ou elemento genérico do conjunto A um símbolo que representa indistintamente um elemento qualquer do conjunto. Um elemento a de A é denominado um valor da variável.

Exemplo

Se $A = \{5, 2, 1, 8, 20\}$, escrevemos $x \in A$ para dizer que x é variável em A, e isto significa que x pode assumir um dos valores 5, 2, 1, 8 ou 20.

A igualdade $x = y$ significa que x e y designam o mesmo elemento. Se é falso que $x = y$, escreve-se $x \neq y$.

0.4. SUBCONJUNTO DEFINIDO POR UMA PROPRIEDADE

Seja $P(x)$ uma sentença ou asserção que contém a variável x do conjunto A. Ela se denomina uma *propriedade* do elemento genérico de A quando $P(x)$ admite, para cada valor da variável, exclusivamente o valor verdadeiro ou o valor falso, sem nenhuma outra possibilidade (ou seja, exclui-se a possibilidade de $P(x)$ admitir os dois valores ao mesmo tempo).

Exemplo 1

Se $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, a sentença $P(x): x < 3$ é uma propriedade do elemento genérico $x \in A$, pois $x < 3$ admite, para cada x de A, exclusivamente o valor verdadeiro ou o valor falso. De fato $P(1)$ e $P(2)$ são verdadeiras e $P(3)$, $P(5)$ e $P(8)$ são falsas.

Exemplo 2

Se $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, a asserção $P(x): x^2 = 1$ é uma propriedade do elemento genérico $x \in A$, pois $P(-1)$ e $P(1)$ são verdadeiras e $P(-2)$, $P(0)$ e $P(2)$ são falsas, sem outras alternativas.

Exemplo 3

Se $A = \{1, 2\}$, a sentença $P(x): x^2 = -1$ é uma propriedade do elemento genérico x de A pois $P(1)$ e $P(2)$ são ambas falsas.

Uma propriedade $P(x)$ do elemento genérico x de A determina uma parte de A, precisamente a parte B formada pelos elementos x de A tais que $P(x)$ é verdadeira, e escreve-se:

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}$$

(Lê-se: "conjunto dos $x \in A$ tais que $P(x)$ é verdadeira".)

Se não existe $x \in A$ tal que $P(x)$ seja verdadeira, diz-se que o conjunto $\{x \in A \mid P(x)\}$ é vazio, isto é, é um conjunto que não contém nenhum elemento. Admitimos que o conjunto vazio é único e está contido em qualquer outro conjunto. Vamos indicá-lo com a letra ϕ.

Exemplo 4

Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Temos:

a) $B = \{x \in A \mid x \geqslant 2\} = \{2, 3\}$
b) $B = \{x \in A \mid x^2 \geqslant 1\} = A$
c) $B = \{x \in A \mid x > 3\} = \phi$

0.5. PRODUTO CARTESIANO

Dados dois elementos distintos a e b sabemos que $\{a, b\} = \{b, a\}$, isto é, num conjunto, a ordem dos elementos que nele comparecem não é levada em consideração. Queremos construir com a e b um novo objeto matemático em que a ordem desses elementos seja levada em conta e que, por isso, será denominado par ordenado.

Par Ordenado

Chama-se par ordenado de primeiro elemento a e segundo elemento b, e indica-se com (a, b) o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, ou seja, $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

É fácil provar a seguinte propriedade:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$$

PRODUTO CARTESIANO

Dados dois conjuntos não vazios, A e B, o conjunto

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

é chamado produto cartesiano de A por B ($A \times B$ lê-se "A cartesiano B" ou "A vezes B"). Se A ou B é vazio, definimos

$$A \times B = \phi$$

Exemplo 1

Se $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$, temos

$$A \times B = \{(1, 2)\}$$

$$B \times A = \{(2, 1)\}$$

Por este exemplo vê-se que o produto cartesiano não é, em geral, comutativo. Temos que $A \times B = B \times A$ se $A = B$ ou se um dos fatores é vazio.

Exemplo 2

Se $A = \{0, 2\}$ e $B = \{1, 3\}$, temos

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 3), (2, 1), (2, 3)\}$$

Exemplo 3

Se $A = \{\phi, a, b\}$ e $B = \{\phi, a\}$, temos

$$A \times B = \{(\phi, \phi), (\phi, a), (a, \phi), (a, a), (b, \phi), (b, a)\}$$

1

Os Conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. O Conjunto $\mathbb{R}$ dos Números Reais. As Propriedades de Corpo Ordenado e Completo. Representação Geométrica de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sobre uma Construção de $\mathbb{R}$.

1.1. INTRODUÇÃO

Comecemos fazendo referência aos conjuntos:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ — conjunto dos números naturais
$\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ — conjunto dos números inteiros não negativos
$\mathbf{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, ...\}$ — conjunto dos números inteiros não positivos
$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_+ \cup \mathbf{Z}_-$ — conjunto dos números inteiros (relativos)
$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0 \right\}$ — conjunto dos números racionais (relativos)

Vamos falar sobre $\mathbf{N}$ o essencial para pôr em evidência o *Princípio de Indução Finita*. Os outros conjuntos $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$ são supostos conhecidos.

Em seguida, faremos uma apresentação axiomática do conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais. Como não é uma teoria construtiva, não se diz o que é um número real. O que se faz é dizer que $\mathbf{R}$ é um conjunto de números que satisfaz a tais e tais propriedades que são os axiomas. Estabeleceremos um *elenco mínimo* de axiomas que os elementos de $\mathbf{R}$ devem satisfazer, de modo que esse elenco caracterize $\mathbf{R}$, ou seja, todo conjunto numérico que satisfaz a todos os axiomas é $\mathbf{R}$ e um conjunto numérico que não satisfaça a algum dos axiomas não pode ser $\mathbf{R}$.

Este método de introduzir $\mathbf{R}$ tem a vantagem de poupar-nos tempo e pôr em evidência o elenco de axiomas que $\mathbf{R}$ deve satisfazer. Por outro lado, este processo coloca-nos uma dúvida: Será que não existe mais de um *objeto* satisfazendo a tais axiomas? Ou seja, será que não existem vários modelos para nossa teoria? A resposta é afirmativa — existem vários modelos que satisfazem ao elenco de axiomas. Este fato, entretanto, não é uma desvantagem: Os vários modelos nada mais são do que maneiras diferentes de fazer a "construção" do conjunto numérico que satisfaz aos axiomas. Os vários modelos são distintos em sua natureza, mas são iguais sob os aspectos seguintes:

a) *do ponto de vista algébrico* (referente às operações algébricas);
b) *do ponto de vista da relação de ordem* ($\leqslant$); e
c) *do ponto de vista topológico* (completividade).

Também fazemos uma representação geométrica do conjunto **R** e também de $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, pois é importante ter uma imagem geométrica dos números reais como pontos de uma reta e dos elementos de $\mathbf{R}^2$ como pontos de um plano.

Para finalizar, fazemos um esboço rápido de um dos modelos possíveis de **R** que é feito mediante sua representação decimal, para não deixar no leitor o receio de não ter nenhuma idéia do que possa ser um número real.

1.2. O CONJUNTO N DOS NÚMEROS NATURAIS

O conjunto **N** é básico para o estudo de todos os outros conjuntos de números. Historicamente, foram os primeiros números que os homens tiveram necessidade de usar e surgiram com a necessidade de contagem dos elementos de um conjunto. A teoria destes números pode ser feita adotando como primitivos os três conceitos:

a) conjunto;
b) elemento unidade (indicado com o símbolo 1);
c) sucessor de um elemento n (indicado com $n + 1$)

e um sistema de cinco axiomas devidos ao matemático italiano Giuseppe Peano. Não desenvolveremos essa teoria, mas observaremos que, entre os axiomas, o 5º é muito importante, porque dá origem a um tipo de demonstração que é muito usada em Matemática – a demonstração por indução finita. Vamos dar um enunciado desse axioma que é o que mais se presta para as nossas necessidades e que é conhecido como Princípio de Indução Finita.

Princípio de Indução Finita (P.I.F.)

Se uma propriedade $P(n)$, do elemento genérico $n \in \mathbf{N}$ satisfaz às condições:

a) $P(1)$ é verdadeira;
b) $P(k)$ verdadeira $\Longrightarrow P(k+1)$ verdadeira;

então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbf{N}$.

Convém tomar muito cuidado com este enunciado. Observe que temos duas condições a serem verificadas: em a) devemos ter que $P(1)$ é verdadeira e, em b), se você supõe $P(k)$ verdadeira, então você terá de provar que $P(k+1)$ também o é.

Exemplo 1

Prove, por indução finita, que a seguinte igualdade é verdadeira:

$$P(n): 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Prova. Temos:

a) Fazendo-se $n = 1$, obtemos:

$$P(1): 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$$

ou seja, $1 = 1$

e $P(1)$ é obviamente verdadeira.

b) Supondo $P(k)$ verdadeira, isto é,

$$P(k): 1 + 2 + ... + k = \frac{k\,(k+1)}{2}$$

provemos que ela é verdadeira para $k + 1$. De fato,

$$1 + 2 + ... + k + (k+1) = (1 + 2 + ... + k) + (k+1) =$$

Usando a hipótese de indução que $P(k)$ é verdadeira

$$= \frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k\,(k+1) + 2\,(k+1)}{2} = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$

Portanto, obtivemos

$$1 + 2 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$

que é exatamente $P(k+1)$, ou seja, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbf{N}$. [c.q.d.]

Exemplo 2

Provar, por indução finita, que a seguinte propriedade é verdadeira:

$$P(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Prova

a) Para $n = 1$, devemos ter

$$P(1): 1^2 = \frac{1\,(1+1)\,(2+1)}{6}$$

ou seja,

$$1^2 = 1 = \frac{2 \cdot 3}{6}$$

e $P(1)$ é verdadeira

b) Admitindo-se a propriedade verdadeira para $n = k$

$$P(k):\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

devemos prová-la para $n = k + 1$. De fato, temos

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \underbrace{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2)}_{P(k)} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

Observando que

$$2k^2 + 7k + 6 = 2(k+2)\left(k + \frac{3}{2}\right) = (k+2)(2k+3)$$

virá

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

que é exatamente $P(k+1)$, isto é, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, pelo P.I.F., $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbf{N}$. [c.q.d.]

Observações:

1. Num exame superficial da questão de indução o leitor pode ficar tentado a desprezar a condição a). Contudo, ela é indispensável, como se depreende do seguinte exemplo. Seja a propriedade

$$P(n):\ n = n + 1$$

Supondo-a verdadeira para um natural k, tem-se

$$k + 1 = (k + 1) + 1$$

ou seja, ela é verdadeira para $k + 1$.

Seria, então, válida para todos os naturais, isto é, todos os naturais seriam iguais entre si. Este absurdo decorre do fato de se ter dispensado a), pois é falso que $P(1)$ é verdadeira.

2. *Indução Vulgar.* Alguns alunos algumas vezes são levados a realizar um raciocínio do seguinte tipo: Determinada propriedade $P(n)$ acaba sendo aceita como verdadeira para todo $n \in \mathbf{N}$ simplesmente pelo fato de ser válida para alguns valores particulares de n. Isto pode conduzir-nos a sérios erros.

Exemplo 1

Seja a função

$$y = 2^{2^{n-1}} + 1, n \in \mathbf{N}$$

Temos

$$n = 1 \Longrightarrow y = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$$
$$n = 2 \Longrightarrow y = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$
$$n = 3 \Longrightarrow y = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

Observa-se que os números y encontrados são números primos. O matemático francês Pierre Fermat (1601-1665) admitiu que isso fosse verdade para todo número natural. Esta indução é falsa, mas foram precisos muitos anos para que o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) chegasse a provar que, para $n = 6$, $y = 2^{2^5} + 1$ é divisível por 641 (não é primo).

Exemplo 2

Seja a função

$$y = n^2 - n + 41$$

$$n = 1 \Longrightarrow y = 41$$
$$n = 2 \Longrightarrow y = 43$$
$$n = 3 \Longrightarrow y = 47$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Observe que os números y são primos. Na verdade, obtemos números primos para n desde 1 até 40 inclusive. Entretanto, admitir que y é primo para todo $n \in \mathbf{N}$ é falso, pois para $n = 41$ temos

$$y = (41)^2 - 41 + 41 = (41)^2$$

isto é, para $n = 41$, y não é primo!

1.3. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Prove por indução finita que:

   a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;

   b) $1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$;

   c) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$;

   d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$;

   e) $(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

   f) $n(n + 1)(n + 2)$ é divisível por 6;

g) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

h) $\dfrac{4^n - 1}{3}$ é inteiro e ímpar;

i) $\dfrac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dfrac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

2. Verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

a) $y = n^2 + n + 5$ é primo, para todo $n \in \mathbf{N}$.

b) $y = \dfrac{-n^3}{6} + \dfrac{3n^2}{2} - \dfrac{7n}{3} + 3$ é primo, para todo $n \in \mathbf{N}$.

3. Ache o erro: "Todos os números naturais são iguais entre s."

Demonstração:

a) $1 = 1$

b) Suponhamos que todos os naturais até k sejam iguais entre si. Então $k = k - 1$. Logo,

$$k + 1 = (k - 1) + 1 = k$$

como k é igual a todos os menores do que ele, o mesmo acontece com $k + 1$. Portanto, a propriedade é verdadeira para todos os números naturais.

1.4. PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO CONJUNTO R

De início aceitamos a existência de um conjunto **R**, cujos elementos são chamados números reais e com pelo menos dois elementos. Em **R** estão definidas duas operações internas:

- *Adição.* A cada par (a, b) de números reais associamos um número real s que é chamado soma de a e b e indicado por $a + b$.
- *Multiplicação.* A cada par (a, b) de números reais associamos um número real p chamado produto de a e b e indicado por $a \cdot b$ ou ab.

Propriedades das Operações

P1. *Lei associativa da adição*

$\forall\, a, b, c \in \mathbf{R}$ $\qquad (a + b) + c = a + (b + c)$

P2. *Lei comutativa da adição*

$\forall\, a, b \in \mathbf{R}$ $\qquad a + b = b + a$

P3. *Existência do elemento neutro da adição* 0 (zero)

Existe $0 \in \mathbf{R}$, tal que

$\forall\, a \in \mathbf{R},$ $\qquad a + 0 = a$

P4. *Existência do oposto*

Todo número real a tem *oposto*, indicado por $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0$$

P5. *Lei associativa da multiplicação*

$\forall\ a, b, c \in \mathbf{R}$ $\qquad (ab)c = a(bc)$

P6. *Lei comutativa da multiplicação*

$\forall\ a, b \in \mathbf{R}$ $\qquad ab = ba$

P7. *Existência do elemento neutro da multiplicação 1 (um)*

Existe $1 \in \mathbf{R}$, tal que

$\forall\ a \in \mathbf{R}$, $\qquad a \cdot 1 = a$

P8. *Existência do recíproco (ou inverso)*

Todo número real $a \neq 0$ tem recíproco, indicado por a^{-1}, ou $1/a$, tal que

$a \cdot a^{-1} = 1$ (ou $a \cdot 1/a = 1$)

P9. *Lei distributiva da multiplicação em relação à adição*

$\forall\ a, b, c \in \mathbf{R}$ $\qquad a(b + c) = ab + ac$

Observações:

1. Outros conjuntos numéricos apresentam-se também munidos das operações de adição e multiplicação, satisfazendo às nove propriedades anteriormente referidas. Por exemplo, o conjunto **Q** dos números racionais e o conjunto **C** dos números complexos.

2. Um conjunto numérico que satisfaz aos nove axiomas anteriores é denominado um *corpo*. Portanto, relativamente às operações algébricas de adição e multiplicação, **R** é um corpo. Conforme citamos, também **Q** e **C** o são.

1.5. ALGUMAS PROPRIEDADES QUE SE DEDUZEM DAS PROPRIEDADES DE CORPO

1. O 0 (zero) é único.

Prova. **Suponhamos que existam dois elementos neutros para a adição, 0 e 0'. Teríamos**

$$\underbrace{0' = 0' + 0}_{0 \text{ é neutro}} \underset{(P2)}{=} \underbrace{0 + 0' = 0}_{0' \text{ é neutro}}$$

2. O elemento 1 (um) é único. Demonstra-se de forma inteiramente análoga à anterior.

3. Para todo $a \in \mathbf{R}$ temos $a \cdot 0 = 0$.

Prova. Temos:

$$a \cdot \underbrace{0 = a}_{(P3)} \cdot (0 + \underbrace{0) = a}_{(P9)} \cdot 0 + a \cdot 0$$

Portanto,

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$$ [c.q.d.]

Somando-se $-a.0$, oposto de $a.0$, a ambos os membros da relação anterior, vem

$$-a.0 + a.0 = (-a.0 + a.0) + a.0$$

donde por ($P4$) se obtém

$$0 = a.0$$ [c.q.d.]

4. Se a e b são números reais, tais que

$ab = 0$, então, $a = 0$ ou $b = 0$

Prova. Se $a \neq 0$, por ($P8$) existe a^{-1}, logo, multiplicando-se ambos os membros de $ab = 0$ por a^{-1}, vem

$$a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0 \text{ (por 3)}$$

Pela propriedade ($P5$):

$$(a^{-1} \cdot a)b = 0$$

ou seja,

$$1 \cdot b = 0 \therefore b = 0$$

Analogamente, prova-se que, se $b \neq 0$, então $a = 0$. [c.q.d.]

1.6. A RELAÇÃO DE ORDEM EM R

Em **R** está definida uma relação de ordem total $\leqslant$ (menor do que ou igual a), isto é, uma relação que satisfaz às propriedades:

P.10. *Quaisquer que sejam os números reais* a e b *tem-se sempre:*

i) $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$;

ii) se $a \leqslant b$ e $a \geqslant b \implies a = b$ (anti-simétrica);

iii) se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c \implies a \leqslant c$ (transitiva).

A seguir, temos mais duas propriedades que tratam da compatibilidade da relação de ordem com as operações de adição e de multiplicação.

P11. *Compatibilidade com a adição*

$\forall\, a, b, c, \in \mathbf{R}$, se $a \leqslant b \Longrightarrow a + c \leqslant b + c$

P12. *Compatibilidade com a multiplicação*

$\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, se $a \leqslant b$ e $0 \leqslant c \Longrightarrow ac \leqslant bc.$

Um conjunto numérico que possui duas operações, adição e multiplicação, satisfazendo às nove propriedades anteriores (de P1 até P9) e uma relação de ordem com as três propriedades P10, P11 e P12 é chamado um corpo ordenado. Portanto, **R** é um corpo ordenado. Um outro exemplo de corpo ordenado é o conjunto **Q** dos números racionais. O mesmo não acontece, entretanto, com o conjunto **C** dos numeros complexos: É possível colocar uma ordem em **C**, mas é impossível torná-la compatível com as operações de adição e multiplicação.

Se $a, b \in \mathbf{R}$ o significado de

$$a < b \quad \text{será} \quad a \leqslant b \quad \text{e} \quad a \neq b$$

Daremos também os significados habituais para $\geqslant$ e $>$, isto é, se $a, b \in \mathbf{R}$

$$a \geqslant b \iff b \leqslant a$$
$$a > b \iff b < a$$

1.7. PROPRIEDADES USUAIS DAS DESIGUALDADES

Vamos ver como através dos doze axiomas podemos obter algumas propriedades das desigualdades.

1. $\forall\ x \in \mathbf{R}: x \leqslant 0 \iff 0 \leqslant -x$

Prova ($\Longrightarrow$). Se $x \leqslant 0$, somando-se o oposto de x, isto é, $-x$ (por P4), obtemos por aplicação de P11

$$x + (-x) \leqslant 0 + (-x)$$

Aplicando-se P4 e P3, vem

$$0 \leqslant -x$$

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, se $0 \leqslant -x$, somando-se x que é o oposto de $-x$ (P4) a ambos os membros obteremos, por aplicação de P11,

$$0 + x \leqslant (-x) + x$$

Novamente por P4 e P3, vem

$$x \leqslant 0$$

[c.q.d.]

2. Se $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$, então, $ab \geqslant 0$.

Prova. Se $a \geqslant 0$, então, $0 \leqslant a$; sendo $0 \leqslant b$, podemos aplicar P12), obtendo-se

$$0 \cdot b \leqslant ab$$

Mas $0 \cdot b = 0$, conforme já provamos em 3, do item 1.5; logo,

$$0 \leqslant ab$$

[c.q.d.]

3. Se $a \leqslant b$ e $c \leqslant d$, então, $a + c \leqslant b + d$

Prova. Sendo por hipótese

$$a \leqslant b \quad \text{e} \quad c \leqslant d$$

somando c a ambos os membros da 1ª desigualdade (por P11) e b a ambos os membros da 2ª (por P11) vem

$$a + c \leqslant b + c$$

$$b + c \leqslant b + d$$

donde, por iii) de P10,

$$a + c \leqslant b + d$$

4. Se $a \leqslant b$ e $c \leqslant 0$, então, $ac \geqslant bc$.

Prova. De fato, por hipótese, temos
$a \leqslant b$ e por 1 deste item $0 \leqslant -c$; logo, por P12.

$$a(-c) \leqslant b(-c)$$

ou

$$-ac \leqslant -bc$$

Somando $ac + bc$ a ambos os membros, por P11, vem

$$-ac + (ac + bc) \leqslant -bc + (ac + bc)$$

donde por P1, P4 e P2

$$bc \leqslant ac \text{ ou } ac \geqslant bc$$

[c.q.d.]

1.8. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. (Lei do Cancelamento da Multiplicação). Para quaisquer $a, b, c \in \mathbf{R}$, se $ab = ac$ e $a \neq 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow b = c$.
2. Prove por indução finita que $\forall\, n \in \mathbf{N}$
   a) $2^n \geqslant 1 + n$;
   b) (Desigualdade de Bernoulli). Se $x \in \mathbf{R}$ e $x \geqslant -1$ $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.
3. Prove que, para todo $x \in \mathbf{R}$, tem-se $x^2 \geqslant 0$.

4. Demonstre que:

a) $1 > 0$;
b) Se $a \leqslant b$ e $c \geqslant d$, então, $a - c \leqslant b - d$;
c) Se $0 < a < b \Longrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;
d) Se $a > 1$, então, $a^2 > a$;
e) Se $0 < a < 1$, então, $a^2 < a$;
f) Se $0 \leqslant a < b$, então, $a^2 < b^2$;
g) Se $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ e $a^2 < b^2$, então, $a < b$.

5. Se $0 < a < b$, então

a) $a < \frac{a+b}{2} < b$;
b) $a < \sqrt{ab} < b$;
c) $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

6. Demonstre por indução finita que, para todo $n \in \mathbf{N}$, se tem:

a) se $a > 1$, $a^n > 1$;
b) se $0 < a < 1$, $a^n < 1$.

7. Sendo a e b números reais quaisquer, mostre que $a^3 \leqslant b^3 \Longleftrightarrow a \leqslant b$.

1.9. O AXIOMA DO SUPREMO (OU AXIOMA DA COMPLETIVIDADE). EXISTÊNCIA DE RAIZ QUADRADA. O CORPO ORDENADO R

Chegamos agora a um ponto crítico da exposição das propriedades de **R**. Até aqui dissemos que **R** é um corpo ordenado, mas o conjunto **Q** também o é, ou seja, ambos verificam os doze axiomas, de P1 a P12. Com isso, conseguimos descartar o conjunto **C**, porque ele não é um corpo ordenado. Porém, com os doze axiomas, não conseguimos o que queríamos, isto é, caracterizar o conjunto **R**, pois eles são verificados também por **Q**. Resta expor somente mais uma propriedade (13º axioma) que **R** possui e que o diferencia de **Q**. Por sua simplicidade, essa propriedade poderá parecer pouco original aos incautos; todavia, exigiu da Matemática mais de vinte séculos de evolução. Foi batizada com o nome de *Axioma do Supremo ou Axioma da Completividade.*

Antes de apresentarmos o *Axioma da Completividade* precisamos de algumas definições.

No que segue $A \neq \phi$ é um subconjunto de **R**.

Definição 1 Conjunto Majorado

Diz-se que A é majorado (ou limitado superiormente) quando existe $y \in \mathbf{R}$, tal que

$$a \leqslant y, \ \forall a \in A$$

O número y é chamado um *majorante* de A. É claro que todo $y_1 > y$ é também majorante de A.

Definição 2 Conjunto Minorado

Diz-se que A é minorado (ou limitado inferiormente) quando existe $y \in \mathbf{R}$, tal que

$$y \leqslant a, \quad \forall a \in A$$

O número y é chamado um minorante de A. Do mesmo modo, todo $y_1 < y$ é também minorante de A.

Quando o conjunto A é majorado e minorado, dizemos, simplesmente, que ele é limitado.

Definição 3 Máximo

Diz-se que $m \in \mathbf{R}$ é máximo de A quando m é majorante de A e $m \in A$. É indicado com $\max A$.

Definição 4 Mínimo

Diz-se que $m \in \mathbf{R}$ é mínimo de A quando m é minorante de A e $m \in A$. É indicado com $\min A$.

Definição 5 Supremo

Diz-se que $s \in \mathbf{R}$ é supremo de A quando

S1. $a \leqslant s, \quad \forall a \in A$
S2. se $a \leqslant y, \ \forall a \in A$, então, $s \leqslant y$

Observemos que, se $M = \{y \in \mathbf{R} \mid a \leqslant y, \ \forall a \in A\}$ é o conjunto dos majorantes de A, então, o supremo s de A é o mínimo de M. De fato, por S1 é um majorante de A $(a \leqslant s, \ \forall a \in A)$ e, por S2, sendo y majorante de A $(a \leqslant y, \ \forall a \in A)$, tem-se $s \leqslant y$, isto é, s é o menor dos majorantes de A.

O supremo de um conjunto A é único. De fato, se admitíssemos a existência de dois supremos s e s_1 para o conjunto A, teríamos $s \leqslant s_1$, porque s é supremo e s_1 majorante e $s_1 \leqslant s$, porque s_1 é supremo e s majorante logo, $s = s_1$. Indica-se o supremo de A por $\sup A$.

Uma outra definição de supremo, que é muito usada, é a seguinte: diz-se que $s \in \mathbf{R}$ é supremo de A quando

S1. $a \leqslant s, \ \forall a \in A$
S2'. Para todo $y \in \mathbf{R}$ com $y < s$, existe $a \in A$, tal que $y < a \leqslant s$.

Deixamos a cargo do leitor mostrar a equivalência entre S2 e S2' das duas definições.

Definição 6 Ínfimo

Diz-se que $s \in \mathbf{R}$ é ínfimo de A quando

I1. $s \leqslant a, \ \forall a \in A$

I2. se $y \leqslant a, \ \forall a \in A$, então, $y \leqslant s$.

Observe-se, do mesmo modo que anteriormente, que o ínfimo de A é o máximo do conjunto dos minorantes de A. Ainda mais, o ínfimo de um conjunto A, quando existe, é único e é indicado por $\inf A$.

Outra definição de ínfimo, também muito usada, é a seguinte:

$$s = \inf A \iff \begin{cases} \text{I1.} & s \leqslant a, \ \forall a \in A \\ \text{I2'.} & \text{Para todo } y \in \mathbf{R} \text{ com } y > s \text{ existe } a \in A \text{ tal que } s \leqslant a < y. \end{cases}$$

Observação:

O supremo de um conjunto A pode ou não pertencer a A, mas, se $\sup A \in$ $\in A$, então, $\sup A = \max A$, porque $\sup A$ é majorante de A e também pertence a A. Do mesmo modo, se $\inf A \in A$, então, $\inf A = \min A$.

Exemplo 1

Seja $A = \{-1, -2, -3, ...\} = \{-n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Temos que A é majorado, mas não é minorado.

Exemplo de majorantes: $-1, \ \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, ...$

$M =$ conjunto dos majorantes de $A = \{y \in \mathbf{R} \mid y \geqslant -1\}$
-1 é majorante e $-1 \in A$; logo, $-1 = \max A$

De outro lado, $-1 = \inf M \therefore -1 = \sup A = \max A$

Exemplo 2

Seja $A = N = \{1, 2, 3, ...\}$. Temos:

A não é majorado mas é minorado.
$L =$ conjunto dos minorantes de $A = \{y \in \mathbf{R} \mid y \leqslant 1\}$
1 é minorante de A e $1 \in A$; logo, $1 = \min A$

De outro lado, $1 = \max L \therefore 1 = \inf A = \min A$.

Exemplo 3

Seja $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 9\} = \{x \in \mathbf{Q} \mid -3 < x < 3\}$
A é majorado e minorado, ou seja, A é limitado
$M =$ conjunto dos majorantes de $A = \{y \in \mathbf{R} \mid y \geqslant 3\}$
$L =$ conjunto dos minorantes de $A = \{y \in \mathbf{R} \mid y \leqslant -3\}$

Temos: $\min M = 3 \therefore \sup A = \min M = 3$
$\max L = -3 \therefore \inf A = \max L = 3$

O conjunto A não tem máximo, pois para todo $m \in A$ tem-se

$$m < \frac{m+3}{2} < 3$$

donde $\left(\frac{m+3}{2}\right)^2 < 9$ e, conseqüentemente, $\frac{m+3}{2} \in A$ e $m < \frac{m+3}{2}$, isto é, não existe $m \in A$, tal que $x \leqslant m$, $\forall x \in A$.

Do mesmo modo, o conjunto A não tem mínimo.

Finalmente, estamos em condições de enunciar o axioma P13.

P13. *Axioma do Supremo.* Todo subconjunto de **R**, não vazio e majorado, tem supremo.

A fim de dar um exemplo do uso do axioma P13. vamos agora provar a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 1 (EXISTÊNCIA DE RAIZ QUADRADA POSITIVA)

Se a é um número real positivo existe um único número real b positivo tal que

$$b^2 = a$$

O número b é chamado raiz positiva de a e indicado com $b = \sqrt{a}$.

PROVA

Seja o conjunto

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 < a\}$$

tem-se $A \neq \phi$ pois $0 \in A$ e um número $m > 1$ e $m > a$ é tal que

$$y^2 \geqslant m^2 > m > a$$

e não poderia estar em A, ou seja, todo $a \in A$ é $< m$. Logo, pelo axioma P13. existe um número real b tal que

$$b = \sup A$$

Provemos que $b^2 = a$. Primeiro suponhamos $b^2 < a$. Tomando-se $x = b + \frac{1}{n}$ com n natural satisfazendo às condições

$$\text{i) } n > 1 \quad \text{e} \quad \text{ii) } n > \frac{2b+1}{a-b^2},$$

tem-se

$$x^2 = \left(b + \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 + 2 \cdot \frac{b}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{*}{<} b^2 + 2 \cdot \frac{b}{n} + \frac{1}{n} \underset{ii)}{<} b^2 + a - b^2 = a$$

e b não seria supremo de A pois $x \in A$ e $x > b$. Da mesma forma demonstra-se que não podemos supor $b^2 > a$. Resulta então que $b^2 = a$. Como $b \geqslant 0$ e b não pode ser igual a zero pois $a > 0$, temos $b > 0$.

[c.q.d.]

Observe que:

a) Se $b = \sqrt{a}$ é a solução positiva da equação $x^2 = a$, então $-b = -\sqrt{a}$ é a solução negativa da mesma equação;

b) A equação $x^2 = 0$ tem uma única solução $x = 0$;

c) Se $a < 0$ a equação $x^2 = a$ não tem solução.

Sabemos que **R** contém os números racionais e podemos mostrar agora que ele contém números que não são racionais, isto é, os números irracionais. Pela proposição anterior existe o número $b = \sqrt{2}$. Provemos a

PROPOSIÇÃO 2.

$\sqrt{2}$ é um número irracional.

Prova. Para provar que $\sqrt{2}$ é irracional vamos supor, por absurdo, que ele seja racional, isto é,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \tag{1}$$

com p e q inteiros e primos entre si.** Elevando-se (1) ao quadrado, vem

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \therefore p^2 = 2q^2 \tag{2}$$

---

* $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$

** Não admitem divisores comuns diferentes da unidade.

Portanto, p^2 é par. Então, p não pode ser ímpar, porque, se fosse,

$$p = 2k + 1, \text{ para algum } k \in \mathbf{N},$$
$$p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2m + 1 (m = 2k^2 + 2k),$$

isto é, seu quadrado seria também ímpar. Logo, necessariamente, p tem de ser par, isto é,

$$p = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbf{N}$$

Substituindo-se em (2), vem

$$4k^2 = 2q^2 \therefore q^2 = 2k^2$$

Assim, q^2 é par e, pelo mesmo raciocínio anterior, q é par. Mas isto vem contra a hipótese de terem sido tomados primos entre si. Este absurdo decorre de supormos que $\sqrt{2}$ seja racional. Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional. [c.q.d.]

Vamos provar agora que **Q** não satisfaz P13. Para isso, seja

$$B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2\}$$

Então, esse conjunto é majorado em **Q**, mas não admite supremo (em **Q**). De fato, se admitisse $b = \sup B$, $b \in \mathbf{Q}$, deveríamos ter $b^2 = 2$ (porque com raciocínio análogo ao da proposição anterior não se pode ter $b^2 < 2$, nem $b^2 > 2$), o que não é possível, porque o número b, tal que $b^2 = 2$, é irracional.

Resumindo tudo o que dissemos sobre as propriedades que **R** deve satisfazer, temos **R** é um conjunto numérico, com pelo menos dois elementos, com duas operações internas, de adição (+) e multiplicação (•), e que satisfaz aos treze axiomas, P1 a P13. De forma mais abreviada, dizemos que

R é um corpo ordenado completo.

Para encerrar este parágrafo, vamos ver uma aplicação importante do axioma do supremo que é a *Propriedade Arquimediana de* **R**.

Teorema de Arquimedes

Dados dois números reais quaisquer, a e b, com $a > 0$ existe um número natural n, tal que

$$na > b.$$

Prova. Se $a \geqslant b$, temos $2a > a \geqslant b$ e já está provado. Se $a < b$, supondo por absurdo que a tese seja falsa, isto é, $ma \leqslant b$, $\forall m \in \mathbf{N}$, o conjunto $A = \{ma \mid m \in \mathbf{N}\}$ seria não vazio (pois $a \in A$) e majorado por b. Então, admite por P13 um supremo s. Pela condição S2', dado

$$y = s - a < s \qquad (a > 0)$$

existe $m \in \mathbf{N}$, tal que

$$s - a < ma \leqslant s$$

donde

$$s < (m+1)a$$

o que é uma contradição, uma vez que $(m+1)a \in A$ e $s = \sup A$. Portanto, A não pode ser suposto majorado por b. Logo, existe $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$na > b \qquad \text{[c.q.d.]}$$

Corolário 1

$\mathbf{N}$ não é majorado.

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $\mathbf{N}$ seja majorado por um número b. Pelo teorema anterior, considerando-se $a = 1$ e b, existe $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$n \cdot 1 > b, \text{ isto é, } n > b$$

contra a hipótese.

Corolário 2

Dado um número real $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbf{N}$, tal que $\dfrac{1}{n} < \epsilon$.

Prova. Supondo, por absurdo, que

$$\frac{1}{n} \geqslant \epsilon, \ \forall n \in \mathbf{N}$$

teríamos

$$n \leqslant \frac{1}{\epsilon}, \ \forall n \in \mathbf{N}$$

e $\mathbf{N}$ seria majorado, contra o corolário 1.

Proposição

Se a e b são números reais e $a < b$, existe um número racional r, tal que $a < r < b$.

Prova. Suponhamos inicialmente que $0 < a < b$. Temos $b - a > 0$, logo, pelo teorema de Arquimedes existe $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$n(b-a) > 1$$

donde se tira

$$nb > na + 1$$

Considerando-se o número real na, existe p natural, tal que

$$p > na \geqslant p - 1^{*}$$

* Para demonstrar esta afirmação, precisamos do teorema seguinte:
"Todo $A \subset N$, $A \neq \phi$ tem mínimo."
Então, o conjunto $A = \{m \in \mathbf{N} \mid m > na\}$ é não vazio e tem um mínimo p.

Logo,

$$nb > na + 1 \geqslant p > na$$

Dividindo-se por n, tem-se

$$b > \frac{p}{n} > a$$

onde $r = \dfrac{p}{n} \in \mathbf{Q}$. Se $a = 0$, considerando-se $\dfrac{1}{2}b < b$ existe $r \in \mathbf{Q}$, tal que $a < \dfrac{1}{2}b < r < b$. Se $a < b \leqslant 0$, considerando-se $0 \leqslant -b < -a$ existe, pelo já demonstrado, $r \in \mathbf{Q}$, tal que $-b < r < -a$; logo, $a < -r < b$. [c.q.d.]

1.10. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja $A = \left\{ \dfrac{n-1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$

   a) Mostre que $\forall\ m, n \in \mathbf{N}$, tais que $m < n$ tem-se $\dfrac{m-1}{m} < \dfrac{n-1}{n}$

   b) Mostre que A não tem máximo.

   c) A tem mínimo? Por quê?

   d) Existe $\sup A$? Justifique a resposta.

2. Seja $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$

   a) Mostre que A não tem mínimo.

   b) Existe $\inf A$? Justifique.

   c) A tem máximo? Por quê?

3. Seja $A = \left\{ \dfrac{2n+1}{3n+1} \mid n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$

   a) Mostre que $\forall\ m, n \in \mathbf{N}$ com $m < n$, tem-se $\dfrac{2m+1}{3m+1} < \dfrac{2n+1}{3n+1}$

   b) A proposição:

   "Dado $y < \dfrac{2}{3}$ existe $n \in \mathbf{Z}_+$, tal que $\dfrac{2n+1}{3n+1} > y$."

   é falsa ou verdadeira? Justifique.

   c) Existe $\sup A$? Justifique.

   d) Mostrar que A não tem máximo.

   e) A tem mínimo? Por quê?

4. Seja $A = \left\{ \dfrac{n^2}{2n^2+1} \mid n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$

   a) Mostre que $\forall\ m, n \in \mathbf{Z}_+, m < n \Longrightarrow \dfrac{m^2}{2m^2+1} < \dfrac{n^2}{2n^2+1}$

   b) A tem ínfimo? Por quê?

   c) Mostre que A não tem máximo.

   d) Existe $\sup A$? Justifique.

5. Seja $A \subset \mathbf{R}$ e $-A = \{-x \mid x \in A\}$. Mostre que m é um majorante de A se, e somente se, $-m$ é um minorante de A.

6. Demonstre que todo conjunto não vazio e minorado de números reais tem ínfimo.

7. Sejam A e B dois subconjuntos não vazios e majorados de $\mathbf{R}$ e tais que:

i) para todo $a \in A$ existe $b \in B$ com $a < b$;
ii) para todo $b \in B$ existe $a \in A$ com $b < a$.

Prove que, nestas condições, $\sup A = \sup B$.
Dê exemplo de conjuntos verificando as condições i) e ii) e tais que $A \cap B = \phi$.

8. Diga se os conjuntos seguintes são majorados, minorados, e se possuem supremo, ínfimo máximo ou mínimo:

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 5 - x > 2x - 4\}$;

b) $B = \left\{\dfrac{2}{2n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$;

c) $C = \left\{\dfrac{3n-1}{3n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$;

d) $D = \left\{\dfrac{2n-5}{2n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$;

e) $E = \left\{\dfrac{5n-4}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$;

f) $F = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x + 1 \leqslant 0\}$;

g) $G = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \dfrac{x+1}{2x-3} < 0\right\}$;

h) $H = \left\{x \in \mathbf{R} \mid -7 \leqslant \dfrac{15-2x}{3-x} < -1\right\}$.

9. Seja $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ (n natural $\geqslant 1$, $a_0 \neq 0$) um polinômio com coeficientes inteiros. Seja $r = \dfrac{p}{q}$ um número racional com p e q primos entre si. Se r é raiz de $P(x)$ prove que p é divisor de a_n e q é divisor de a_0.

10. Usando o exercício 9 prove que são irracionais:

a) $\sqrt{3}$;

b) $\sqrt[4]{5}$;

c) $\sqrt{p}$ com p número inteiro primo; d) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

11. Prove que entre dois números reais a e b com $a < b$ existe um número irracional da forma $r\sqrt{2}$, sendo r racional.

12. Sejam a e b dois reais tais que $b \geqslant a$. Prove que, se $b - a < \epsilon$, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, então $b = a$.

1.11. REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE R E DE $R^2 = R \times R$

Seja r uma reta. Escolhamos um ponto O de r para representar o número zero, e um ponto U, à direita de O, para representar o 1 (Figura 1.1).

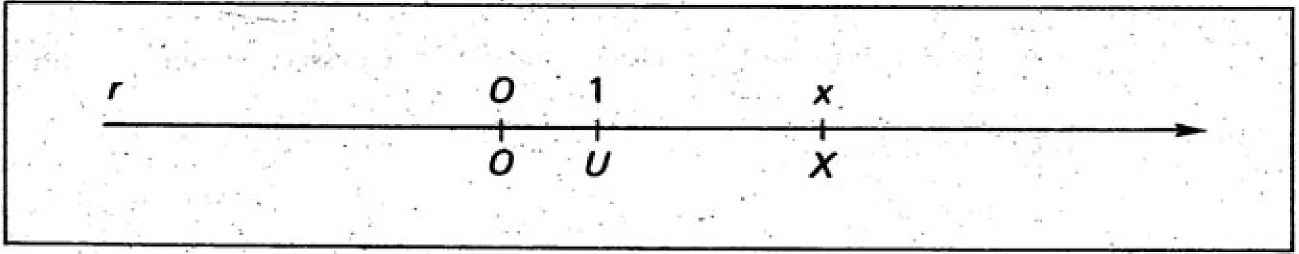


Figura 1.1.

Assim, ficam fixados a orientação de O para U como positiva e o segmento OU, como unidade de medida dos segmentos orientados OX, com X um ponto qualquer de r. Com isto, o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos de uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca: a cada número real x podemos fazer corresponder um ponto da reta, extremidade de um segmento orientado OX, de tal sorte que a medida algébrica de OX com relação a OU seja exatamente o número x. Portanto, a números reais distintos correspondem pontos distintos, e todo ponto da reta é correspondente de um único número real. Diz-se que, deste modo, ficou estabelecido um sistema de coordenadas abscissas sobre a reta, a qual passa a ser denominada reta real ou eixo real. O ponto O chama-se origem do sistema de coordenadas. Por causa disto, falaremos indistintamente em número real ou ponto da reta.

A desigualdade entre os números reais tem uma interpretação geométrica simples: se $x < y$, temos que o ponto y fica à direita de x. Os números positivos ficam à direita de zero e os negativos à esquerda. Se $a < b$, o ponto x satisfaz a $a < x < b$ se, e só se, x está "entre" a e b.

Consideremos o produto cartesiano $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. De forma inteiramente análoga à descrita anteriormente, podemos colocar $\mathbf{R}^2$ e o plano geométrico em correspondência biunívoca. Para isso, tomamos duas retas perpendiculares Ox e Oy sobre um plano e que se cortam em O.

Sobre cada uma delas fixamos um sistema de coordenadas abscissas, geralmente com mesma origem O e com segmentos unitários OU_1 e OU_2 de mesmo comprimento.

$|OU_1| = |OU_2| = 1$ (Figura 1.2). O eixo Ox passa a ser denominado eixo das abscissas, e Oy, eixo das ordenadas. A cada par (x, y) de números reais faz-se corresponder um ponto P do plano cujas coordenadas são exatamente x e y (o que significa que o ponto P se projeta em pontos P_1 e P_2 sobre Ox e

Oy, sendo x e y as medidas algébricas de OP_1 e OP_2, respectivamente). Diz-se que ficou estabelecido um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas sobre o plano. Conseqüentemente, falaremos indistintamente em par ordenado de números reais e ponto do plano.

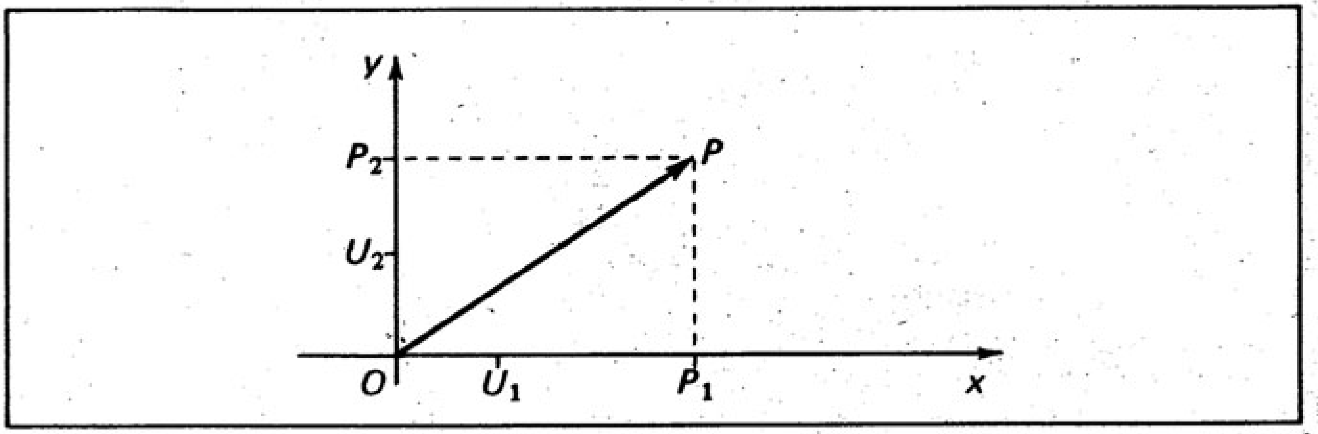


Figura 1.2.

1.12. SOBRE UMA CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO R

Todo número racional $r = \dfrac{p}{q}$ tem uma representação decimal que se obtém dividindo-se p por q. Temos, assim, os exemplos:

número racional	*representação decimal*
0	0,0
1/2	0,5
1/4	0,25
1/3	0,333 ... 3 ... ou $0{,}\underline{3}$
100/99	1,010101 ... 01 ... ou $1{,}\underline{01}$

Vemos então que essa representação decimal pode ser finita ou infinita. As finitas podem tornar-se infinitas, bastando acrescentar zeros. Por exemplo:

decimal finita	*decimal infinita*
0,0	0,000 ... ou $0{,}\underline{0}$
0,5	0,5000 ... ou $0{,}5\underline{0}$
0,25	0,25000 ... ou $0{,}25\underline{0}$

Usando-se a idéia de decimal infinita podemos definir número real. Consideremos o símbolo

$$a_0\, ,\, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \tag{3}$$

onde $a_0 \in \mathbf{Z}_+$ e $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Definição 1 (Decimal infinita)

Diz-se que o símbolo (3) é uma decimal infinita quando para todo $j \in \mathbf{N}$, tal que $a_j = 9$ existe pelo menos um $k > j$ com $a_k \neq 9$.

Exemplo 1

São decimais infinitas os símbolos:

105,555 ... ou $105,\underline{5}$
1,47121212 ... ou $1,47\underline{12}$
0,000 ... ou $0,\underline{0}$
1,01001000100001 ...
99,941994199941 ...

Exemplo 2

Não são decimais infinitas os símbolos

0,999 ...
2,43999 ...

Nota: A condição colocada na definição 1 é para evitar que um número real (que logo vamos definir) possa ser escrito de duas formas distintas. Assim, entre as duas formas de escrever um mesmo número real, por exemplo,

$a = 1{,}000 \ldots$ e $b = 0{,}999 \ldots$
$a = 21{,}47000 \ldots$ e $b = 21{,}46999 \ldots$

optamos por eliminar a segunda, que é escrita com noves. É claro que representam o mesmo número real, pois

$$\frac{a+b}{2} = b.$$

No que segue escreveremos

0 em lugar de 0,000 ...

e

1 em lugar de 1,000 ...

Definição 2 (número real)

Uma decimal infinita será chamada um número real não negativo. Uma decimal infinita a precedida do sinal negativo (–), isto é, $-a$, será chamada um número real não positivo.

Definição 3 (Igualdade)

Diz-se que os números não negativos

$$a = a_0\,,\, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \quad \text{e} \quad b = b_0\,,\, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

são iguais, e escreve-se $a = b$, quando

$$a_j = b_j, \ \forall j \in \mathbf{Z}_+$$

Se $a = 0$, põe-se $-a = 0$ e diz-se que os números não positivos $-a$ e $-b$ são iguais quando $a = b$.

Definição 4 (Desigualdade)

Dado dois números não negativos:

$$a = a_0 \ , a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \quad \text{e} \quad b = b_0 \ , b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

diz-se que a é menor do que b, e escreve-se $a < b$, quando uma das seguintes condições é verificada:

a) $a_0 < b_0$;
b) sendo $a_0 = b_0$, existe $k \in \mathbf{N}$, tal que

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1 \ , \ldots , a_{k-1} = b_{k-1} \ \text{ e } \ a_k < b_k$$

Se a e b são números não negativos diz-se que $-a < -b$ quando $b < a$ (ou $a > b$)

Desta definição segue imediatamente que:

1. Se a é um número não negativo e diferente de zero, então, $a > 0$.
2. Se a é um número não negativo e diferente de zero, então, $-a < 0$, pois $a > 0$.

Em 1), diz-se que a é positivo e em 2) que $-a$ é negativo.

Indicando-se com

$$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0\} \text{ e } \mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 0\}$$

temos

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_+ \cup \mathbf{R}_- \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_+ \cap \mathbf{R}_- = \{0\}$$

Tendo definido desigualdade o primeiro passo é demonstrar suas propriedades. O passo seguinte é demonstrar o Teorema do Supremo (ou seja, o axioma P13 é um teorema), porque ele é fundamental para todo o restante da teoria. Mas não vamos fazer isso. O que queremos fazer agora é mostrar apenas mais alguns detalhes. Observemos que se podem distingüir dois tipos de números reais:

a) *Números periódicos ou racionais*

São aqueles que, a partir de certo algarismo depois da vírgula decimal, apresentam determinado grupo de algarismos, denominado *período*, que se repete consecutiva e indefinidamente.

Exemplos

1. 2,000 ... período = 0
2. 0,222 ... período = 2

3. $-1{,}67413737\ldots$ período = 37
4. $2152{,}54231231\ldots$ período = 231

A um número racional $r = \dfrac{p}{q}$ podemos fazer corresponder, pela divisão de p por q um número real periódico. De fato, se a divisão é exata, o quociente é uma decimal finita que se transforma numa decimal infinita pelo acréscimo de zeros e, portanto, num número real periódico de período zero. Se a divisão não é exata, o quociente é uma dízima periódica que também é um número real periódico. Esta correspondência é uma função

$$f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{R}_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ é periódico}\}$$

tal que

$$f(a+b) = f(a) + f(b);\ f(ab) = f(a) \cdot f(b),$$

e se

$$a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$$

para quaisquer $a, b \in \mathbf{Q}$. Por isso, os números reais periódicos são *identificados* aos números racionais.

b) *Números irracionais*

São aqueles que não são periódicos.

Exemplos

1. $0{,}1010010001\ldots$
2. $0{,}5252252225\ldots$
3. $28{,}474477444777\ldots$

Mesmo sem definir soma de números reais podemos dar um exemplo de dois números irracionais positivos que somados dão um número racional:

$$\begin{array}{rl} & 0{,}1010010001\ldots \longrightarrow \text{irracional} \\ + & 0{,}2323323332\ldots \longrightarrow \text{irracional} \\ \hline & 0{,}3333333333\ldots \longrightarrow \text{racional} \quad (= 1/3) \end{array}$$

2

Valor Absoluto de um Número Real. Subconjuntos de $\mathbb{R}$. A Reta Ampliada $\overline{\mathbb{R}}$.

2.1. INTRODUÇÃO

Começaremos definindo valor absoluto, utilizando para isso o fato de já termos provado a existência de raiz quadrada positiva (nº 1.9 Proposição 1) e a propriedade de crescimento da raiz quadrada positiva, isto é,

$$0 \leqslant a < b \Longleftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

(nº 1.8 exercícios 4.f e 4.g). A seguir vamos apresentar os subconjuntos de $\mathbb{R}$ conhecidos como intervalos e bolas, os elementos infinitos, a reta ampliada $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e os intervalos infinitos. Por fim caracterizamos intervalos de $\mathbb{R}$ pela Propriedade de Conexão, ou seja, se I é um intervalo de $\mathbb{R}$, então quaisquer par de pontos $x, y \in I$ podem ser unidos por um segmento fechado $[x, y]$ todo contido em I.

2.2. VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL

Definição

Se x é um número real qualquer, o valor absoluto de x, indicado com $|x|$, é o número real definido por

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

onde a raiz é positiva, conforme já ficou estabelecido anteriormente.

Quando se representam os números reais por pontos de uma reta, o número $|x|$ é chamado distância de x a 0.

Exemplos

1. $|3| = \sqrt{3^2} = 3$

2. $|-4| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{4^2} = 4$

3. $|3-10| = \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{7^2} = 7$

Propriedades

1. $|x| \geqslant 0$
2. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $|-x| = |x|$

Prova. Tem-se

$$|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

Prova. Em primeiro lugar provemos que $x \leqslant |x|$. De fato,

se $x \geqslant 0 \Longrightarrow |x| = \sqrt{x^2} = x$
se $x < 0 \Longrightarrow |x| = \sqrt{x^2} > 0 > x$

Portanto,

$$|x| \geqslant x$$

Para mostrar que $-|x| \leqslant x$, usando a parte já demonstrada, temos que

$$-x \leqslant |-x| = |x|$$

logo, multiplicando-se esta desigualdade por -1,

$$x \geqslant -|x|$$

[c.q.d.]

5. $|xy| = |x|\,|y|$

Prova. Tem-se

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x|\,|y|$$

[c.q.d.]

6. Se $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

7. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ *(Propriedade Triangular)*

Prova. Tem-se

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leqslant |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2$$

isto é,

$$|x+y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2$$

donde se tira

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

[c.q.d.]

Nota: Esta propriedade é também chamada propriedade triangular, porque em Geometria quando x e y são dois segmentos orientados lados de um triângulo, o terceiro lado que é o segmento orientado soma $x + y$ é tal que seu comprimento é inferior ou igual à soma dos comprimentos dos outros dois.

8. $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$

Prova. Com efeito, tem-se $(x - y)^2 = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geqslant |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2$

isto é,

$$|x - y|^2 \geqslant (|x| - |y|)^2$$

donde resulta

$$|x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big| \qquad \text{[c.q.d.]}$$

Recordação

Se $y = ax^2 + bx + c \; (a > 0)$ é uma função quadrática com $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ela tem duas raízes reais x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$. Temos, então,

$$ax^2 + bx + c < 0 \Longleftrightarrow x_1 < x < x_2$$

e também

$$ax^2 + bx + x > 0 \Longleftrightarrow x < x_1 \text{ ou } x > x_2$$

o que se demonstra facilmente tendo em vista que y se fatora do seguinte modo

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

9. Se $c > 0$, tem-se

$$|x| < c \Longleftrightarrow -c < x < c$$

Prova. De fato, temos

$$|x| < c \Longleftrightarrow x^2 < c^2 \Longleftrightarrow x^2 - c^2 < 0 \Longleftrightarrow -c < x < c$$

[c.q.d.]

10. Se $c > 0$, tem-se

$$|x| > c \Longleftrightarrow x < -c \text{ ou } x > c$$

2.3. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **Prove que:**

a) $|x| \geqslant 0$;

b) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

c) $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0; \end{cases}$

d) $|x - y| \leqslant |x| + |y|$;

e) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x + y|$;

f) Se $c > 0$, $|x| > c \Longleftrightarrow x < -c$ ou $x > c$;

g) Se $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

2. Prove por indição finita que, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

3. Resolva as inequações:

a) $|x - 7| < 9$;

b) $|2x + 3| \leqslant 10$;

c) $|3x - 1| < x$;

d) $|2x^2 + 3x + 3| \leqslant 3$;

e) $|x - 1| + |x - 3| < |4x|$;

f) $\dfrac{1}{|x + 1||x - 3|} \geqslant \dfrac{1}{5}$.

4. Resolva as inequações:

a) $|5x| > 1$;

b) $|3x - 4| \geqslant 2$;

c) $|x^2 - 2x + 4| > 3$;

d) $|x - 3| > x + 1$;

e) $|x - 1| - |x - 3| \geqslant \dfrac{|x - 1|}{2}$;

f) $\dfrac{1}{|x - 1||x + 3|} < \dfrac{1}{5}$.

5. Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo dos seguintes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \leqslant 9\}$;

b) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -x^2 + 4x + 21 > 0\}$;

c) $C = \{x \in \mathbf{R} \mid \dfrac{1}{1 - x} \leqslant 1 + 2x\}$;

d) $D = \{x \in \mathbf{R} \mid |4 - x| > x\}$;

e) $E = \{x \in \mathbf{R} \mid |x||x + 1| < 2\}$;

f) $F = \{x \in \mathbf{R} \mid |x^2 + 2x + 4| \leqslant 7\}$;

g) $G = \{x \in \mathbf{R} \mid |x^2 - 5x + 12| > 8\}$;

h) $H = \{x \in \mathbf{R} \mid |x^2 - x - 16| < 4\}$;

i) $I = \{x \in \mathbf{R} \mid |-x^2 + x + 6| \leqslant 6\}$;

j) $J = \{x \in \mathbf{R} \mid |x + 6| + |3 - x| = 9\}$;

l) $L = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| + |x - 3| \leqslant 4\}$.

6. Determine, caso existam, o máximo e o mínimo dos conjuntos anteriores.

2.4. INTERVALOS E BOLAS

Definição 1

Se a e b são números reais com $a < b$ são chamados intervalos os conjuntos

1. $]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ – intervalo aberto de extremos a e b

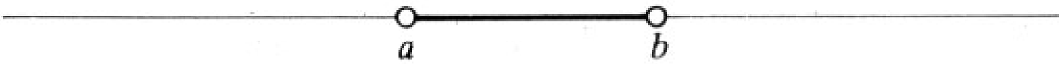
 2. $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ – intervalo fechado de extremos a e b

3. $]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$ – intervalo semi-aberto à esquerda de extremos a e b

4. $[a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$ – intervalo semi-aberto à direita de extremos a e b

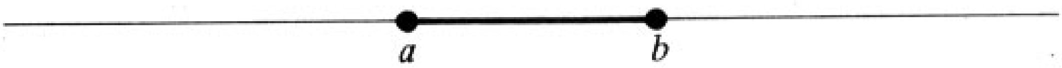
São representados graficamente do seguinte modo:

$]a,b[$



(A bolinha ○ vazia é para representar que a e b não pertencem a $]a, b[$.)

$[a, b]$



(A bolinha ● cheia é para representar que a e b pertencem a $[a, b]$.)

$]a, b]$

$[a, b[$

O conjunto $\{a\}$ é denominado intervalo degenerado.

Definição 2

Se $a \in \mathbf{R}$, chama-se bola aberta (ou vizinhança) de centro a e raio $\delta > 0$, e se indica com $B(a; \delta)$, o intervalo $]a - \delta, a + \delta[$, isto é,

$$B(a; \delta) =]a - \delta, a + \delta[$$

Propriedades

1. $B(a; \delta) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < \delta\}$

Prova.

$$x \in B(a;\delta) \iff x \in]a - \delta, a + \delta[\iff a - \delta < x < a + \delta$$
$$\iff -\delta < x - a < \delta \iff |x - a| < \delta$$
$$\iff x \in \{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < \delta\} \qquad \text{[c.q.d.]}$$

2. A intersecção de duas bolas $B(a; \delta_1)$ e $B(a; \delta_2)$ de centro a, é uma bola $B(a; \delta)$ de centro a, isto é;

$$B(a; \delta) = B(a; \delta_1) \cap B(a; \delta_2)$$

onde

$$\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$$

Prova

$$x \in B(a; \delta_1) \cap B(a; \delta_2) \iff x \in B(a; \delta_1) \text{ e } x \in B(a; \delta_2) \iff$$

$$\iff |x-a|<\delta_1 \text{ e } |x-a|<\delta_2 \iff$$
$$\iff |x-a|<\delta \text{ onde } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$
$$\iff x \in B(a;\ \delta)$$

[c.q.d.]

Definição 3 (Ponto Interior)

Seja $A \in \mathbf{R}$. Um ponto $a \in A$ denomina-se ponto interior de A quando existe uma bola $B(a;\ \delta) \subset A$ (δ conveniente). Por esta definição, vê-se que, se a é interior de A, então $a \in A$.

Exemplos

1. O conjunto $\mathbf{N}$ não tem pontos interiores.
2. Todo $x \in]a, b[$ é interior de $]a, b[$.
3. Todo $x \in [a, b]$ que não é a nem b é ponto interior de $[a, b]$, ao passo que a e b não o são.

2.5. A RETA AMPLIADA $\overline{\mathbf{R}}$. OS INTERVALOS INFINITOS

Chama-se reta numérica ampliada o conjunto

$$\mathbf{R} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

onde $+\infty$ (mais infinito) e $-\infty$ (menos infinito) são símbolos que se comportam segundo as convenções:

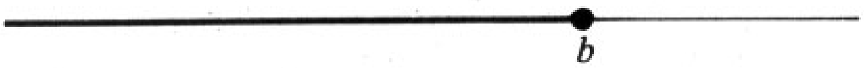
1. $-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbf{R}$
2. $x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \forall x \in \mathbf{R}$
3. $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$
4. $x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \pm\infty, \forall x \in \mathbf{R}, x > 0$
5. $x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \mp\infty, \forall x \in \mathbf{R}, x < 0$
6. $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0, \forall x \in \mathbf{R}$

Definimos os chamados intervalos infinitos, com as respectivas representações gráficas

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$ 

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$ 

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ 

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant b\}$ 

Tem-se

$$\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$$

2.6. PROPRIEDADE DOS INTERVALOS

Todos os intervalos da reta são caracterizados pela seguinte

Propriedade (Conexão)

Um subconjunto $I \neq \phi$ de $\mathbf{R}$ é um intervalo se, e somente se,

$$\boxed{\forall\, x, y \in I \text{ com } x < y \Longrightarrow [x, y] \subset I} \qquad (2)$$

Prova

($\Longrightarrow$) É imediato provar que todos os intervalos definidos gozam dessa propriedade (inclusive $\{a\}$).

($\Longleftarrow$) Seja $I \neq \phi$ um subconjunto de $\mathbf{R}$ com a propriedade (2) e provemos que I é um intervalo de um dos tipos já citados. Suponhamos, primeiramente, que I seja limitado e seja $a = \inf I$ e $b = \sup I$. Se $a = b$ temos que $I = \{a\}$, e se $a < b$ temos $]a, b[\subset I \subset [a, b]$. Portanto, I só pode ser um dos intervalos

$$]a, b[,\ ]a, b],\ [a, b[\ \text{ ou }\ [a, b]$$

os outros casos são resolvidos de forma análoga a este. Se I é minorado e não majorado, então, I é um dos intervalos $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$, onde $a = \inf I$. Se I é majorado e não minorado, então, I é um dos intervalos $]-\infty, b[$ ou $]-\infty, b]$, onde $b = \sup I$.

2.7. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Represente graficamente os seguintes conjuntos

   a) $[1, +\infty[\cap]-\infty, 4[$;
   b) $]-2, +\infty[$;
   c) $[3, 8[$;
   d) $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$.

2. Determine, entre os conjuntos a seguir, quais são intervalos, representando-os, sempre que possível, com as notações adotadas:

   a) $\{x \in \mathbf{R} \mid 5 - x < 3x - 7\}$;
   b) $\{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{(x+3)^2} = x + 3\}$;
   c) $\{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x^2 - 4} \leqslant x - 1\}$;
   d) $\{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x^2 - x} > 2x\}$;

e) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-2| < \frac{1}{2} \text{ e } x \leqslant 2\}$;

f) $\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{x}{|x|} = 1,\ x \neq 0\}$;

g) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-1| < |4-x|\}$.

3. Diga, caso existam, quais são os pontos interiores dos seguintes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x = 2 \text{ ou } |x-2| > 2x\}$;

b) $B = \{x \in \mathbf{Q} \mid 2 < x \leqslant 3\}$;

c) $C = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$;

d) $D = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in [0, 1] \text{ e é irracional}\}$;

e) $E = \left\{\frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$.

3

Generalidades sobre Funções. Funções Reais de uma Variável

3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo começamos a falar de funções, dando definições gerais e depois conceituando funções de uma variável real a valores reais. Essas funções são o objetivo principal deste capítulo e também dos capítulos que se seguirão a este. Podemos dizer, sem receio de errar, que um dos conceitos mais importantes de toda a Matemática é o de função. Em quase todos os ramos desta ciência o estudo de funções geralmente é a parte central da teoria e tem constituído sempre o maior alvo de pesquisas não só de matemáticos, como também de outros estudiosos.

3.2. GENERALIDADES SOBRE FUNÇÕES

Sejam A e B dois conjuntos não vazios.

Conceito Intuitivo de Função

> Entende-se por uma função f definida em A a valores em B, indicada com $f : A \longrightarrow B$, o par de conjuntos A e B e uma *regra* ou *lei* que associa a todo $x \in A$ um único $y \in B$.

O conjunto A é chamado domínio de definição da função, sendo também indicado com Dom f, e o conjunto B é chamado contradomínio da função.

O único $b \in B$ que é associado a um $a \in A$ é indicado com $b = f(a)$ (lê-se "f de a" ou "f calculado em a"). O valor $b = f(a)$ é chamado *imagem* de a por f, ou valor assumido por f em a.

Conjunto Imagem

O conjunto

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

é chamado conjunto imagem da função $f : A \longrightarrow B$.

Gráfico de uma Função

Chama-se gráfico de uma função $f : A \longrightarrow B$ o seguinte conjunto:

$$G_f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y = f(x) \in B\}$$

Exemplo 1

Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{9, 11, 5\}$, e estabelecermos que:

$$1 \longmapsto 11,^{*}\ 2 \longmapsto 5,\ 3 \longmapsto 11,\ 4 \longmapsto 5$$

para todo $x \in A$ fica associado um único $y \in B$. Temos, pois, uma função $f : A \longrightarrow B$, tal que

$$f(1) = 11, f(2) = 5, f(3) = 11, f(4) = 5$$

sendo

$$\operatorname{Im} f = \{11, 5\} \text{ e } G_f = \{(1, 11), (2, 5), (3, 11), (4, 5)\}$$

Exemplo 2

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ e a regra

$$1 \longmapsto c,\ 2 \longmapsto a,\ 3 \longmapsto b,\ 4 \longmapsto b$$

Tem-se, então, uma função $f : A \longrightarrow B$, tal que

$$f(1) = c, f(2) = a, f(3) = b, f(4) = b$$

sendo

$$\operatorname{Im} f = \{a, b, c\} = B \text{ e } G_f = \{(1, c), (2, a), (3, b), (4, b)\}$$

Exemplo 3

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 1, 9, 11\}$. Se estabelecermos a correspondência:

$$1 \longmapsto 1,\ 2 \longmapsto 9,\ 3 \longmapsto 3,\ 4 \longmapsto 11$$

obtemos uma função $f : A \longrightarrow B$ tal que

$$f(1) = 1, f(2) = 9, f(3) = 3, f(4) = 11$$

* Entenda o símbolo $\longmapsto$ como "é levado em" ou "tem por imagem".

Aqui, tem-se

$$\operatorname{Im} f = \{3, 1, 9, 11\} = B \text{ e } G_f = \{(1, 1), (2, 9), (3, 3), (4, 11)\}$$

Exemplo 4

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. **Por meio da equação** $y = x + 4$ **a cada** $x \in A$ **fica associado um único** $y \in B$.

De fato, se

$$f(x) = y = x + 4$$

tem-se

$$f(1) = 5, f(2) = 6, f(3) = 7, f(4) = 8$$

Temos, então, uma função $f : A \longrightarrow B$ dada ou definida por $f(x) = x + 4$. Neste caso,

$$\operatorname{Im} f = \{5, 6, 7, 8\} \text{ e } G_f = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)\}$$

Exemplo 5

Dados $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, se estabelecermos que:

$$a \longmapsto 1,\ a \longmapsto 2,\ b \longmapsto 1,\ c \longmapsto 2,\ d \longmapsto 3$$

não temos uma função, pois não é verdade que para todo $x \in A$ corresponde um único $y \in B$. De fato, ao elemento a correspondem dois elementos de B, 1 e 2.

A definição intuitiva de função dada tem o defeito de lançar mão de uma idéia vaga: a de regra ou lei que associa a cada $x \in A$ um único $y \in B$. Adiante, veremos exemplos que mostrarão que as regras podem aparecer de vários modos diferentes: através de uma ou mais equações ou, então, através de frases em linguagem corrente, ou, ainda, através de equações combinadas com frases etc. Por isso, fica difícil definir função usando como ponto de partida o aspecto *da regra* por ela apresentado. Podemos dar uma definição formal de função que evite falar em regra, lei ou coisa parecida. Para isso, basta notar que para toda função $f : A \longrightarrow B$ podemos montar o seu gráfico G_f. Invertamos o processo: a definição de função é dada utilizando o conjunto $G_f \subset A \times B$.

Definição Formal de Função

> Entende-se por uma função f definida em A a valores em B um subconjunto $G_f \subset A \times B$ que satisfaz às condições:
>
> F1. $\forall x \in A\ \exists\ y \in B$ tal que $(x, y) \in G_f$
>
> F2. Se $(x, y) \in G_f$ e $(x, z) \in G_f \Longrightarrow y = z$

Vemos, então, por F1, que para todo $x \in A$ se associa pelo menos um $y \in B$, tal que $(x, y) \in G_f$ e, por F2, que o y associado a x é único. Desse modo a idéia de *regra* pode ser explicitada:

$$x \in A \longmapsto y \in B, \text{ tal que } (x, y) \in G_f$$

3.3. FUNÇÕES INJETORA, SOBREJETORA E BIJETORA

Definição 1 (Função Injetora)

Diz-se que uma função $f : A \longrightarrow B$ é injetora quando, para quaisquer x_1, $x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em outras palavras, diz-se que $f : A \longrightarrow B$ é injetora se $f(x_1) = f(x_2)$, com x_1 e x_2 em A, então, $x_1 = x_2$.

Exemplo

As funções dos exemplos 3 e 4 do item anterior são injetoras.

Definição 2 (Função Sobrejetora)

Diz-se que uma função $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetora quando, para todo $y \in$ $\in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Em outros termos, $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetora quando $\text{Im } f = B$.

Exemplos

As funções dos exemplos 2 e 3 do item anterior são sobrejetoras.

Definição 3 (Função Bijetora ou Biunívoca)

Diz-se que uma função $f : A \longrightarrow B$ é bijetora ou biunívoca quando é injetora e sobrejetora.

Exemplo

A função do exemplo 3 do item 3.2 é bijetora.

3.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   Com a tabela

x	y
a	4
e	3
i	3
o	2
u	1

estabelecemos uma regra entre elementos de A e de B de modo que a cada $x \in A$ colocado na tabela associa-se o $y \in B$ colocado à sua direita. Diga se a regra assim estabelecida determina uma função $f: A \longrightarrow B$.

2. Com os mesmos conjuntos A e B do exercício anterior, quais das tabelas seguintes dão origem a funções $f: A \longrightarrow B$?

a)

x	y
a	
e	1
i	
o	2
u	

b)

x	y
a	1
e	1
i	1
o	2
u	2

c)

x	y
a	1
e	2
i	3
o	4
u	5

d)

x	y
a	1
e	2
e	3
i	4
u	5
u	1

e)

x	y
a	5
e	5
i	5
o	5
u	5

f)

x	y
a	1
i	2
u	3

g)

x	y
a	3
e	4
i	5
o	5
u	4

h)

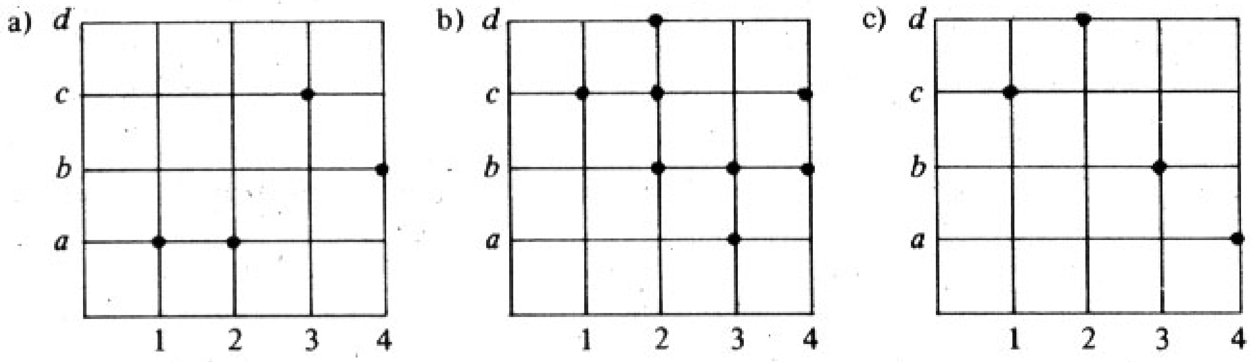
x	y
a	1
e	4
i	2
o	5
u	3

i)

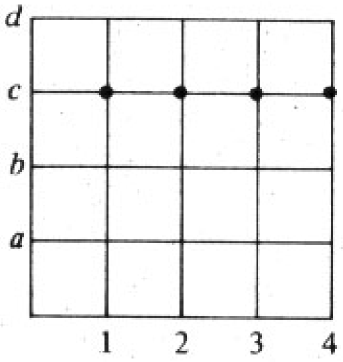
x	y
a	2
e	1
i	2
o	3
u	3

3. Entre as funções determinadas pelas tabelas do exercício anterior diga quais são injetoras, quais são sobrejetoras e quais bijetoras.

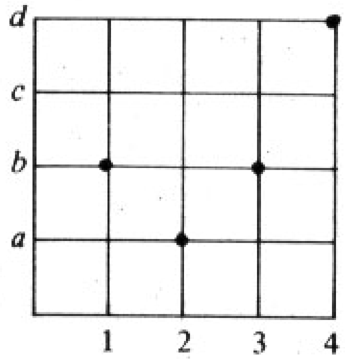
4. Considerando-se o conjunto G de pontos dos diagramas



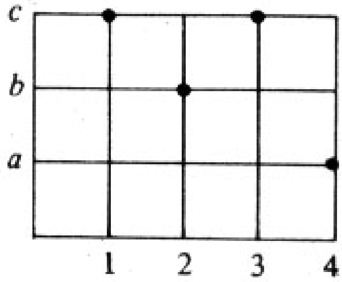
d)



e)



f)



como pontos de um subconjunto de $A \times B$, em que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ exceto em (f), no qual $B = \{a, b, c\}$, diga se G determina uma função $f : A \longrightarrow B$.

5. Entre as funções determinadas pelo conjunto $G \subset A \times B$ do exercício anterior diga quais são injetoras, quais são sobrejetoras e quais são bijetoras.

6. Nos exercícios 2 e 4, nos casos em que se têm funções $f : A \longrightarrow B$ determine Imf.

3.5. FUNÇÃO REAL DE UMA VARIÁVEL REAL REPRESENTAÇÃO GRÁFICA. EXEMPLOS

Definição (Função Real de uma Variável Real)

Uma função $f : A \longrightarrow B$, onde A e B são subconjuntos não vazios de $\mathbf{R}$, é chamada função real de uma variável real (ou função de uma variável real a valores reais).

Daqui por diante todas as funções de que trataremos serão funções reais de uma variável real.

Representação Gráfica de uma Função

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função real de variável real. O gráfico $G_f = \{(x, f(x)) \in \in \mathbf{R}^2 \mid x \in A\}$ dessa função pode ser representado no plano geométrico, bastando para isso que se introduza um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas nesse plano: desse modo, a cada par ordenado $(x, f(x)) \in G_f$ fazemos corresponder um ponto $P = (x, f(x))$ do plano. Em vista disso, freqüentemente vamos usar a expressão mais simples "gráfico de f" para designar a "representação geométrica do gráfico f" (o próprio texto deixará claro quando "gráfico de f" se referir ao conjunto G_f).

Exemplo 1 Função Constante

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, que a todo $x \in \mathbf{R}$ associa sempre o mesmo número real k, ou seja,

$$f(x) = k, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

 é denominada *função constante.*

Temos:

a) Dom $f = \mathbf{R}$ Im $f = \{k\}$

b) Gráfico

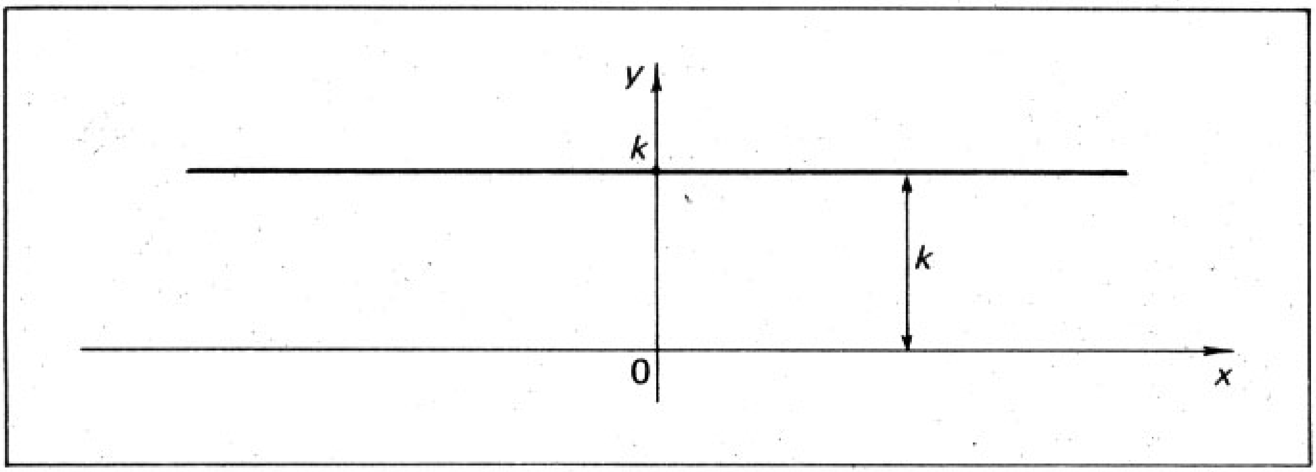


Figura 3.1.

Exemplo 2 Função Linear

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = ax$, onde a é uma constante $\neq 0$, denomina-se função linear.

Temos

a) Dom $f = \mathbf{R}$ Im $f = \mathbf{R}$

b) O seu gráfico é uma reta que passa pela origem e não é paralela a nenhum dos eixos. O número a é o coeficiente angular dessa reta.

i) $a > 0$

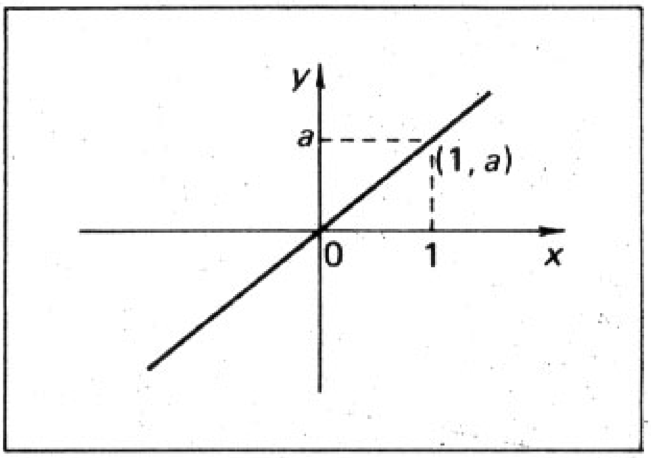


Figura 3.2

ii) $a < 0$

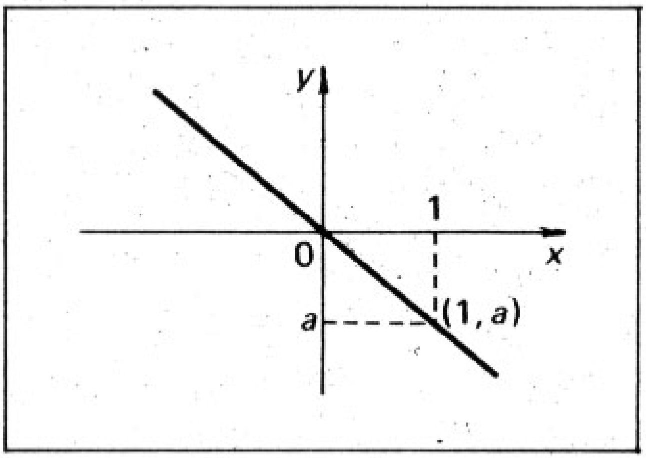


Figura 3.3

Um caso particular desta função é aquele em que $a = 1$, isto é, a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = x$, e que é denominada função identidade de $\mathbf{R}$. Vamos indicá-la com *id*, isto é,

$$id(x) = x, \ \forall x \in \mathbf{R}$$

Temos

a) Dom $id = \mathbf{R}$ Im $id = \mathbf{R}$

b) Seu gráfico é a **bissetriz** do 1º e do 3º quadrantes:

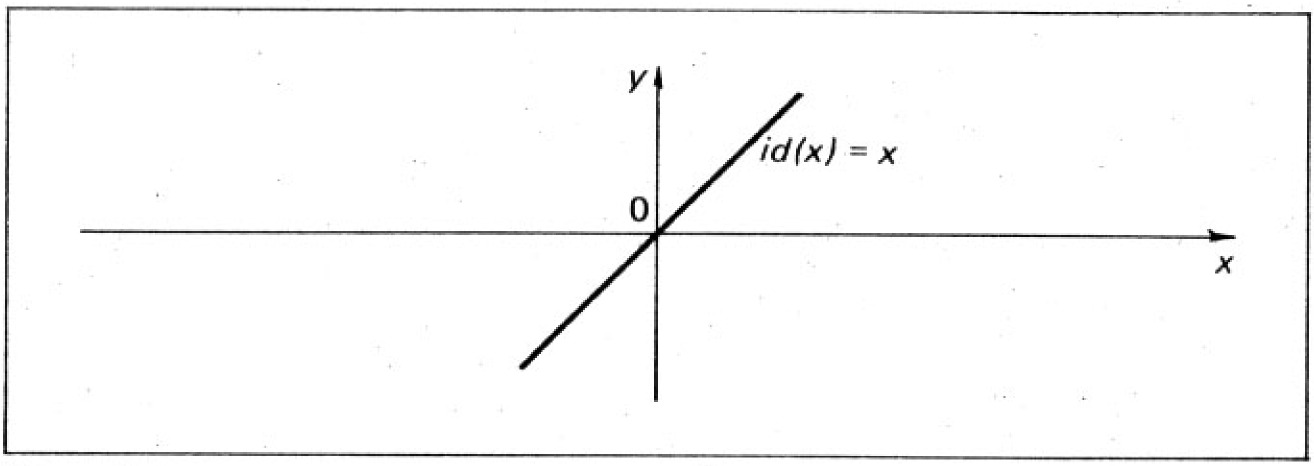


Figura 3.4

Exemplo 3. Função Afim

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com a e b constantes não nulas é chamada função afim. Temos

a) Dom $f = \mathbf{R}$ Im $f = \mathbf{R}$

b) O gráfico de uma função afim é uma reta não paralela a nenhum dos eixos, de coeficiente angular a e coeficiente linear b. Ela intercepta o eixo Oy no ponto $(0, b)$ e o eixo Ox no ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

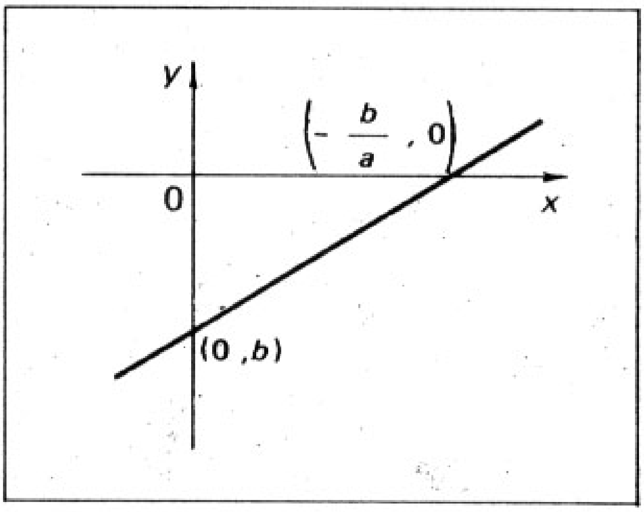


Figura 3.5

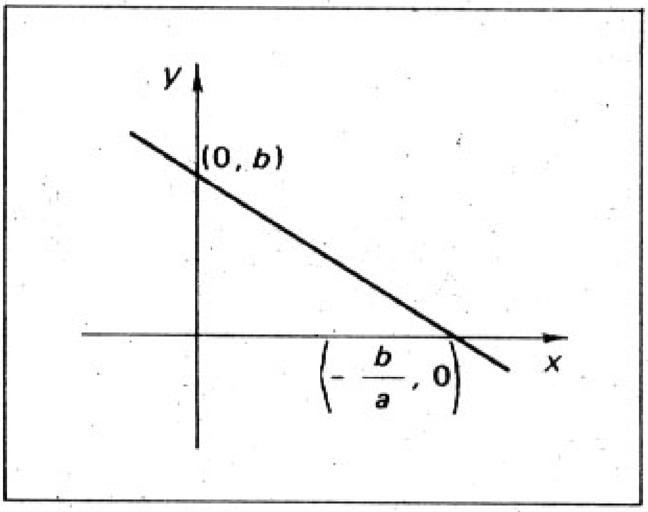


Figura 3.6

Exemplo 4. Função Quadrática ou Trinômio do 2º Grau

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c constantes e $a \neq 0$, denomina-se função quadrática ou trinômio do 2º grau. Se o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

a função quadrática tem duas raízes* reais x_1 e x_2 distintas e fatora-se do seguinte modo

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Se $\Delta = 0$, a função quadrática tem uma raiz dupla $x_1 = x_2$, fatorando-se na forma

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

Enfim, se $\Delta < 0$ a função quadrática não tem raízes reais e não admite fatoração no conjunto dos reais. Sabemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, sendo uma curva simétrica em relação a um eixo paralelo a Oy e que passa pelo vértice $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$. Os gráficos nos vários casos se assemelham aos seguintes:

i) $\Delta > 0$

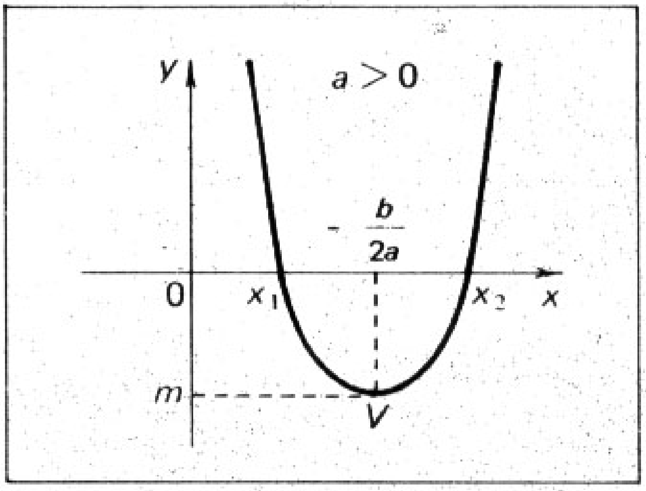


Figura 3.7

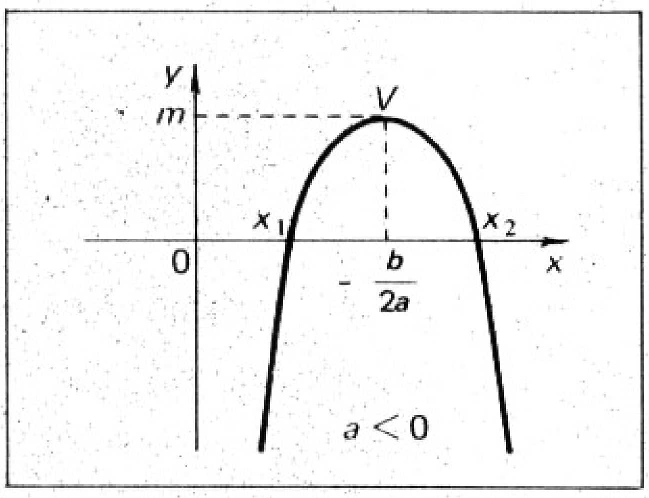


Figura 3.8

ii) $\Delta = 0$

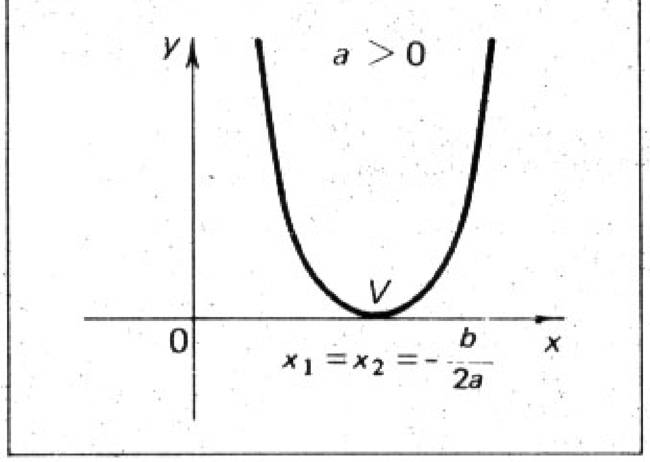


Figura 3.9

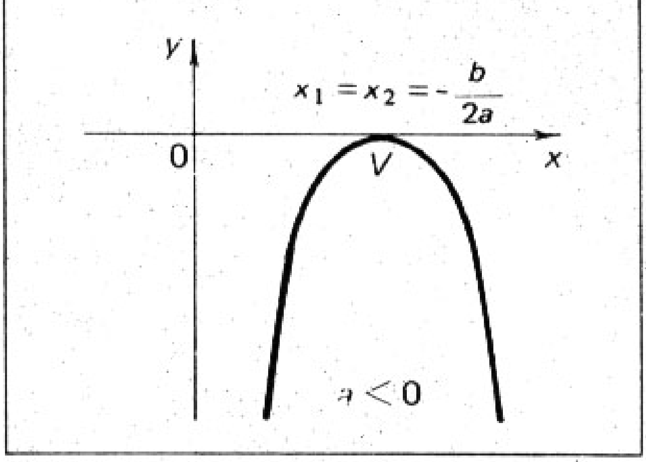


Figura 3.10

* Raiz ou zero de uma função $f(x)$ é um ponto $x_0 \in \text{Dom} f$ para o qual $f(x_0) = 0$.

iii) $\Delta < 0$

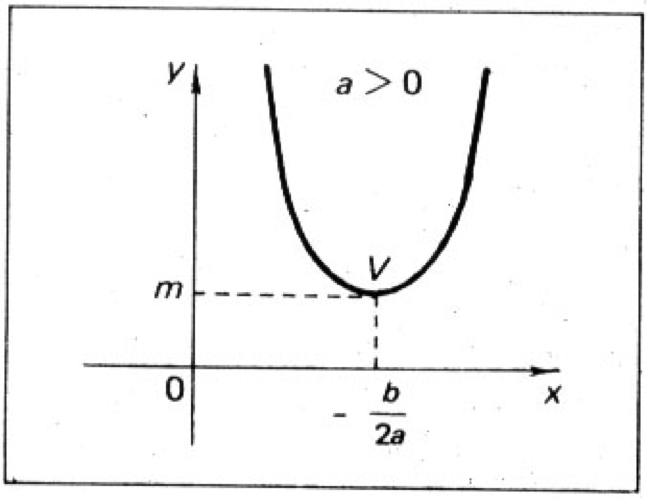


Figura 3.11

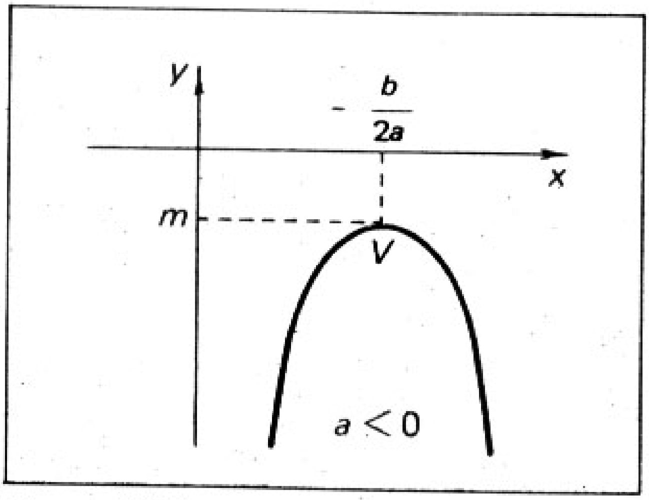


Figura 3.12

Observemos que, sendo $m = \frac{\Delta}{4a}$,

$$\begin{array}{ll} \text{se } a > 0 & \text{Im } f = [m, +\infty[\\ \text{se } a < 0 & \text{Im } f =]-\infty, m] \end{array}$$

Exemplo 5. Função Racional Inteira ou Polinômio

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes, denomina-se função racional inteira ou polinômio de grau n ($n \in \mathbf{Z}_+$). Os polinômios costumam ser indicados pelas letras latinas maiúsculas: $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ etc. Vê-se que a função quadrática é um polinômio de grau 2, a função afim é um polinômio de grau 1, e a função constante é um polinômio de grau zero, ou seja, todas as funções anteriores são casos particulares de funções polinomiais. O gráfico de um polinômio de grau n($n \geqslant 2$) denomina-se parábola de ordem n.

Convém destacar mais dois casos particulares:

i) $f(x) = x^{2n}$ *potência de expoente par* ($n \in \mathbf{N}$)

Aqui temos

$$\text{Dom } f = \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \text{Im } f = \mathbf{R}_+$$

e todos os gráficos são semelhantes ao da função x^2:

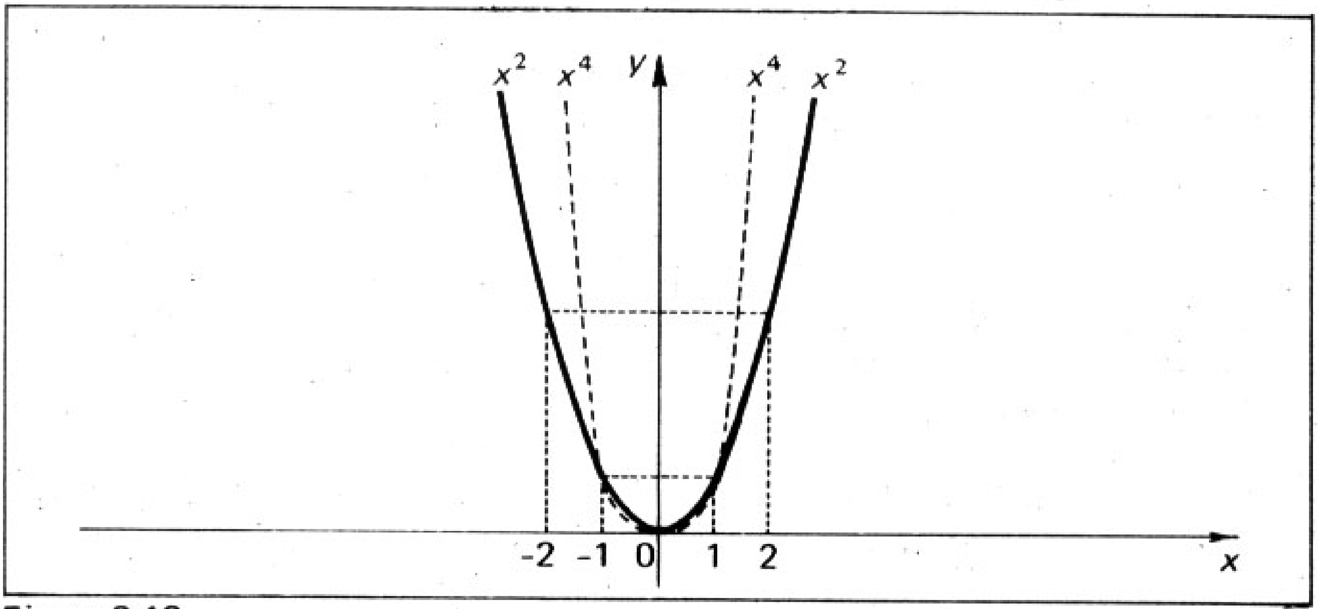


Figura 3.13

ii) $f(x) = x^{2n+1}$ *potência de expoente ímpar* ($n \in \mathbf{N}$)

Aqui temos

$$\text{Dom}\, f = \mathbf{R} \qquad \text{Im}\, f = \mathbf{R}$$

e todos os gráficos são semelhantes ao de x^3:

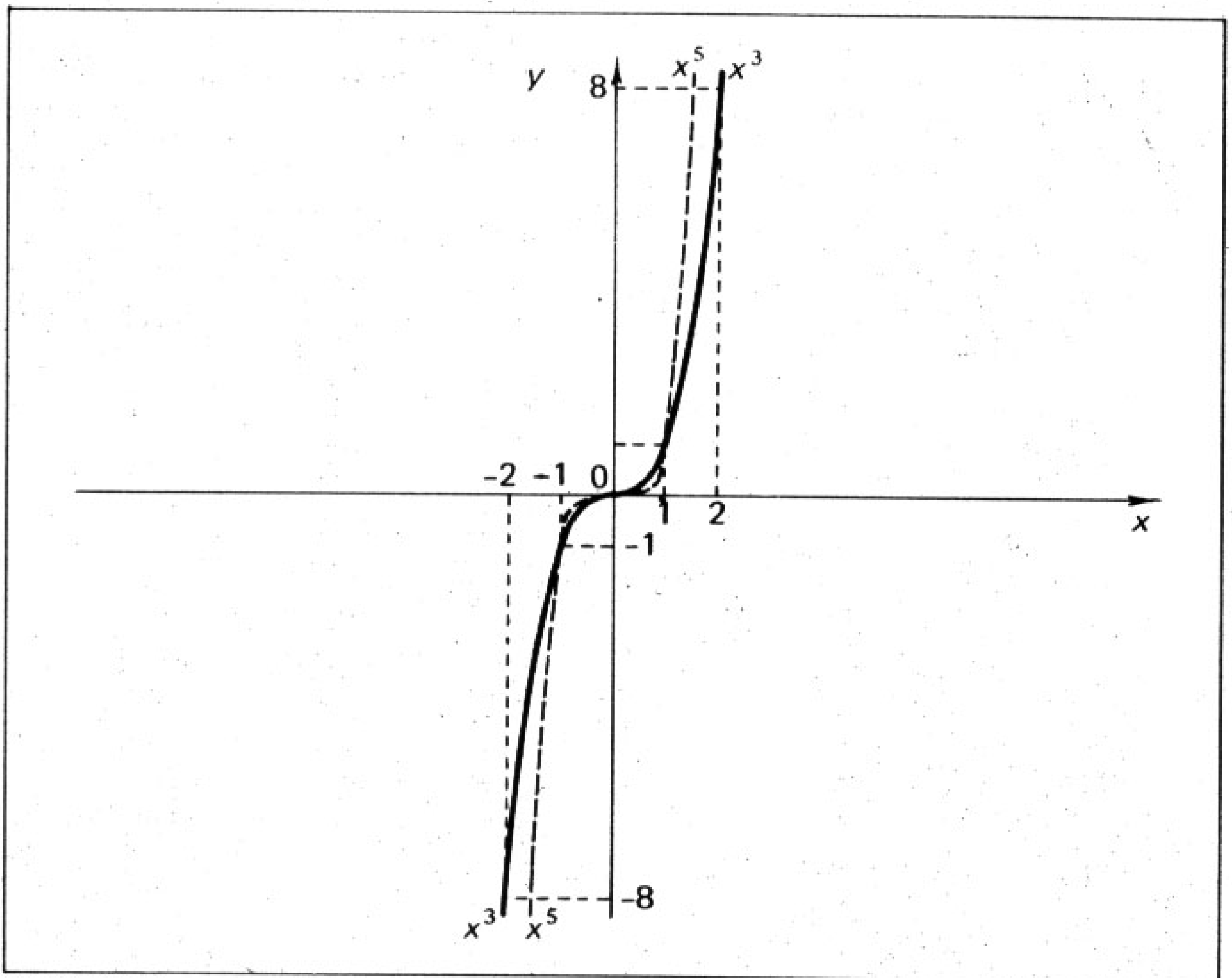


Figura 3.14

Exemplo 6. Função Racional Fracionária

É uma função $f(x)$ dada como quociente de dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, ou seja,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

onde $a_0 b_0 \neq 0$, sendo $\text{Dom}\, f = \{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

Vejamos alguns casos particulares

i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

Temos

a) $\text{Dom}\, f = \mathbf{R} - \{0\} = \mathbf{R}_*$ $\quad \text{Im}\, f = \mathbf{R}_*$

b) O gráfico desta função é o de uma hipérbole, cujo eixo é a bissetriz $y = x$ do 1.º e 3.º quadrantes e cujas "assíntotas" são perpendiculares entre si (são os eixos $0x$ e $0y$), em virtude do que ela se denomina hipérbole equilátera.

x	$f(x)$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

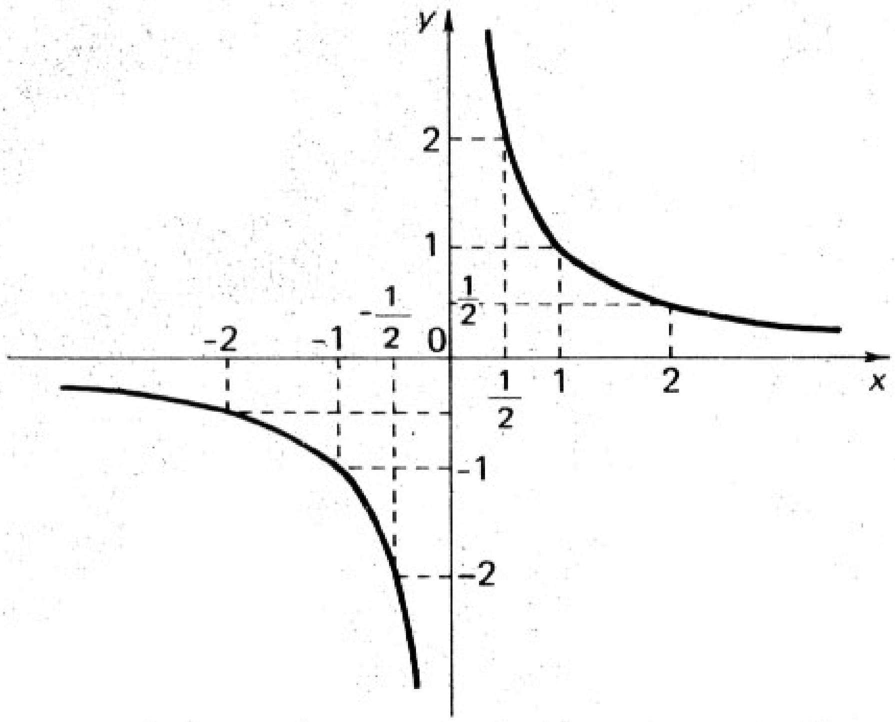


Figura 3.15

ii) $f(x) = \dfrac{2 + x}{1 + x} = 1 + \dfrac{1}{1 + x}$, $\qquad x \neq -1$

Temos

a) $\text{Dom}\, f = \mathbf{R} - \{-1\}$ $\qquad \text{Im}\, f = \mathbf{R} - \{1\}$

b) O gráfico desta função é uma hipérbole semelhante à anterior, tendo agora como assíntotas as retas perpendiculares entre si e paralelas aos eixos $x = -1$ (paralela a $0y$) e $y = 1$ (paralela a $0x$)

x	$f(x)$
−3	0,5
−2	0
−1,5	−1
− 0,5	3
0	2
1	1,5

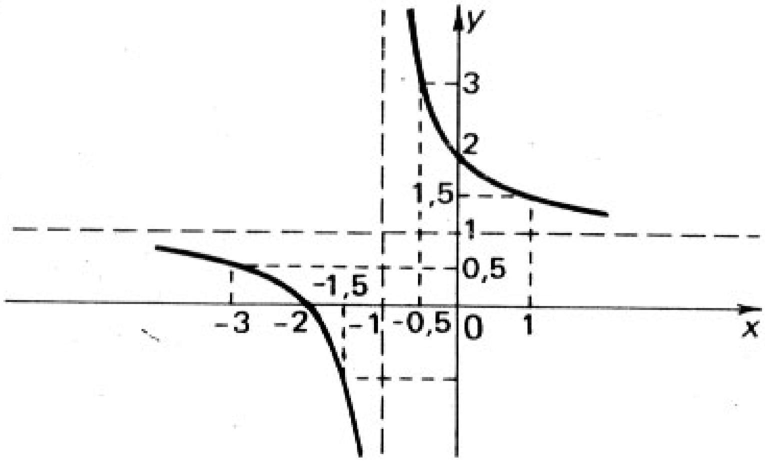


Figura 3.16

iii) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Temos

a) Dom $f = \mathbf{R}$ $\qquad$ Im $f =]0, 1]$
b) Gráfico

x	$f(x)$
−2	1/5
−1	1/2
0	1
1	1/2
2	1/5

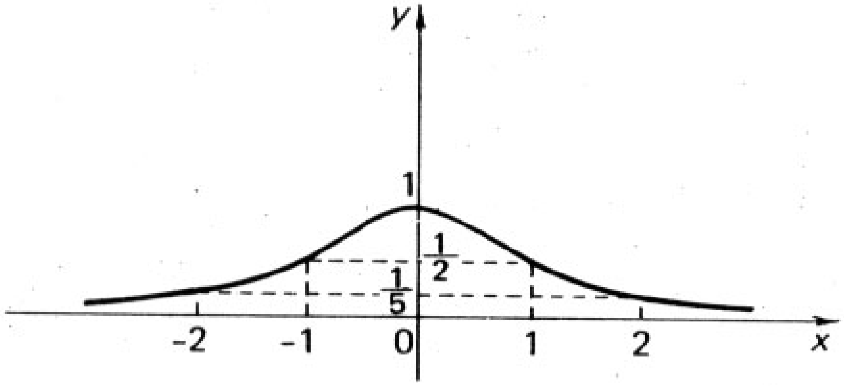


Figura 3.17

Exemplo 7

Seja $f:[1,2] \longrightarrow \mathbf{R}$ que a todo $x \in [1, 2]$ associa o seu dobro. Escrevemos $f:[1, 2] \longrightarrow \mathbf{R}$, sendo a regra f dada por $x \longrightarrow 2x$ ou ainda $f(x) = 2x$, $\forall x \in$ $\in [1, 2]$.

Temos:

a) Dom $f = [1, 2]$ Im $f = [2, 4]$
b) O valor que f assume em x é $f(x) = 2x$
c) Gráfico de f:

x	$f(x)$
1	2
1,2	2,4
1,5	3,0
2	4

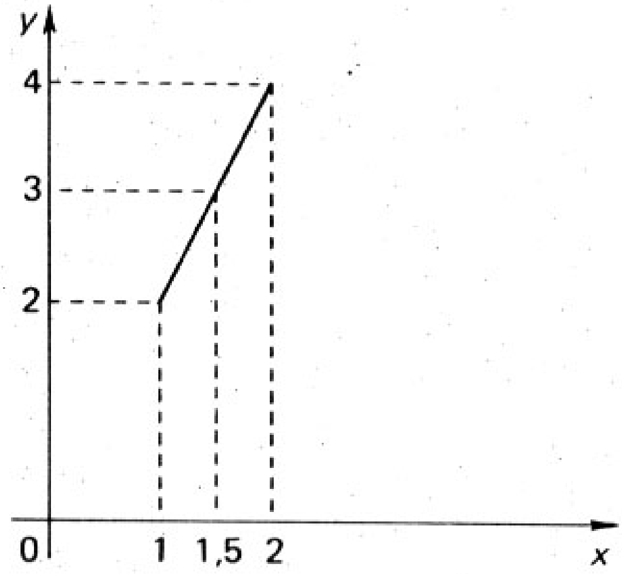


Figura 3.18

Exemplo 8. (Função valor absoluto de x)

É a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = |x|$.

Temos:

a) Dom $f = \mathbf{R}$ Im $f = \mathbf{R}_+$
b) O valor que f assume em x é $f(x) = |x|$
c) Gráfico de f

x	$f(x)$
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

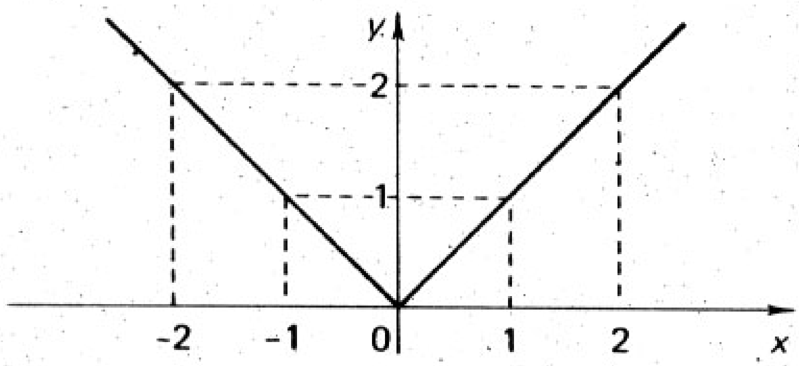


 Figura 3.19

Exemplo 9. (Função colchete de x)

Seja $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ que a todo $x \in \mathbf{R}$ associa um número inteiro n_x indicado com $[x]$ (colchete de x), tal que $n_x \leqslant x < n_x + 1$ (ou seja, $[x] = n_x$ é o maior inteiro que não supera o número x). Por isso, esta função é chamada função máximo-inteiro ou função colchete.

Temos:

a) Dom $f = \mathbf{R}$ Im $f = \mathbf{Z}$

b) $f(x) = [x]$

c) Gráfico de f

x	$[x]$
-2,5	-3
-2	-2
-1,5	-2
-1	-1
-0,5	-1
0	0
0,5	0
1	1
1,5	1

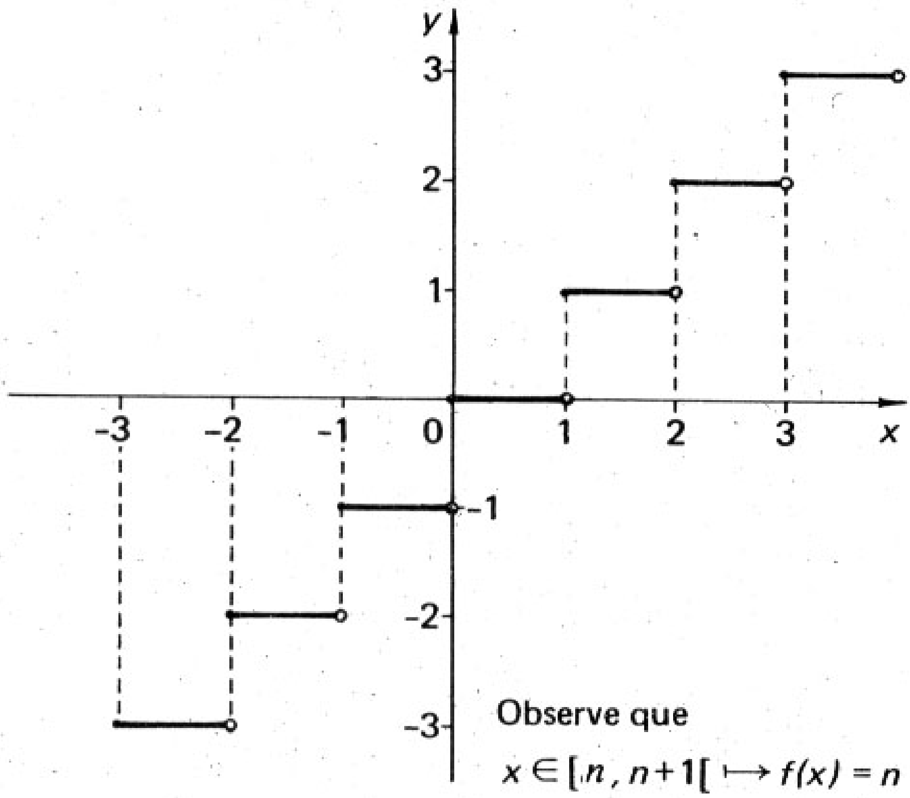


Figura 3.20

Exemplo 10.

Seja $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Temos

a) Dom $f = \mathbf{R}_+$ Im $f = \mathbf{R}_+$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) Gráfico

x	$\sqrt{x}$
0	0
0,5	0,707
1	1
2	1,414
3	1,732
4	2
⋮	⋮

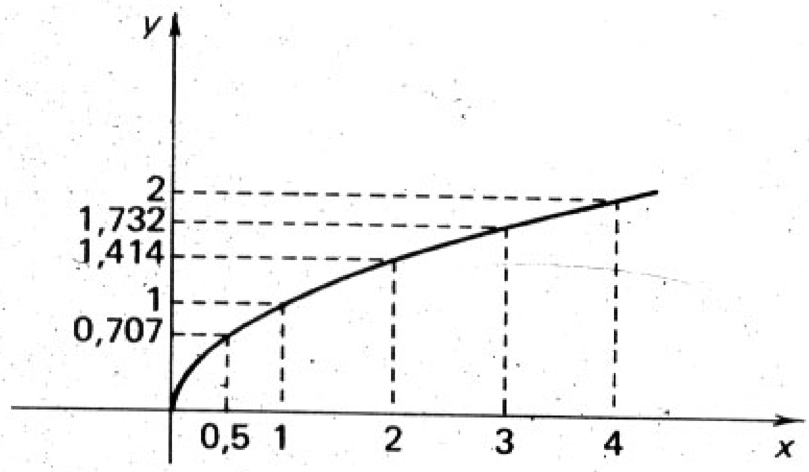


Figura 3.21

Exemplo 11

Se $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Esta função é chamada função sinal de x ou sgn x.

Temos

a) Dom $f = \mathbf{R}$ Im $f = \{-1, 0, 1\}$

b) Gráfico

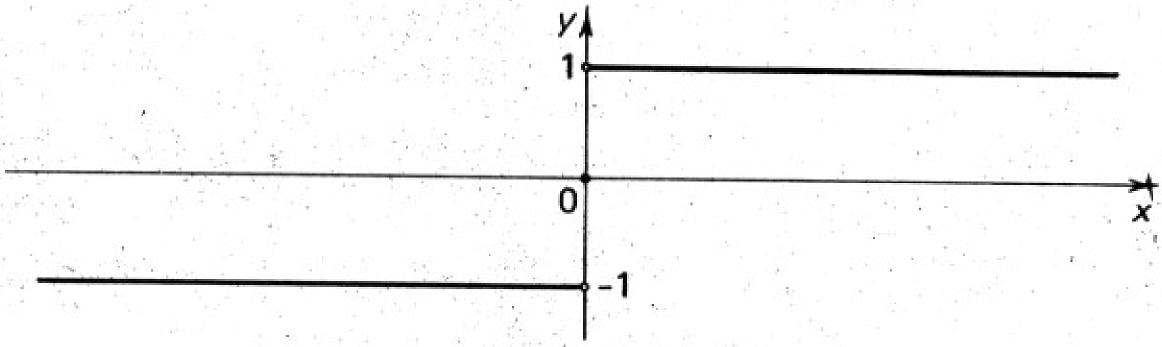


Figura 3.22

Observação:

Muitas vezes uma função é dada por uma regra $x \longmapsto f(x)$ ou, simplesmente, $f(x)$ sem explicitarmos seu domínio e contradomínio. Fica, então, subentendido que o contradomínio é **R** e que o domínio é o "maior" subconjunto de **R** para o qual $f(x)$ é um número real.

Exemplo

Seja dada a regra

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Neste caso, o maior subconjunto de **R** para o qual $f(x) \in \mathbf{R}$ é

$$4 - x^2 \geqslant 0$$

ou seja,

$$-2 \leqslant x \leqslant 2$$

Logo Dom $f = [-2, 2]$ e Im $f = [0, 2]$ e seu gráfico tem o seguinte aspecto

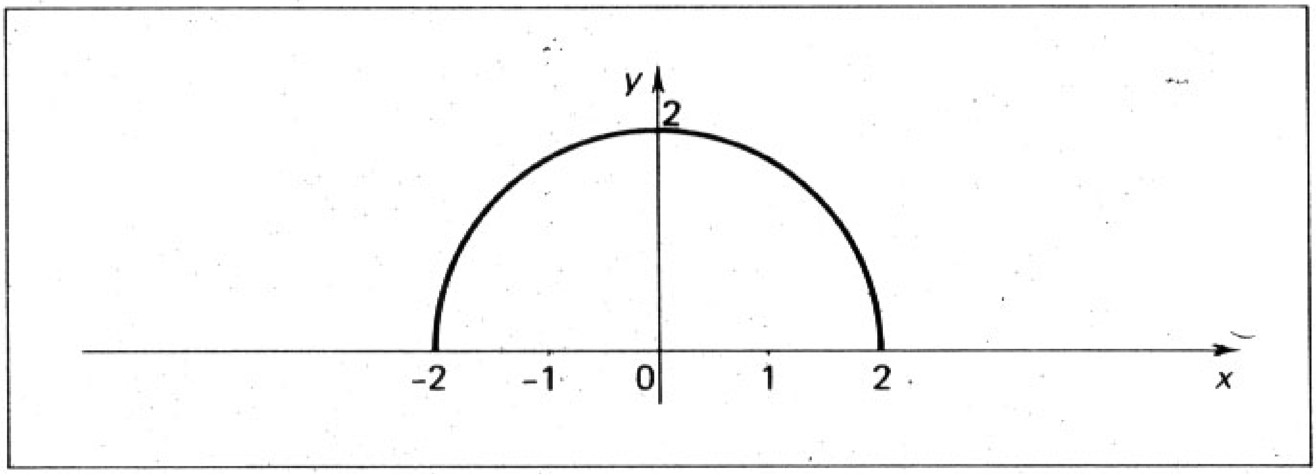


Figura 3.23

3.6. OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

Definição 1

Duas funções $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbf{R}$ são iguais quando $A = B$ e $f(x) =$ $= g(x), \forall x \in A$

Definição 2

Sejam f e g duas funções, sendo A = Dom f e B = Dom g. Se $A \cap B \neq \phi$ podemos definir

a) *Função Soma de f e g:* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, sendo Dom $(f + g) = A \cap B$.

b) *Função Diferença de f e g:* $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, sendo Dom $(f - g) =$ $= A \cap B$.

c) *Função Produto de f e g:* $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$, sendo Dom $fg = A \cap B$.

d) *Função Quociente de f por g:* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, desde que Dom $\dfrac{f}{g} =$
$= \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\} \neq \phi$.

e) *Produto de uma Constante por uma Função:* $(kf)(x) = kf(x)$, sendo k constante e Dom $kf = A$.

f) *Função Valor Absoluto de f:* $|f|(x) = |f(x)|$, sendo Dom $|f| = A$.

Exemplo:

Sejam as funções:

$f(x) = \sqrt{4-x}$ Dom $f = A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 4\}$

$g(x) = \sqrt{x^2-1}$ Dom $f = B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$

Temos

$(f+g)(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$ Dom $(f+g) = A \cap B =$
$= \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 4\}$

$(f-g)(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{x^2-1}$ Dom $(f-g) = A \cap B$

$(fg)(x) = \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x^2-1}$ Dom $(fg) = A \cap B$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x^2-1}}$ Dom $(fg) = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\} =$
$= \{x \in \mathbf{R} \mid x < -1 \text{ ou } 1 < x \leqslant 4\}$

$(-5f)(x) = -5\sqrt{4-x}$ Dom $(-5f) =$ Dom $f = A$

$|f|(x) = |\sqrt{4-x}| = \sqrt{4-x}$ Dom $|f| =$ Dom $f = A$.

Definição 2 (Composição de Funções)

Sejam $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbf{R}$ duas funções tais que Im $f \subset B$, ou seja, para todo $x \in A$ o valor $f(x) \in B$. A função gof definida por

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

é denominada função composta de g e f e temos Dom $gof =$ Dom f.

O seguinte esquema ilustra o que acontece na composição de funções:

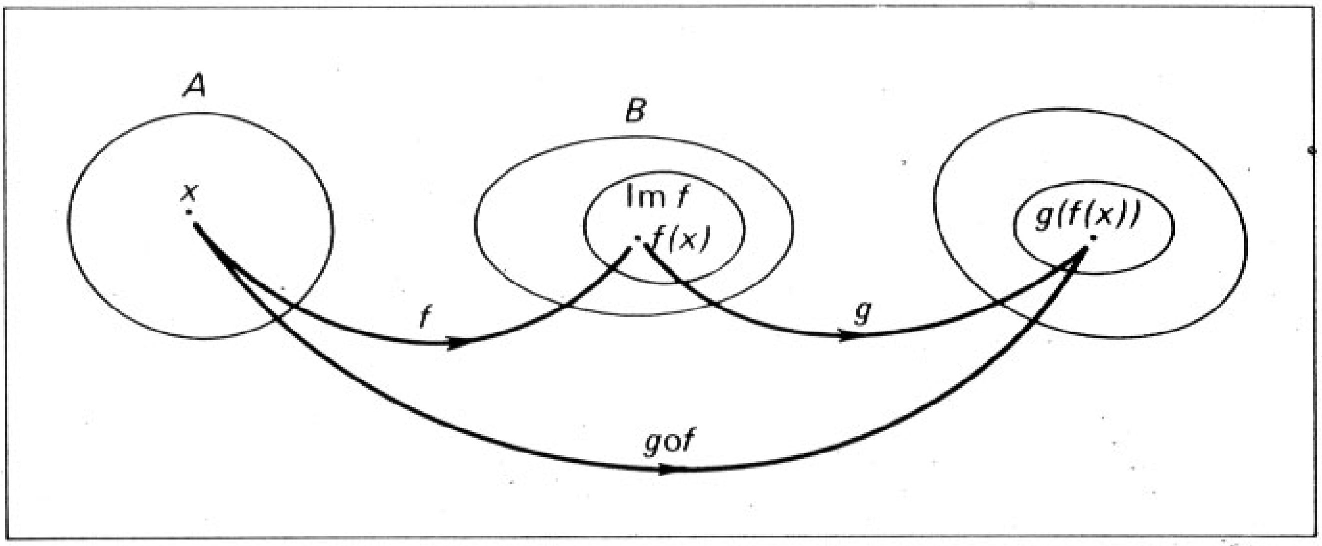


Figura 3.24

Exemplo 1

Sejam f e g dadas por $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x^2 + 4x$. Determine as funções gof e fog.

Solução

a) Dom f = **R** Im f = **R**
Dom g = **R** Im $g = [-4, +\infty[$

$$\therefore \text{Im } f \subset \text{Dom } g \Longrightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = (3x-2)^2 + 4(3x-2) =$$
$$= 9x^2 - 4 \therefore \text{ Dom } gof = \text{Dom } f$$

b) $\text{Im } g \subset \text{Dom } f \therefore (fog)(x) = f(g(x)) = 3(x^2 + 4x) - 2 = 3x^2 + 12x - 2$

Dom fog = Dom g

Nota: Muitas vezes, são dadas duas regras $f(x)$ e $g(x)$ sem se especificar quais são seus domínios. Então, para se obter gof o domínio de f deve ser escolhido de tal sorte que Im $f \subset$ Dom g. Mesmas considerações para o caso de se querer obter fog.

Exemplo 2

Sejam as funções $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $g(x) = x^2$. Determine as funções fog e gof.

Solução

Temos

a) $(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2$

sendo Dom gof = Dom $f = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 1\}$

b) $(fog)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{g(x) - 1} = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

sendo Dom $fog = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \pm 1\}$ = Dom g. (Toma-se Dom$g = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \pm 1\}$ para que exista fog)

Exemplo 3

Sejam as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$.

Determine as funções gof e fog.

Solução.

Temos

a) $(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$

sendo Dom gof = Dom $f = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0\}$

Observação:

Cuidado! Aqui, como $(gof)(x) = x$, você fica tentado a colocar Dom $gof = \mathbf{R}$, o que é um erro, porque gof é uma composição e seu domínio não pode ser maior que o Dom f que é o da função de partida.

b) $(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$

Dom fog = Dom $g = \mathbf{R}$

Exemplo 4

Seja a função

$$h(x) = (x^2 - 1)^{10}, x \in \mathbf{R}$$

Ela pode ser considerada como composta gof das funções

$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$
$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $g(x) = x^{10}$

Exemplo 5

Seja a função

$$h(x) = \sqrt[3]{(x^2 + x + 1)}, x \in \mathbf{R}$$

Ela pode ser considerada como composta gof das funções

$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = x^2 + x + 1$

$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $g(x) = \sqrt[3]{x}$

3.7. FUNÇÃO INVERSA

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função bijetora. Sendo sobrejetora tem-se $\operatorname{Im} f = B$, o que significa dizer que para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$, e esse x é único, porque f é injetora. Podemos, então, definir uma função

$$g : B \longrightarrow A$$

que a $y \in B$ associa o único $x \in A$, tal que $f(x) = y$, ou seja,

$$g(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$$

Definição (Função Inversa)

Se $f : A \longrightarrow B$ é bijetora, a função

$$g : B \longrightarrow A$$

definida por

$$g(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$$

denomina-se função inversa da função f e costuma ser indicada com f^{-1}.

A Figura 3.25 ilustra o entendimento de função inversa.

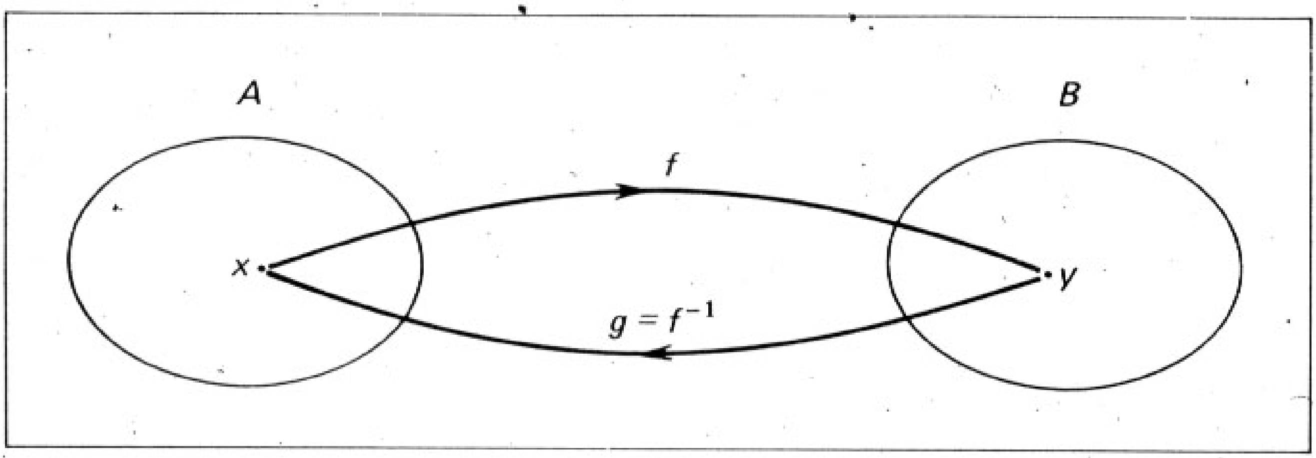


Figura 3.25

Temos, então:

$f^{-1} o f = id_A (id_A$ = identidade de $A)$, isto é, $f^{-1}(f(x)) = x, \ \forall \ x \in A$

$f o f^{-1} = id_B (id_B$ = identidade de $B)$, isto é, $f(f^{-1}(y)) = y, \ \forall \ y \in B$

Relação entre os Gráficos de f e f^{-1}

Observemos em primeiro lugar que os pontos $P = (a, b)$ e $Q = (b, a)$ do plano são simétricos em relação à bissetriz $y = x$ do 1º e 3º quadrantes. De fato, o quadrilátero $PAQB$ (Figura 3.26) é um quadrado, pois

$\overline{AP} = \overline{QB} = b - a$
$\overline{AQ} = \overline{PB} = b - a$

Logo, P e Q são vértices opostos desse quadrado, e como num quadrado as diagonais são perpendiculares e se cortam ao meio, resulta $d = d'$, onde

d = distância de P à bissetriz $y = x$ e
d' = distância de Q à bissetriz $y = x$. [c.q.d.]

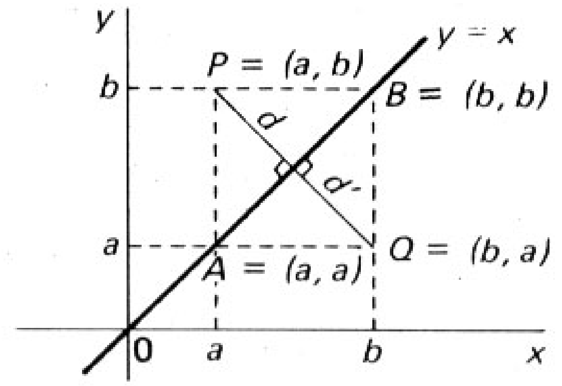


Figura 3.26

Considerando-se, então, uma função bijetora $f : A \longrightarrow B$ e sua inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$, seus gráficos são simétricos em relação à bissetriz $y = x$ do 1.º e 3.º quadrantes, pois

$$(a, b) \in G_f \Longleftrightarrow (b, a) \in G_{f^{-1}}$$

De fato,

$$(a, b) \in G_f \Longleftrightarrow b = f(a) \Longleftrightarrow a = f^{-1}(b) \Longleftrightarrow (b, a) \in G_{f^{-1}}$$

A Figura 3.27 representa os gráficos de duas funções inversas:

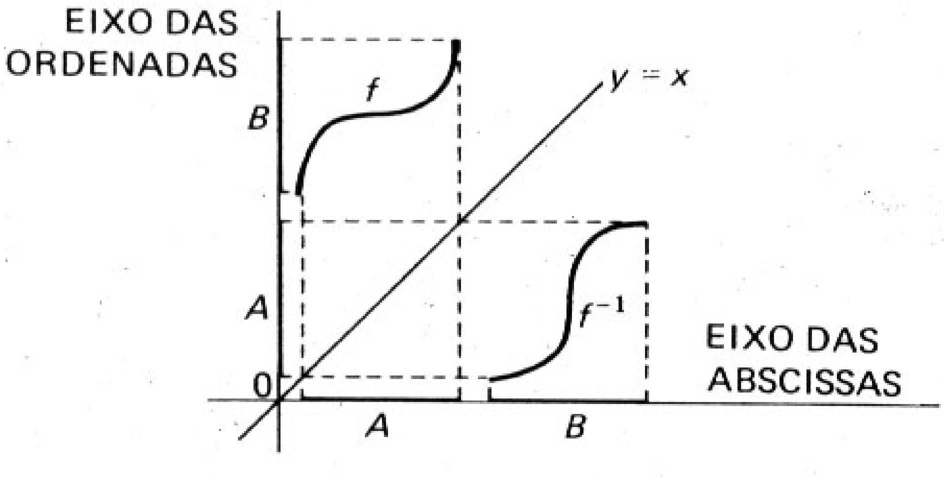


 Figura 3.27

Exemplo 1

A função $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$ é bijetora. Logo, admite inversa

$$f^{-1}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

Vamos dar dois modos para se obter uma fórmula para f^{-1}.

1º modo. Sendo $y = 3x + 1$ a função f dada, basta tirar x em função de y, o que nos dá

$$x = \frac{y-1}{3}$$

logo,

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}, \ \forall\, y \in \mathbf{R}, \text{ ou seja, } f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}, \ \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

2º modo. Sendo $f(f^{-1}(y)) = y, \ \forall\, y \in \mathbf{R}$, segue que

$$3f^{-1}(y) + 1 = y \ \therefore \ f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}, \forall y \in \mathbf{R}.$$

Os gráficos de f e f^{-1} estão representados na Figura 3.28.

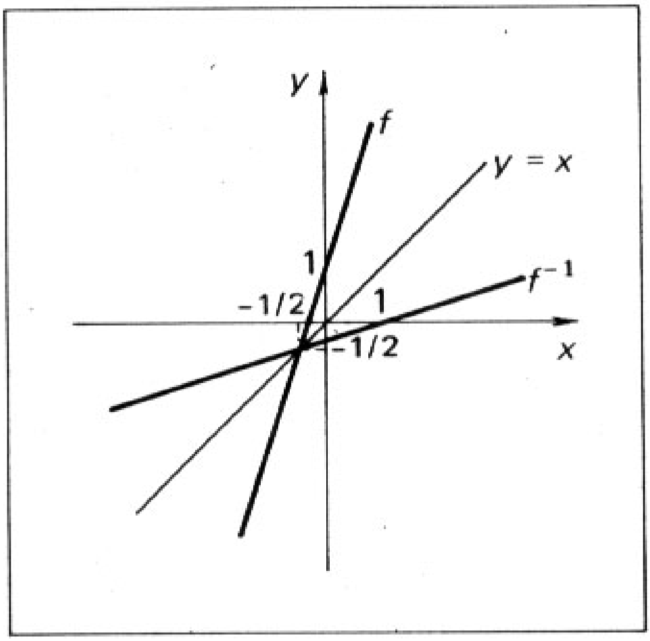


Figura 3.28

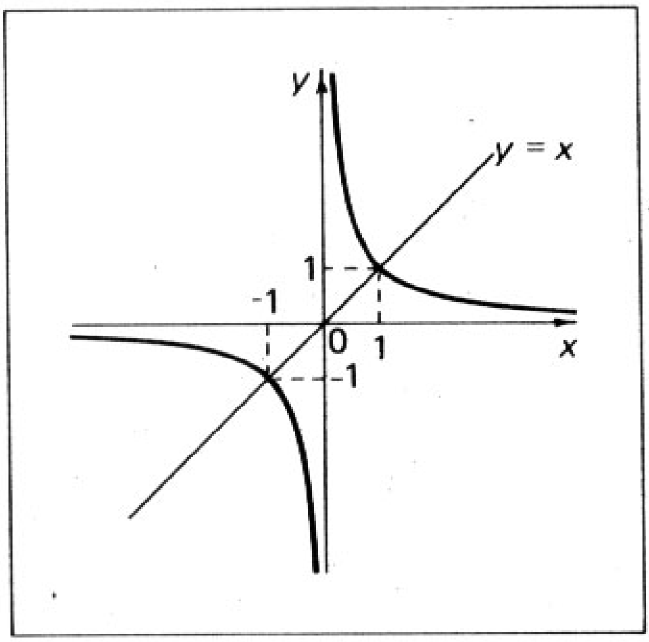


Figura 3.29

Exemplo 2

A função $f: \mathbf{R}_* \longrightarrow \mathbf{R}_*$*, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é bijetora.

Logo, admite inversa

$$f^{-1}: \mathbf{R}_* \longrightarrow \mathbf{R}_*$$

Expressão de f^{-1}:

* $\mathbf{R}_* = \mathbf{R} - \{0\}$

1º modo. Sendo f dada por $y = \dfrac{1}{x}$, tirando-se x em função de y, vem

$$x = \frac{1}{y}$$

logo,

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{y}, \ \forall \ y \in \mathbf{R}_*$$

Aqui temos explicação para pôr $\mathrm{Im}\, f = \mathbf{R}_*$, pois se você tem f^{-1}

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Dom}\, f^{-1} = \mathbf{R}_*$$

2º modo

$$f(f^{-1}(y)), \ \forall y \in \mathbf{R}_*$$

$$\therefore \ \frac{1}{f^{-1}(y)} = y \ \text{ ou } \ f^{-1}(y) = \frac{1}{y}, \ y \in \mathbf{R}_*$$

Excepcionalmente acontece aqui que

$$f = f^{-1}$$

O gráfico está representado na Figura 3.29.

Exemplo 3. Função $\sqrt{x}$

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ não é bijetora. Considerando-se uma restrição dela que é a função $f_1 : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ dada por $f_1(x) = x^2$ temos que ela é bijetora. Logo, admite inversa que é a função $g : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ dada por $g(x) = \sqrt{x}$.

Temos o gráfico:

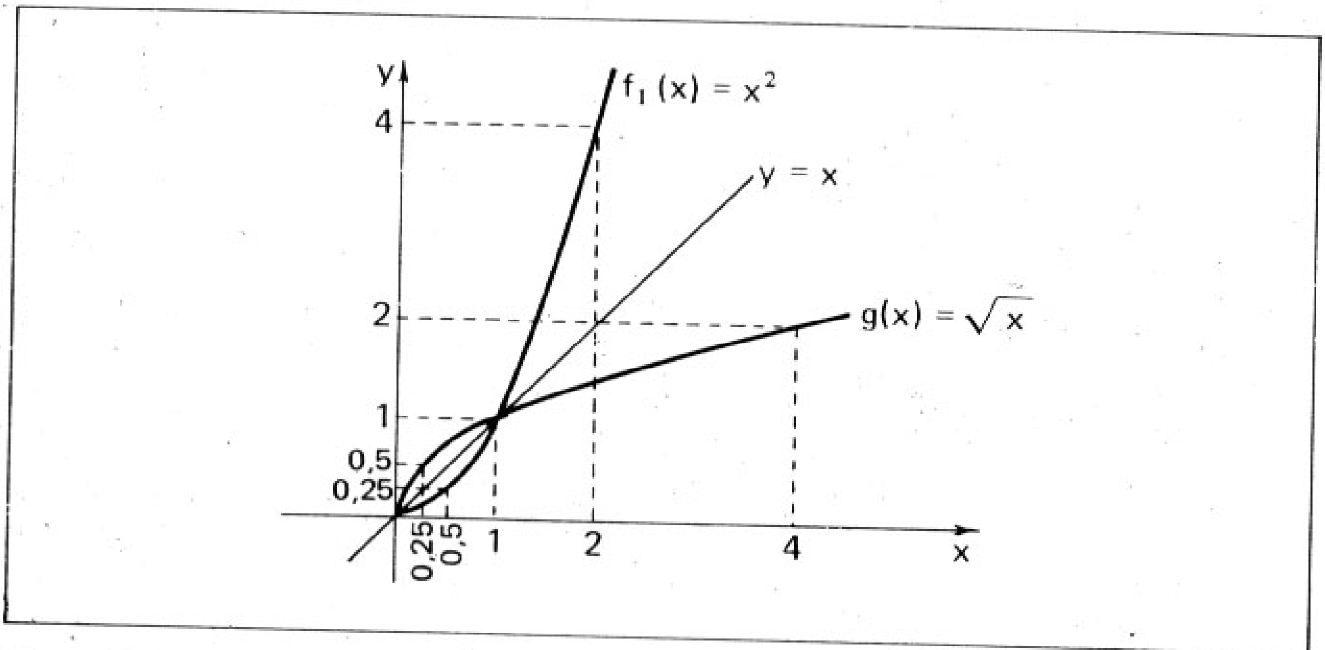


 Figura 3.30

3.8. FUNÇÕES IMPLÍCITAS

Suponhamos agora que seja dada uma equação envolvendo duas variáveis, digamos x e y, do tipo

$$f(x, y) = C \tag{1}$$

onde C é uma constante real. Esta equação geralmente é representável graficamente por uma certa curva do plano cartesiano Oxy. Algumas vezes esta curva pode ser o gráfico de uma função. Mas, geralmente, isso não acontece. O que se pergunta é: não existe um "*trecho*" da curva em que seria possível exprimir y como função de x (ou, então, x como função de y)

$$f : A \longrightarrow B \tag{2}$$

para determinados subconjuntos A e B da reta? Quando a resposta é *afirmativa* diz-se que a função (2)* é definida implicitamente pela equação (1).

Exemplo 1

Seja dada a equação

$$x^2 + y^2 = 4$$

que, representada graficamente no plano Oxy, nos dá uma circunferência de centro na origem e raio 2 (Figura 3.31). É claro que a circunferência em questão não é gráfico de uma função. Mas podemos separar "trechos" em que podemos obter y como função de x:

i) $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbf{R}_+$ dada por $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ cujo gráfico é a semicircunferência acima de $0x$, ou, então,

ii) $f_1 : [-2, 2] \longrightarrow \mathbf{R}_-$ dada por $y = f_1(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ cujo gráfico é a semicircunferência abaixo de $0x$ ou, se quisermos tirar x como função de y,

iii) $g : [-2, 2] \longrightarrow \mathbf{R}_+$ $x = g(y) = \sqrt{4 - y^2}$ cujo gráfico é a semicircunferência à direita de $0y$

iv) $g_1 : [-2, 2] \longrightarrow \mathbf{R}_-$ $x = g_1(y) = -\sqrt{4 - y^2}$ cujo gráfico é a semicircunferência à esquerda de $0y$.

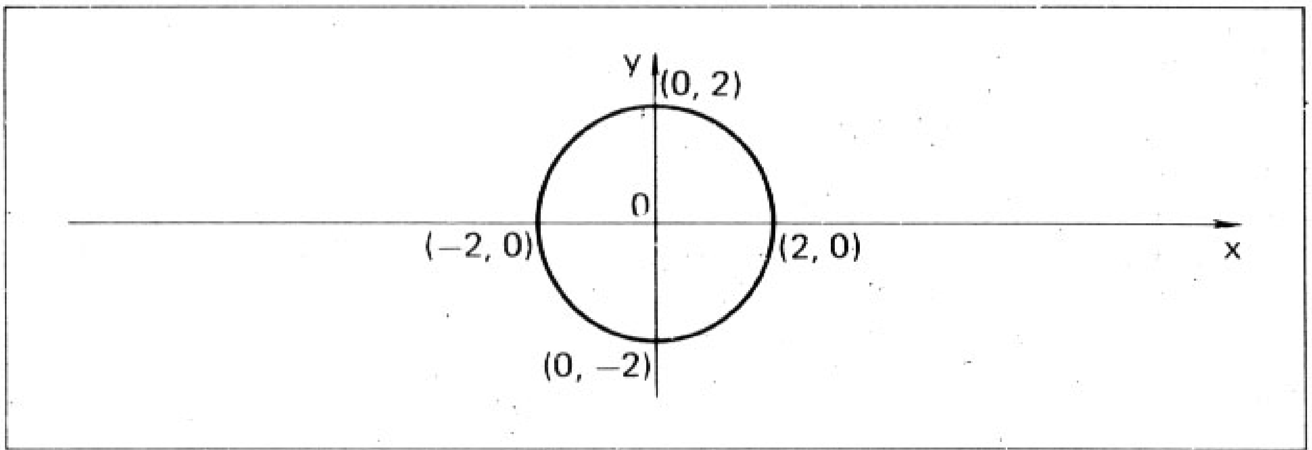


Figura 3.31

* Mesmo com resposta afirmativa, muitas vezes a função $f : A \longrightarrow B$ não tem expressão explícita.

Exemplo 2

Seja a equação

$$y^2 - x = 0$$

cuja curva no plano $0xy$ é uma parábola (Figura 3.32).

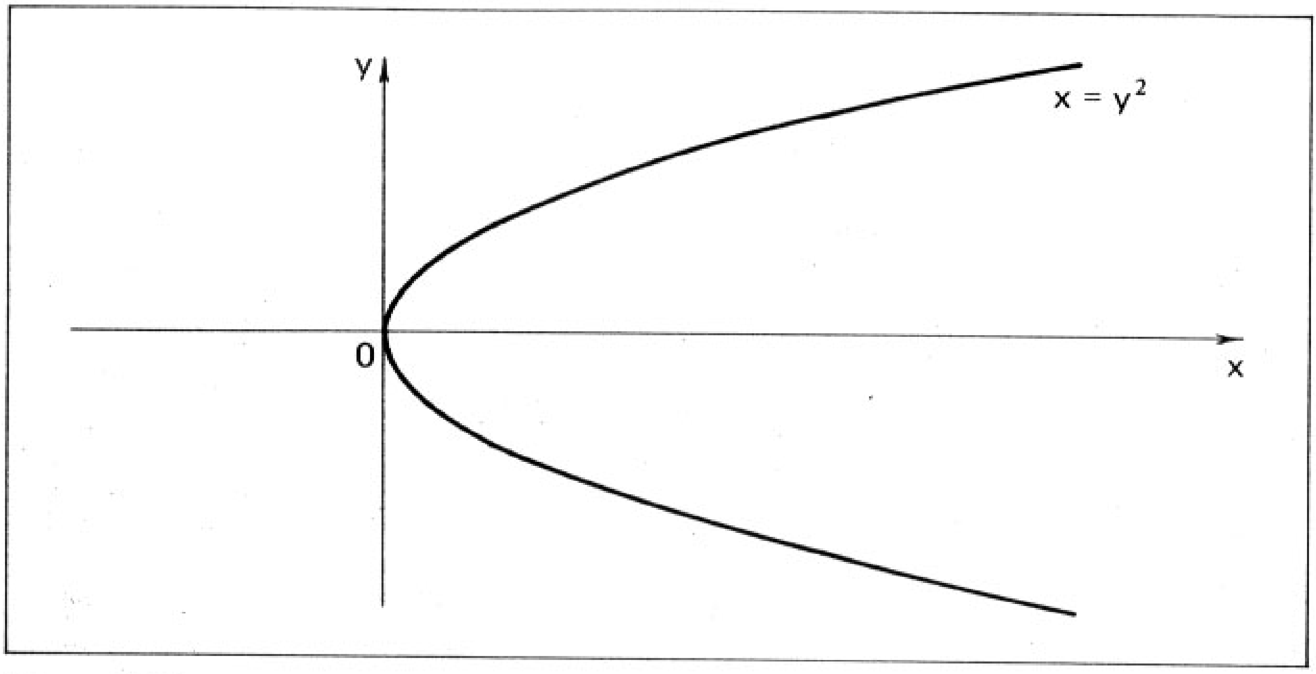


Figura 3.32

É claro, ela representa uma função quando x é tirado como função de y, ou seja, a função $x = y^2$. Mas se quisermos y como função de x ela não representa função. Mas, neste caso, podemos separá-la em dois "trechos".

i) $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ dada por $y = f(x) = \sqrt{x}$ cujo gráfico é a parte acima de $0x$ da parábola, e,

ii) $f_1 : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_-$ dada por $y = f_1(x) = -\sqrt{x}$ cujo gráfico nos dá a parte da parábola abaixo do eixo $0x$.

3.9. FUNÇÕES ELEMENTARES

DEFINIÇÃO (COMBINAÇÃO LINEAR FINITA)

Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funções definidas num mesmo conjunto A e $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n$ n números reais, n natural $\geqslant 1$. A função $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n$$

é denominada uma combinação linear finita de $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Uma função da lista abaixo, ou uma combinação linear finita delas, é denominada *função elementar* pelo simples fato de serem as funções que mais comumente se usam.

1. Funções Algébricas

Diz-se que uma função $y = f(x)$, definida num conjunto A, é algébrica quando ela é solução de uma equação algébrica do tipo

$$P(x, y) = P_0(x)\, y^n + P_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)\, y + P_n(x) = 0$$

com n natural $\geqslant 1$ e $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ polinômios em x, isto é, existe um subconjunto $A \subset \mathbf{R}$ de sorte que para todo $x \in A$ existe um único $y \in \mathbf{R}$ tal que $P(x, y) = 0$.

Exemplo 1

Um polinômio $y = P(x)$ é uma função algébrica, solução da equação $y - P(x) = 0$, para todo $x \in \mathbf{R}$.

Exemplo 2

Uma função racional fracionária $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ é uma função algébrica, solução da equação $Q(x)\, y - P(x) = 0$, no conjunto $A = \{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

Exemplo 3.

A função $y = \sqrt[n]{x}$, n ímpar, $x \in \mathbf{R}$, é algébrica pois é solução da equação algébrica $y^n - x = 0$.

2. Funções Transcendentes

Chama-se função transcendente uma função que não é algébrica. São transcendentes:

a) A função exponencial e sua inversa, o logarítmo.
b) As funções trigonométricas e suas inversas.

3.10. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vamos estudar a função $f : \mathbf{R}_{++} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = a^x$ e que é denominada função exponencial. Para isso precisamos primeiramente definir o que é a^x com a um número real > 0 e $\neq 1$ e x um número real. Para isso convém lembrar a definição de a^r para r um número racional.

Definição

Se $a > 0$ e $r = \dfrac{p}{q}$ é um número racional, definimos $a^r = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Evidentemente compreende-se que se tome $a > 0$, pois, para $a \leqslant 0$, nem sempre é possível calcular-se potência com expoente negativo bem como raiz n-ésima do número a. Como caso particular da definição anterior, tem-se:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a}$$

Propriedades

Para quaisquer $r, s \in \mathbf{Q}$ têm-se

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $(a^r)^s = a^{rs}$
3. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ $\qquad (b \neq 0)$
5. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

Estas propriedades decorrem imediatamente de propriedades análogas para as potências e raízes de bases positivas.

PROPOSIÇÃO

a) Se $a > 1$ e $r < s \Longrightarrow a^r < a^s$
b) Se $0 < a < 1$ e $r < s \Longrightarrow a^r > a^s$

A prova desta proposição será feita com base nos lemas 1 e 2 que seguem.

LEMA 1

a) Se $a > 1$ e n natural $\geqslant 1 \Longrightarrow a^n > 1$
b) Se $0 < a < 1$ e n natural $\geqslant 1 \Longrightarrow a^n < 1$

Prova

a) Se $a > 1$ então $a = 1 + h$ com $h > 0$, e, pela desigualdade de Bernoulli (nº 1.8, exerc. 3.b) tem-se

$$a^n = (1+h)^n \geqslant 1 + nh > 1$$

b) Se $0 < a < 1$, fazendo-se $b = \frac{1}{a} > 1$, vem, pela parte a),

$$b^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} > 1, \text{ ou seja, } a^n < 1$$ [c.q.d.]

LEMA 2

a) Se $a > 1$ e n natural $\geqslant 2 \Longrightarrow \sqrt[n]{a} > 1$
b) Se $0 < a < 1$ e n natural $\geqslant 2 \Longrightarrow \sqrt[n]{a} < 1$.

Prova

a) Admitindo-se que, por absurdo, seja $\sqrt[n]{a} \leqslant 1$ teremos, pelo Lema 1,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \leqslant 1, \text{ ou seja, } a \leqslant 1,$$

contra a hipótese. Logo, se $a > 1$, teremos forçosamente que $\sqrt[n]{a} > 1$.

b) Demonstra-se de forma análoga a a).

PROVA DA PROPOSIÇÃO

a) Se $r < s$ então $s - r = \dfrac{p}{q}$ racional > 0. Logo, se $a > 1$, pelo Lema 1

tem-se $a^p > 1$ e, pelo Lema 2, $\sqrt[q]{a^p} > 1$, donde

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{s-r} > 1$$

Multiplicando-se por $a^r > 0$, vem

$$a^s > a^r$$

b) Demonstra-se de maneira análoga a a).

Vamos definir agora a potência a^x para x um número real qualquer.

Definição

a) Seja $a > 1$ e x um número real. O conjunto

$$X = \{a^r \mid r \in \mathbf{Q} \text{ e } r \leqslant x\}$$

é não vazio (pois $1 \in X$) e majorado (tomando-se $m \in \mathbf{Q}$ e $m > x$ temos que a^m é um majorante de X), logo tem supremo. Definimos

$$a^x = \sup X$$

b) Se $0 < a < 1$, tendo em vista que $\frac{1}{a} > 1$ reduzimos este caso aos anteriores pondo

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

Observação:

Se um número real x é racional, temos, então, duas definições para a^x, uma quando x é encarado diretamente como racional e outra dada anteriormente. Mas é fácil perceber que elas coincidem.

PROPRIEDADES

Para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}$ e a e b positivos e distintos de 1, tem-se

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
5. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

As demonstrações são bastante trabalhosas e por isso deixamos de fazê-las.

Proposição

a) Se $a > 1$, para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}$ com $x < y \Longrightarrow a^x < a^y$

b) Se $0 < a < 1$, para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}$ com $x < y \Longrightarrow a^x > a^y$

Prova

a) Vamos supor inicialmente $x < y$. Existem, então, r_1 e r_2 racionais tais que

$$x < r_1 < r_2 < y$$

Sendo

$$a^x = \sup \{a^r \mid r \in \mathbf{Q} \text{ e } r \leqslant x\}$$

e

$$a^y = \sup \{a^s \mid s \in \mathbf{Q} \text{ e } s \leqslant y\}$$

teremos

$$a^x \leqslant a^{r_1} < a^{r_2} \leqslant a^y$$

ou seja,

$$a^x < a^y$$

b) Reduz-se imediatamente ao caso a) considerando-se $\frac{1}{a} > 1$. [c.q.d.]

Função Exponencial

A função $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = a^x$$

é denominada função exponencial de base a.

Temos

a) Dom $f = \mathbf{R}$ Im $f = \mathbf{R}_{++} = \{y \in \mathbf{R} \mid y > 0\}$

b) Gráfico

i) $a > 1$

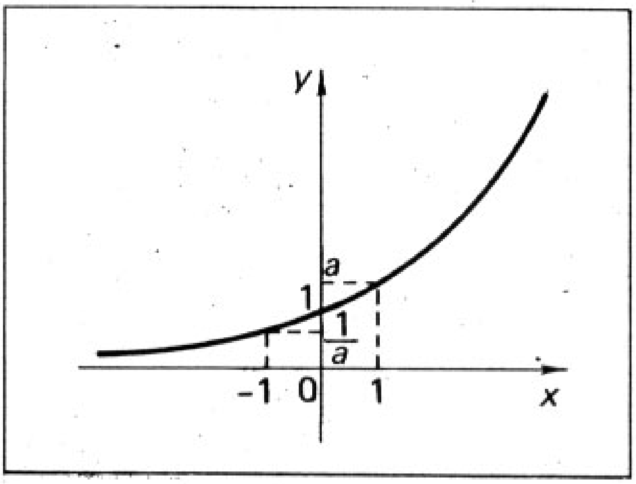


Figura 3.33

ii) $0 < a < 1$

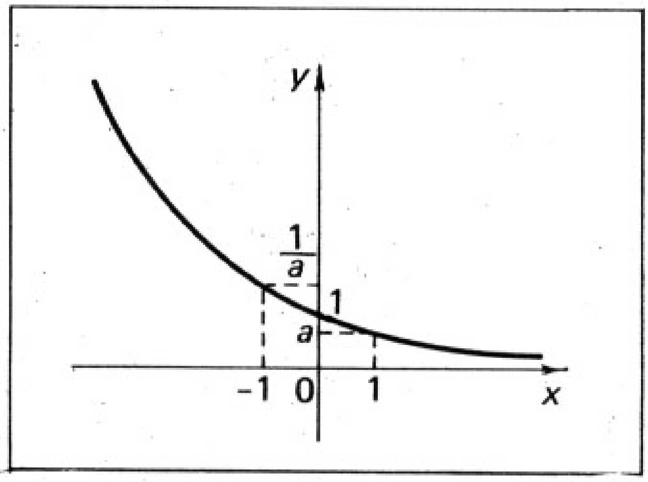


Figura 3.34

Um caso particular importante é o da função exponencial $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, onde e = número de Nepper $\cong 2{,}718\ 281\ 828\ 459$ ...

3.11. FUNÇÃO LOGARITMO DE BASE A

A função exponencial de base a, $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_{++}$ dada por $f(x) = a^x$, é bijetora, logo admite uma função inversa

$$g: \mathbf{R}_{++} \longrightarrow \mathbf{R}$$

que é denominada logaritmo de base a e indicada com $\log_a$. Tem-se, então,

$$x = \log_a y \iff y = a^x$$

Temos, pois,

a) $\text{Dom} \log_a = \mathbf{R}_{++}$ $\qquad$ $\text{Im} \log_a = \mathbf{R}$

b) *Gráficos*

i) *Base* $a > 1$

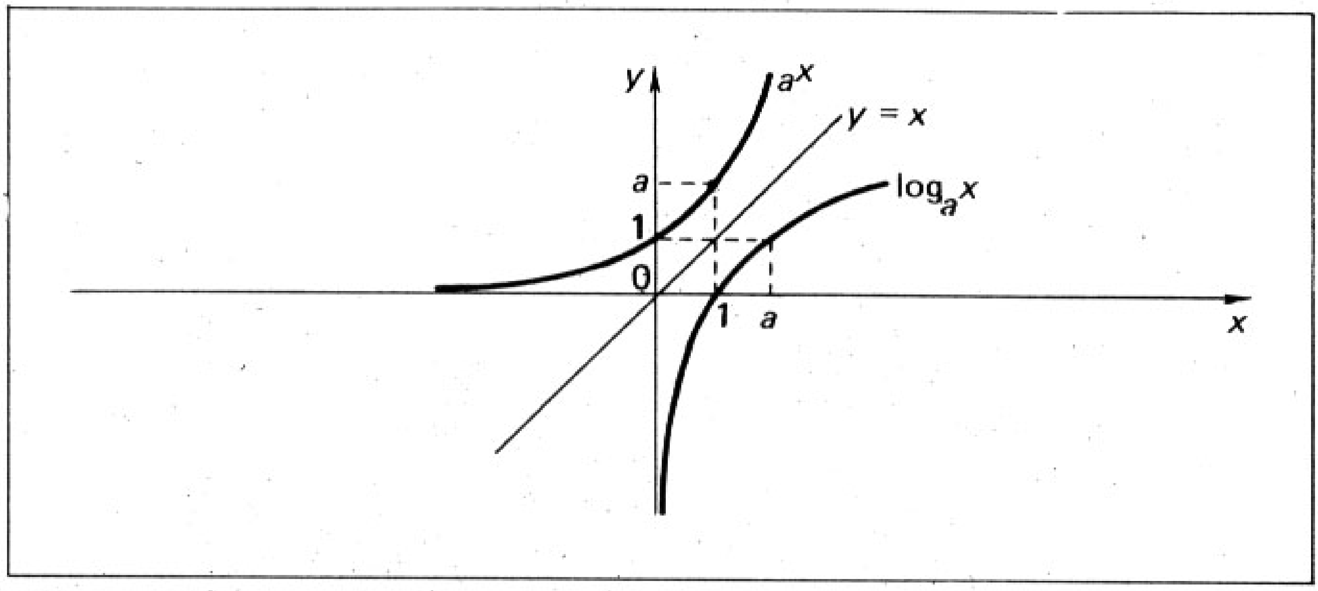


Figura 3.35

Um caso particular importante é a função logaritmo de base e que vamos indicar com $f(x) = \ell n\, x$, $x \in \mathbf{R}_{++}$.

ii) *Base* $0 < a < 1$

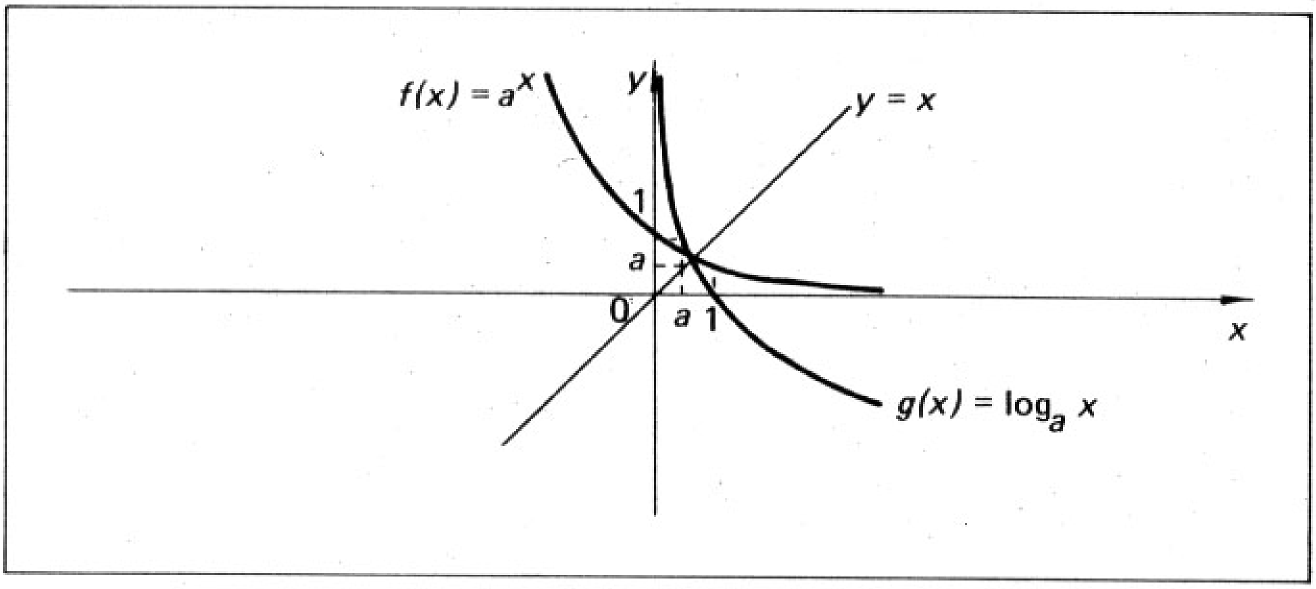


 Figura 3.36

3.12. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Com o que foi exposto até o presente momento não temos condições de definir tais funções de modo rigoroso. Vamos, então, descrevê-las de modo puramente geométrico.

a) Funções Seno e Cosseno

Consideremos sobre o plano cartesiano Oxy um círculo orientado no sentido anti-horário,* de centro na origem do sistema e de raio unitário. A circunferência desse círculo tem equação.

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

e fixemos o ponto $A = (0, 1)$ da circunferência como origem de contagem dos arcos orientados AT sobre a circunferência.

A um número real t fazemos corresponder um ponto T da circunferência, de modo que o arco orientado $\widehat{AT}$ tenha medida algébrica t (em radianos). O ponto $T = (x, y)$ tem ordenada y que é chamada sen$t$ e abscissa x que é chamada cos t (Figura 3.37). Podemos, então, definir as funções seno e cosseno como segue:

$$\text{sen}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \qquad\qquad \cos: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$t \longmapsto \text{sen } t \qquad\qquad t \longmapsto \cos t$$

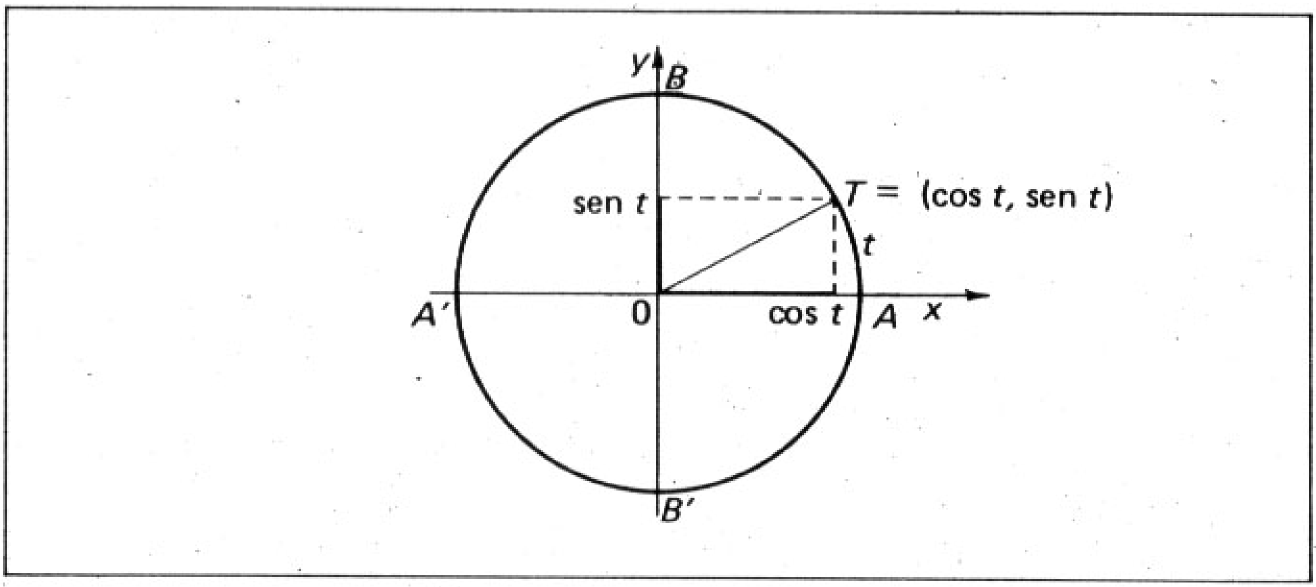


Figura 3.37

* O círculo está orientado quando fixado um ponto A de sua circunferência, um dos sentidos de percurso da mesma, a partir de A, é considerado como positivo, no caso o anti-horário. O outro dos percursos logicamente será o negativo.

Temos

i) Em primeiro lugar Dom sen = Dom cos = **R**

Quando o ponto T varia sobre a circunferência a sua ordenada varia de -1 a $+1$, e também a sua abscissa x, de modo que Im sen = $[-1, 1]$ = Im cos

ii) Como $T = (\cos\ t, \text{sen}\ t)$ é um ponto da citada circunferência temos a relação fundamental $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$

iii) *Periodicidade do Seno e do Cosseno*

Como vimos, ao número real t corresponde um ponto T da circunferência (1), extremidade do arco orientado $\widehat{AT}$ e tal que a medida algébrica em radianos de $\widehat{AT}$ é t. Com os números reais

$$t + 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z}$$

temos todas as medidas dos arcos orientados $\widehat{AT}$ da mesma origem A e mesma extremidade T; logo,

$$\text{sen}\,(t + 2k\pi) = \text{sen}\ t \ \text{ e } \ \cos\,(t + 2k\pi) = \cos t$$

O menor número $T > 0$ para o qual

$$\text{sen}\,(t + T) = \text{sen}\ t \quad \text{e} \quad \cos\,(t + T) = \cos t$$

é $T = 2\pi$ que é denominado *período* dessas funções.

iv) Vamos aceitar sem demonstrar as fórmulas

$$\begin{aligned}
&\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a \\
&\cos\,(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b \\
&\text{sen}\,(-t) = -\text{sen}\ t \\
&\cos\,(-t) = \cos t \\
&|\,\text{sen}\ t\,| \leqslant |\,t\,|
\end{aligned}$$

v) *Variação*

↗ cresce
→ desloca-se
↘ decresce

Variação

SENO

t	0	↗	$\pi/2$	↗	π	↗	$3\pi/2$	↗	2π
T	A	→	B	→	A'	→	B'	→	A
sen t	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

COSSENO

t	0	↗	$\pi/2$	↗	π	↗	$3\pi/2$	↗	2π
T	A	→	B	→	A'	→	B'	→	A
cos t	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

vi) *Gráficos*

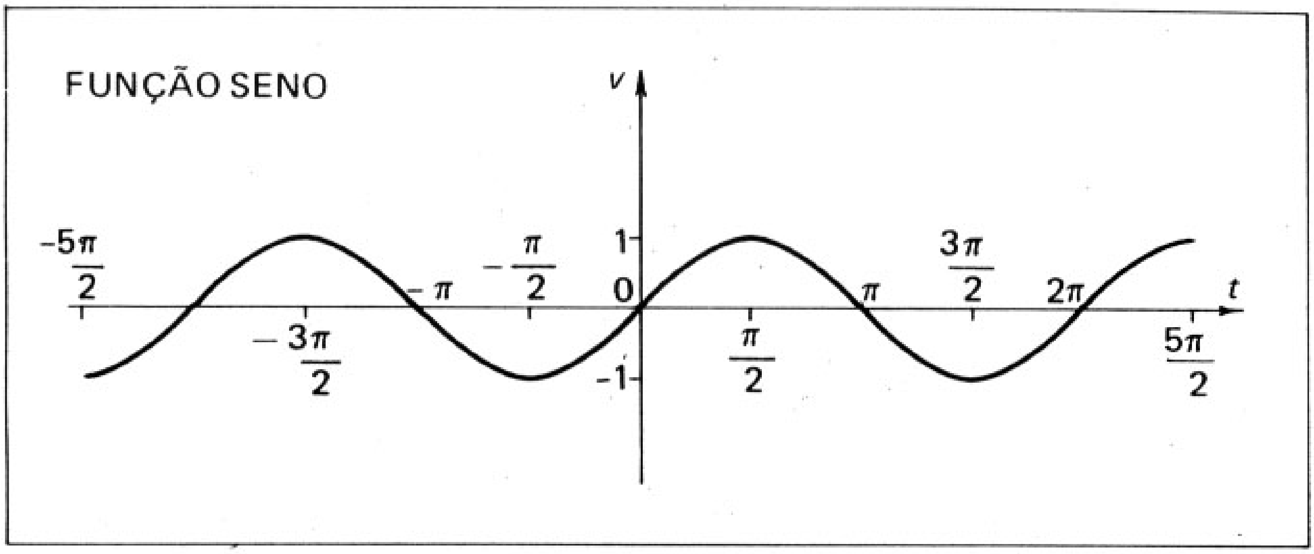


Figura 3.38

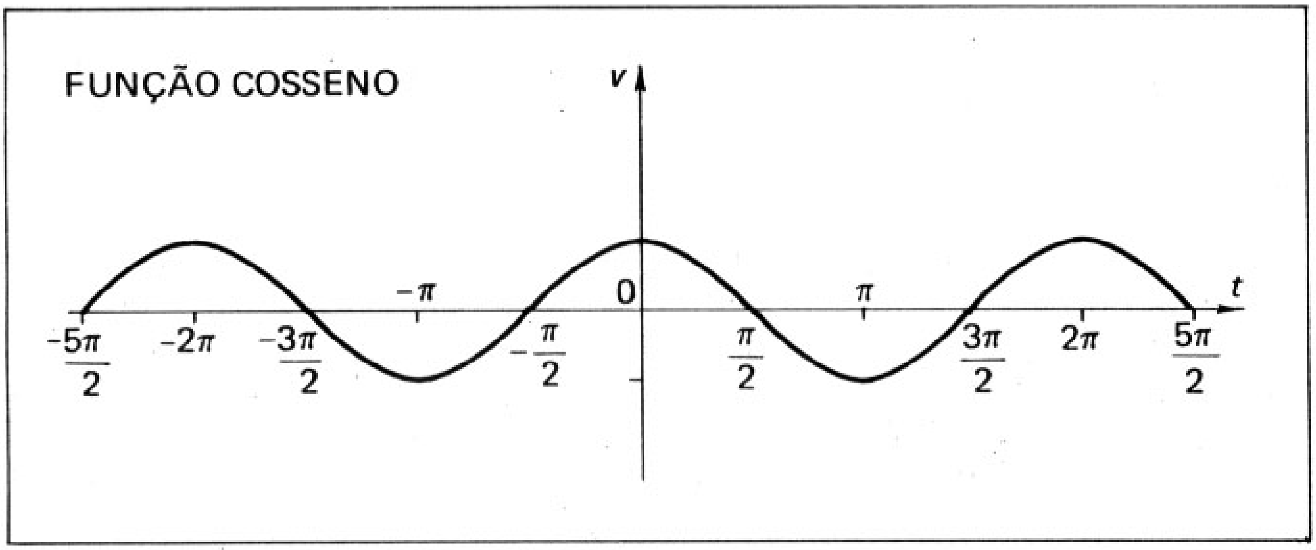


Figura 3.39

b) *Função Secante*

Chama-se função secante a função

$$f : t \longmapsto \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

Temos

i) Dom sec = $\{t \in \mathbf{R} \mid \cos t \neq 0\} = \{t \in \mathbf{R} \mid t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

ii) Como $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$, teremos

para $0 < \cos t \leqslant 1 \implies 1 \leqslant \frac{1}{\cos t} < +\infty$ ou $1 \leqslant \sec t < +\infty$

para $-1 \leqslant \cos t < 0 \implies -\infty < \dfrac{1}{\cos t} \leqslant -1$ ou $-\infty < \sec t \leqslant -1$

$\therefore \text{Im sec} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

iii) *Periodicidade:* $t \in \text{Dom sec}$

$$\sec(t + 2k\pi) = \frac{1}{\cos(t + 2k\pi)} = \frac{1}{\cos t} = \sec t$$

$\therefore T = 2\pi$

iv) *Variação*

t	0	↗	$\pi/2$	↗	π	↗	$3\pi/2$	↗	2π
T	A	→	B	→	A'	→	B'	→	A
cos	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1
sec	1	↗	∄	↗	−1	↘	∄	↘	1

v) *Gráfico*

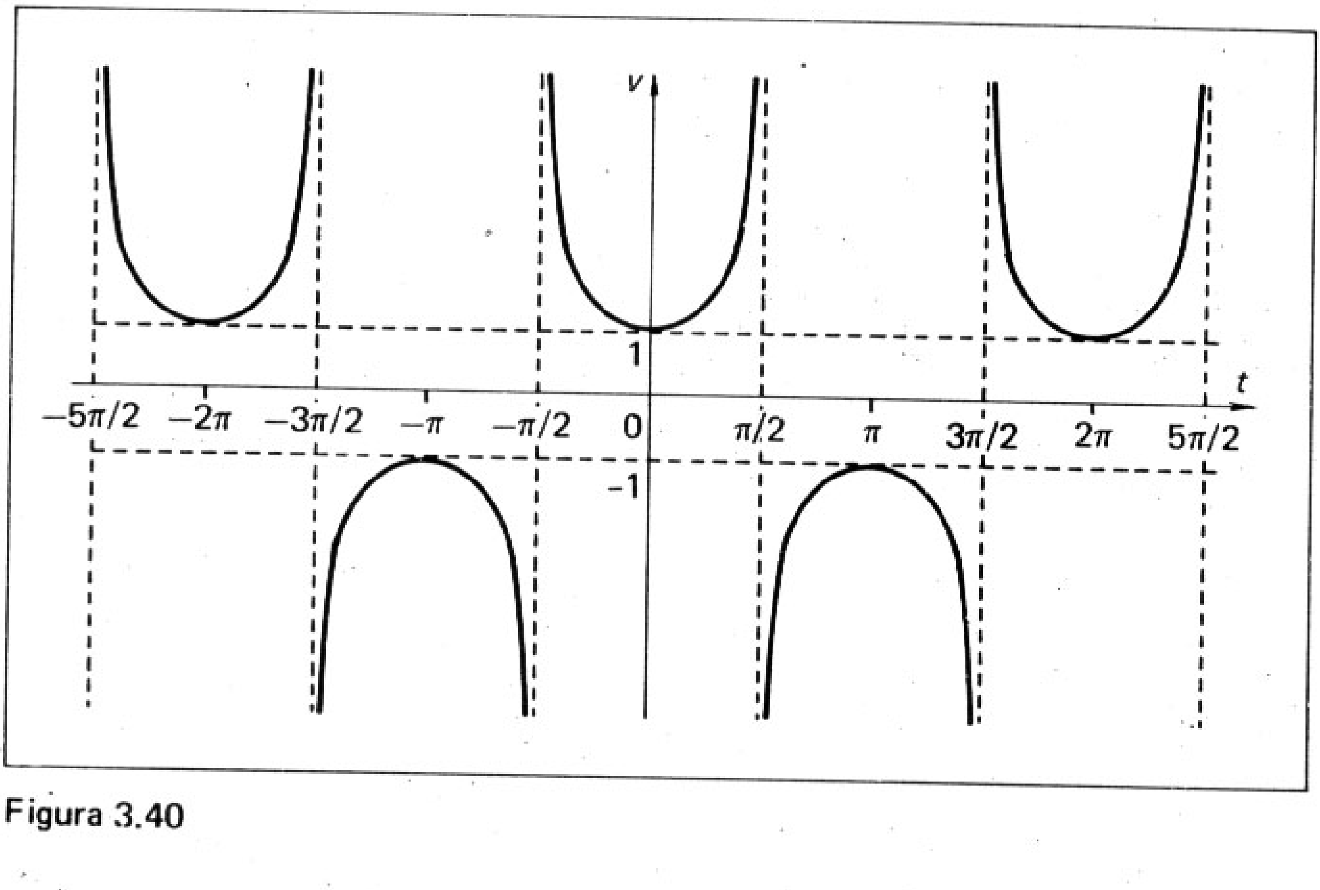


Figura 3.40

c) *Função Cossecante*

Chama-se cossecante a função

$$f : t \longmapsto \text{cossec}\, t = \frac{1}{\text{sen}\, t}$$

Temos

i) Dom cossec = $\{t \in \mathbf{R} \mid \text{sen } t \neq 0\} = \{t \in \mathbf{R} \mid t \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$

ii) Como $-1 \leqslant \text{sen } t \leqslant 1$, teremos:

para $0 < \text{sen } t \leqslant 1 \implies 1 \leqslant \dfrac{1}{\text{sen } t} < +\infty$ ou $1 \leqslant \text{cossec } t < +\infty$

para $-1 \leqslant \text{sen } t < 0 \implies -\infty < \dfrac{1}{\text{sen } t} \leqslant -1$ ou $-\infty < \text{cossec } t \leqslant -1$

$\therefore$ Im cossec $=]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

iii) *Periodicidade:* $t \in$ Dom cossec

cossec $(t + 2k\pi)$ = cossec t

T = período = 2π

iv) *Variação*

t	0	↗	$\pi/2$	↗	π	↗	$3\pi/2$	↗	2π
T	A	→	B	→	A'	→	B'	→	A
sen	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
cossec	$\nexists$	↘	1	↗	$\nexists$	↗	-1	↘	$\nexists$

v) *Gráfico*

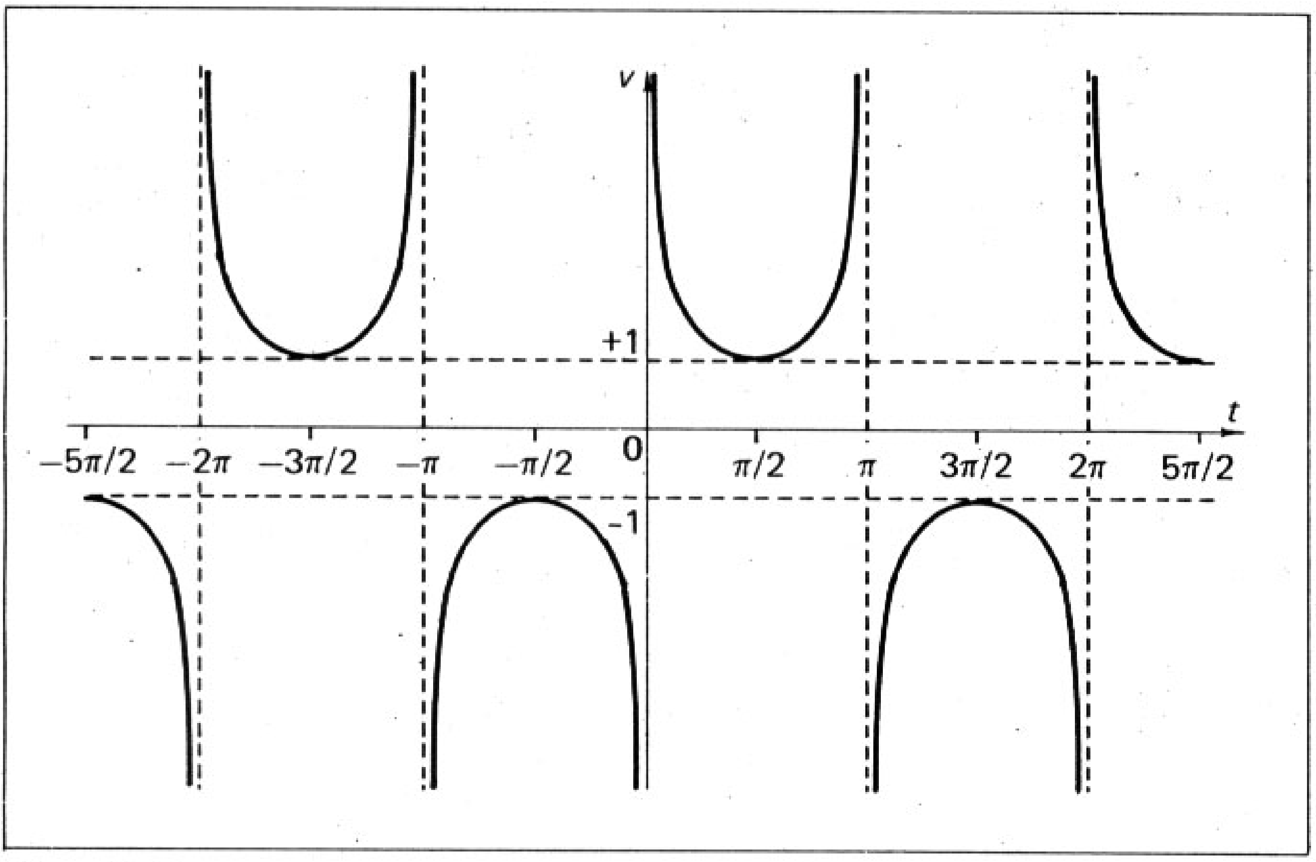


Figura 3.41

d) *Função Tangente*

Chama-se tangente a função

$$f : t \longmapsto \operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

Temos

i) Dom tg $= \{t \in \mathbf{R} \mid \cos t \neq 0\} = \{t \in \mathbf{R} \mid t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$

ii) *Variação em* $[0, \frac{\pi}{2}[$ e $]\frac{\pi}{2}, \pi]$

Vamos fazer uma tabela olhando que

$$\operatorname{tg} t = \operatorname{sen} t \cdot \sec t$$

t	0	$\nearrow$	$\pi/2$	$\nearrow$	π
sen	0	$\nearrow +$	1	$+ \searrow$	0
sec	1	$\nearrow +\infty$	$\nexists$	$-\infty \nearrow$	-1
tg	0	$\nearrow +\infty$	$\nexists$	$-\infty \nearrow$	0

iii) *Periodicidade*

Sabemos que $\quad \operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t$

$\qquad\qquad\qquad\quad \cos(t + \pi) = -\cos t$

logo,

$$\operatorname{tg}(t + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(t + \pi)}{\cos(t + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen} t}{-\cos t} = \operatorname{tg} t \qquad t \in \text{Dom tg}$$

Em vista do item ii) a tangente em $[0, \frac{\pi}{2}[$ e em $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ tem variações distintas; logo,

$$T = \pi \text{ é seu período.}$$

Resulta imediatamente que se $t \in$ Dom tg

$$\operatorname{tg}(t + k\pi) = \operatorname{tg} t \quad k \in \mathbf{Z}$$

iv) Im tg $= \mathbf{R}$

v) $t \in$ Dom tg, sendo $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, dividindo-a por $\cos^2 t$, obtemos:

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$$

 vi) *Gráfico*

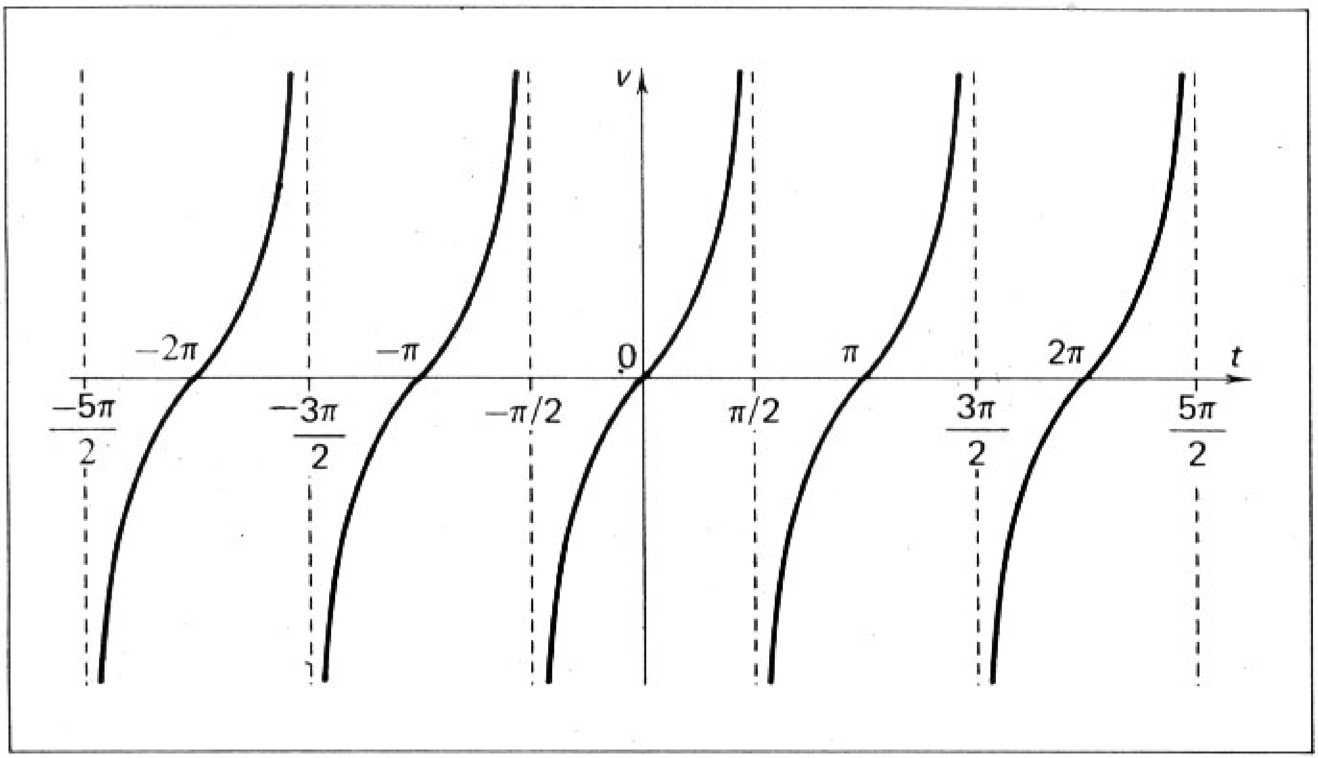


Figura 3.42

e) *Função Cotangente*

Chama-se cotangente a função

$$f : t \longmapsto \text{cotg}\, t = \frac{\cos t}{\text{sen}\, t}$$

Temos:

i) Dom cotg = $\{t \in \mathbf{R} \mid \text{sen}\, t \neq 0\} = \{t \in \mathbf{R} \mid t \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

ii) *Variação no Intervalo* $]0, \pi[$

Vamos fazer uma tabela tendo em vista que

$$\text{cotg}\, t = \cos t \cdot \text{cossec}\, t$$

t	0	$\nearrow$	$\pi/2$	$\nearrow$	π
cos	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
cossec	$\nexists$	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$	$\nexists$
cotg	$\nexists$	$+\infty \searrow$	0	$\searrow -\infty$	$\nexists$

iii) *Periodicidade*

De forma análoga ao caso anterior, se $t \in$ Dom cotg

$$\text{cotg}\,(t+\pi) = \text{cotg}\, t$$

e pelo item ii) concluímos que

$$T = \pi \text{ é seu período}$$

iv) Im cotg = **R**

v) Se $t \in$ Dom cotg, sendo $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$, dividindo esta igualdade por $\text{sen}^2 t$, obtemos

$$1 + \text{cotg}^2 t = \text{cossec}^2 t$$

vi) *Gráfico*

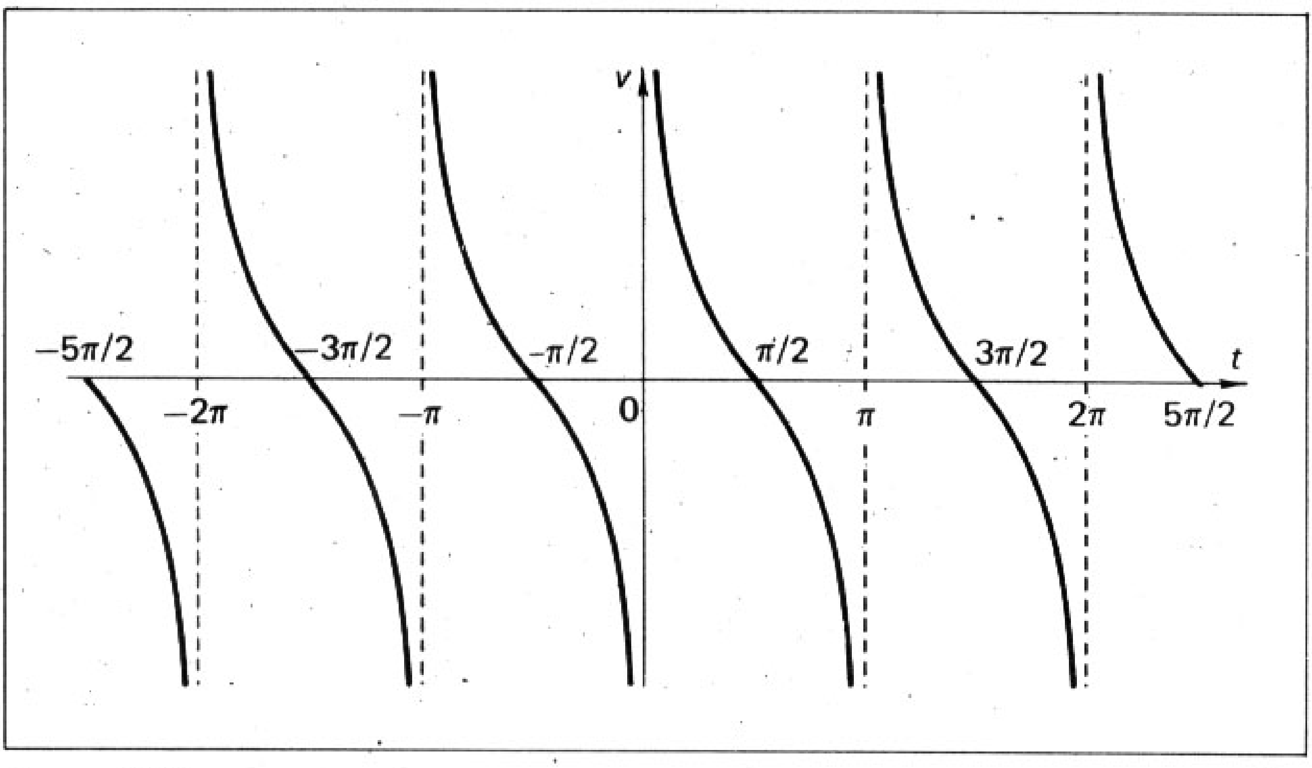


Figura 3.43

3.13. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

3.13.1. Função Arcsen

Como já vimos a função seno não é bijetora. Entretanto, a parte dela que é denominada *restrição principal* e que é a seguinte

$$\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$$

é bijetora. Portanto, admite inversa que é a função

$$\text{arcsen} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

de modo que

$$x = \text{arcsen}\, y \Longleftrightarrow y = \text{sen}\, x$$

Temos o gráfico:

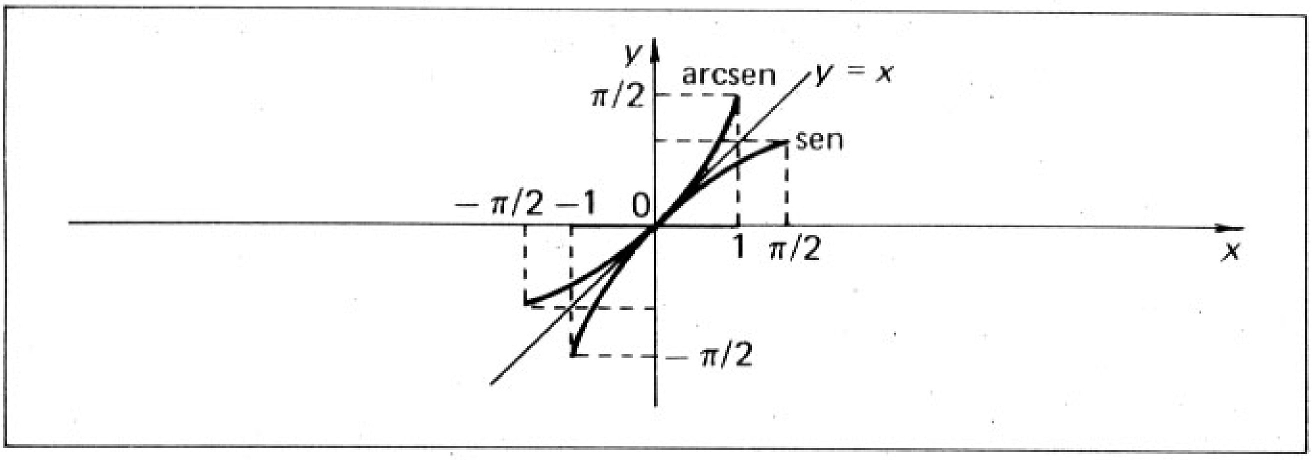


Figura 3.44

3.13.2. Função Arccos

Chama-se *restrição principal* do cosseno a função

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

e que é bijetora. Logo, admite inversa que é a função

$$\text{arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

de modo que

$$x = \text{arccos}\, y \Longleftrightarrow y = \cos x$$

Temos o gráfico

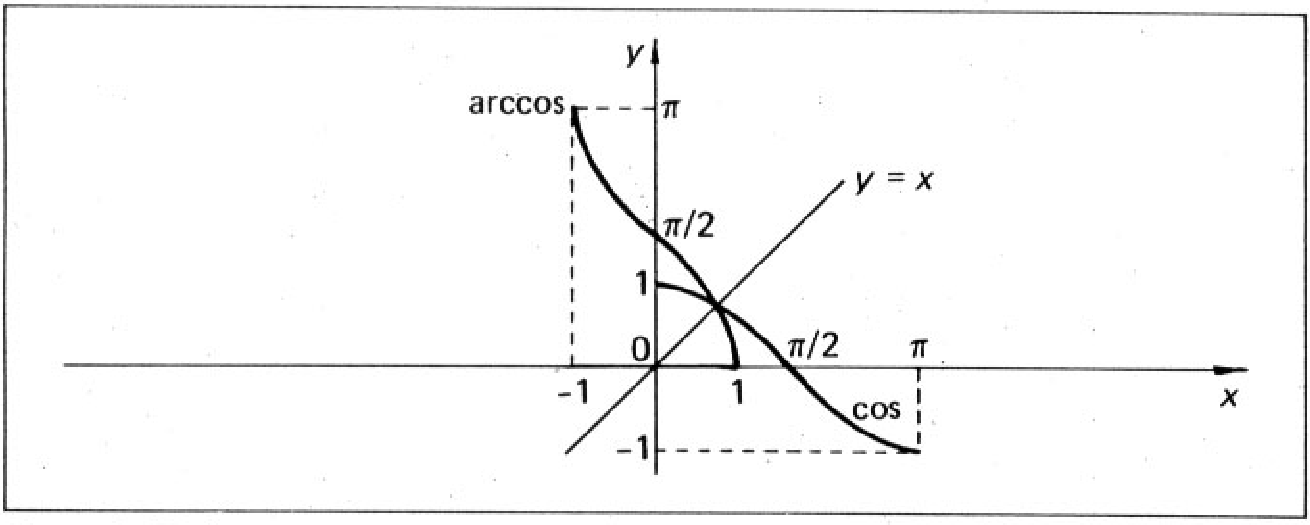


Figura 3.45

3.13.3. Função Arctg

Chama-se *restrição principal* da tangente a função

$$\text{tg} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbf{R}$$

que é bijetora. Logo, ela admite inversa que é a função

$$\text{arctg} : \mathbf{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

de modo que

$$x = \text{arctg}\, y \iff y = \text{tg}\, x$$

Temos o gráfico:

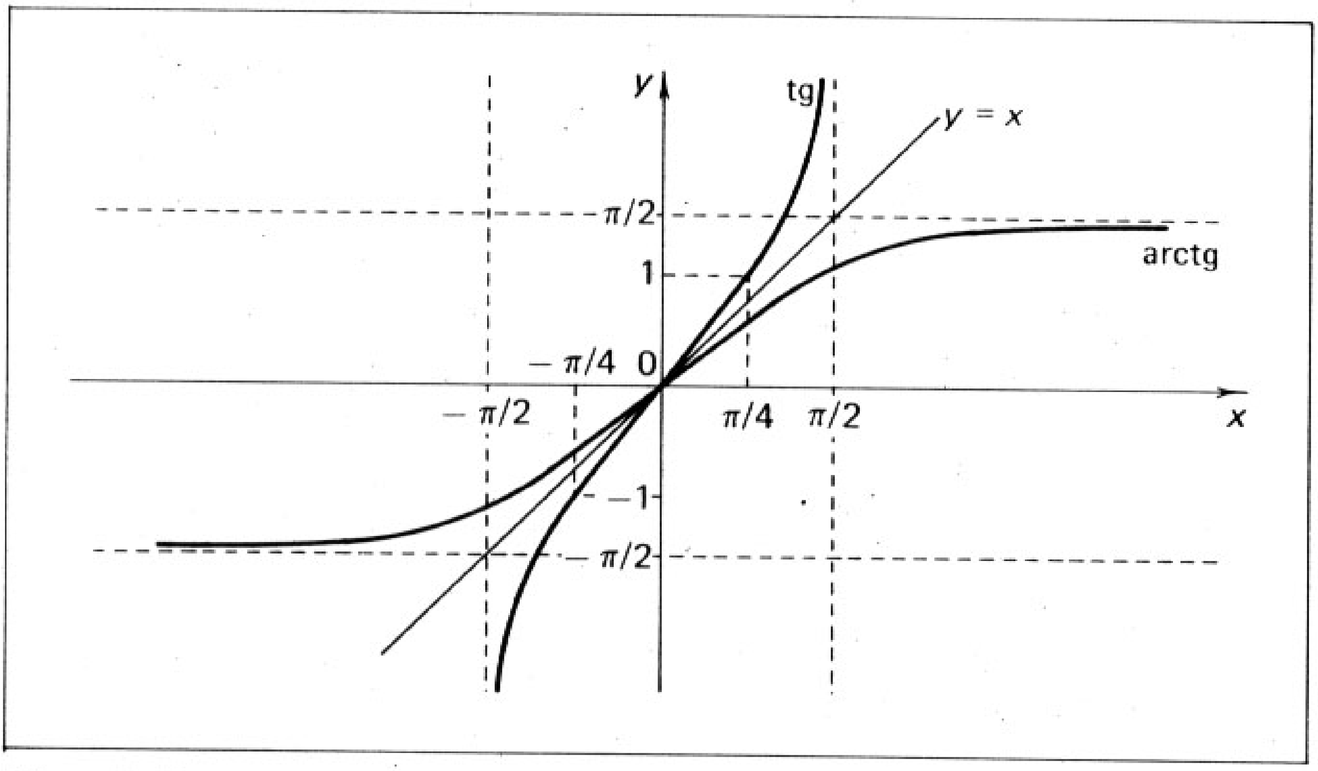


Figura 3.46

3.13.4. Função Arccotg

Chama-se *restrição principal* da cotangente a função

$$\text{cotg} :]0, \pi[\longrightarrow \mathbf{R}$$

que é bijetora. Logo, ela admite inversa que é a função

$$\text{arccotg} : \mathbf{R} \longrightarrow]0, \pi[$$

de modo que

$$x = \text{arccotg}\ y \iff y = \text{cotg}\, x$$

Temos o gráfico:

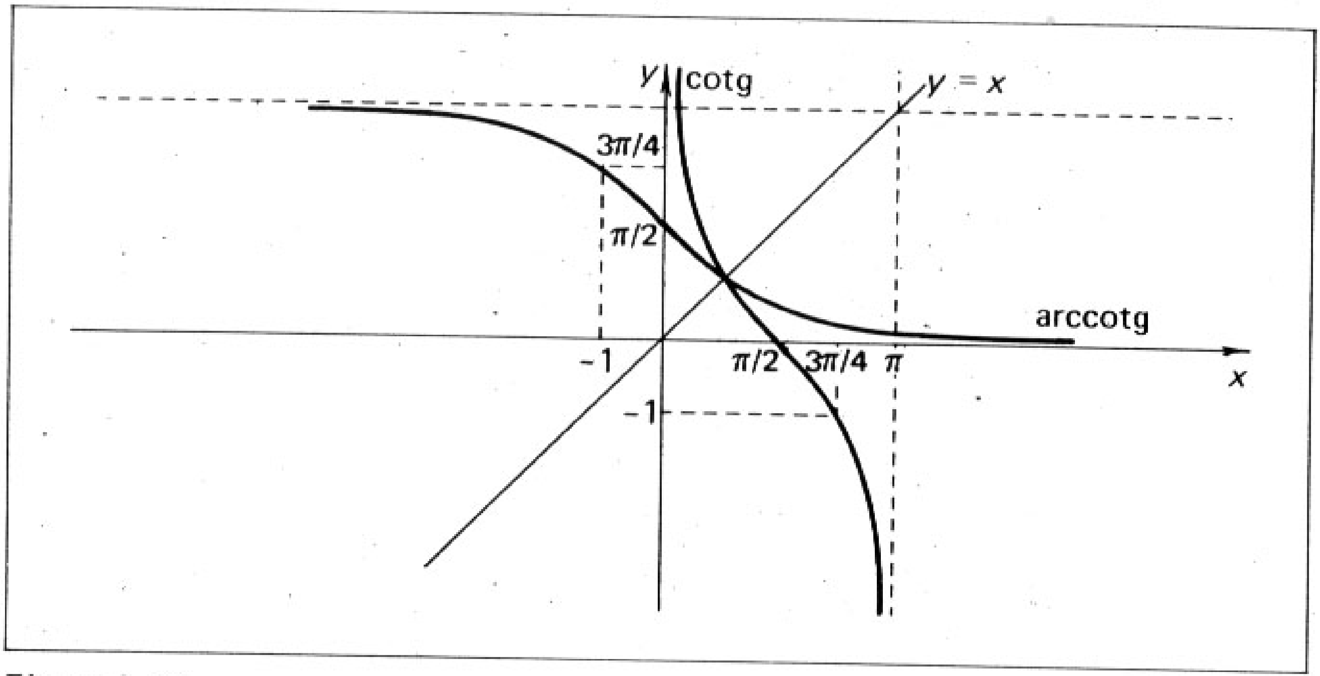


Figura 3.47

3.13.5. Função Arcsec

Chama-se *restrição principal* da secante à função

$$\sec : [0, \frac{\pi}{2}[\ \cup \ ]\frac{\pi}{2}, \pi] \longrightarrow [1, +\infty[\ \cup \ ]-\infty, -1]$$

que é bijetora. Logo ela admite inversa que é a função

$$\text{arc sec} :]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}[\ \cup \ ]\frac{\pi}{2}, \pi]$$

tal que

$$x = \text{arcsec}\, y \iff y = \sec x$$

Temos o gráfico:

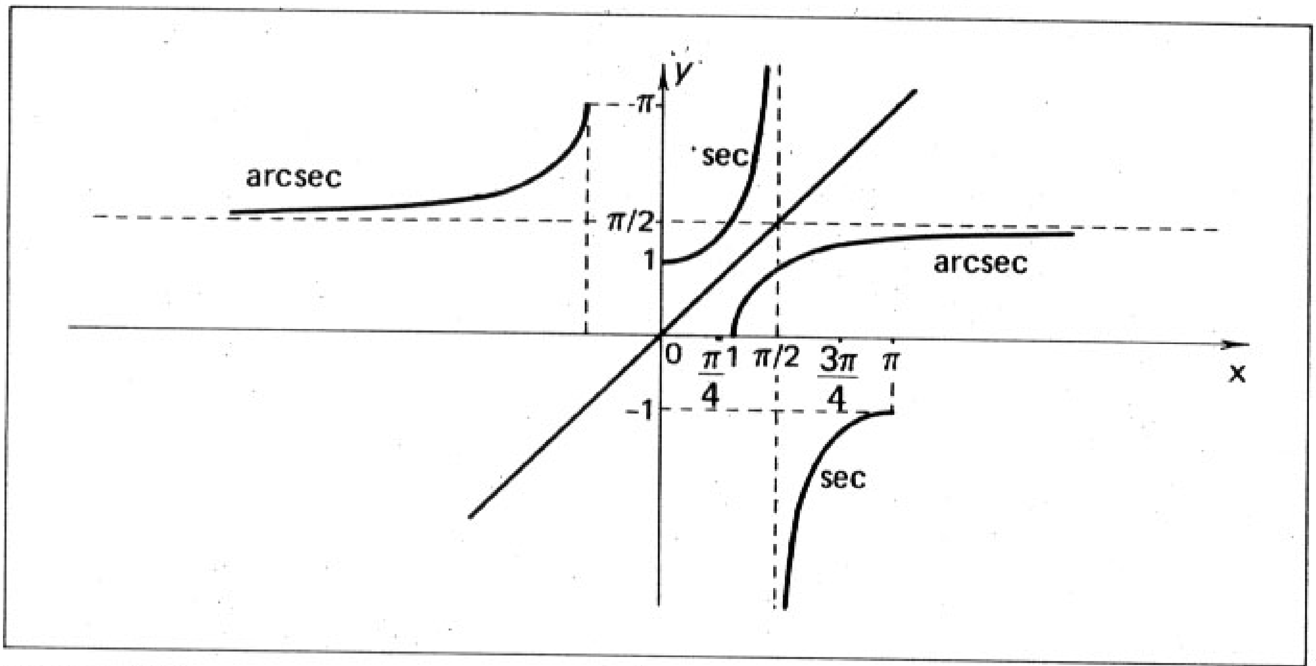


Figura 3.48

3.13.6. Função Arccossec

Chama-se restrição principal da cossecante a função

$$\text{cossec}: \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \left]-\infty, 1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$$

que é bijetora. Logo, ela admite inversa que é a função

$$\text{arccossec}: \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$$

tal que

$$x = \text{arccossec}\, y \iff y = \text{cossec}\, x$$

Deixamos a cargo do leitor a confecção de um gráfico.

3.14. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sendo f dada por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
pede-se
a) determinar Dom f;
b) mostrar que f é injetora;
c) determinar Im f.

Solução

Temos
a) $\text{Dom}\, f = \left\{x \in \mathbf{R} \;\middle|\; \dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0\right\}$

Devemos, então, resolver a desigualdade:

$$\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0$$

Para isso, façamos uma tabela contendo os sinais do numerador (N), do denominador (D) e do quociente (Q):

N − − − − − − − 1 ++++++

D − − − −1 ++++++++++++++

Q ++++++ −1 − − − − 1 ++++++

Resulta, pois, $\text{Dom}\, f = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$

b) Mostremos que f é injetora. Suponhamos que existam $x_1, x_2 \in \text{Dom}\, f$, tais que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

isto é,

$$\sqrt{\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}} = \sqrt{\frac{x_2 - 1}{x_2 + 1}}$$

Elevando-se ao quadrado, vem

$$\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1}$$

donde se obtém,

$$\cancel{x_1 x_2} + x_1 - x_2 - \cancel{1} = \cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 - \cancel{1}$$

$$\therefore\ 2x_1 = 2x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2 \qquad \text{[c.q.d.]}$$

c) **Para se determinar Im f observando que f é injetora, podemos tentar obter uma expressão para f^{-1} e, se isso for conseguido, teremos**

$$\text{Im } f = \text{Dom } f^{-1}$$

Temos

$$y = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} \geqslant 0$$

Tentemos obter x em função de y. Temos

$$y^2 = \frac{x - 1}{x + 1}$$

ou seja,

$$y^2 x + y^2 = x - 1$$

ou

$$y^2 x - x = -1 - y^2$$

ou, ainda,

$$x(y^2 - 1) = -1 - y^2 \ \therefore\ x = \frac{1 + y^2}{1 - y^2}$$

Portanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{1 + y^2}{1 - y^2},\ y \geqslant 0$$

Daqui, obtém-se

$$\text{Im } f = \text{Dom } f^{-1} = \{y \in \mathbf{R}_+ \mid y \neq 1\}$$

2. Seja $f : A \longrightarrow [-8, 1[$ dada por

$$f(x) = \frac{3 + 2x}{2 - x}$$

Pede-se

a) determinar A;

b) verificar se f é sobrejetora.

Solução:

a) Como queremos que os valores dessa função estejam no intervalo $[-8, 1[$ devemos ter

$$-8 \leqslant \frac{3 + 2x}{2 - x} < 1$$

Vamos resolver as desigualdades. Temos

$$\text{i)}\quad -8 \leqslant \frac{3+2x}{2-x} \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{3+2x}{2-x} + 8 \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{3+2x+8(2-x)}{2-x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{-6x+19}{2-x}$$

Fazendo uma tabela de sinais:

N	$+ + + + + +$	$+ + + + + +$	$\frac{19}{6}$ ●	$- - -$
D	$+ + + + + +$	2 ○	$- - - -$	$- - -$
Q	$+ + + + + +$	2 ○	$- - -$ $\frac{19}{6}$ ●	$+ + + + + +$

Portanto,

$$x < 2 \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{19}{6}$$

E também devemos ter:

$$\text{ii)}\quad \frac{3+2x}{2-x} < 1 \Longrightarrow \frac{3+2x}{2-x} - 1 < 0 \Longrightarrow \frac{3+2x-(2-x)}{2-x} < 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{3x+1}{2-x} < 0$$

Fazendo uma tabela de sinais:

N	$- - -$	$-\frac{1}{3}$ ○	$+ + + + + + + + + +$	$+ + +$
D	$+ + +$	$+ + + + + + + + + +$	2 ○	$- - -$
Q	$- - -$	$-\frac{1}{3}$ ○	$+ + +$ 2 ○	$- - -$

Portanto,

$$x < -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x > 2$$

O conjunto A é a intersecção das soluções i) e ii), ou seja:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{19}{6}\}$$

b) Para verificar se f é sobrejetora devemos verificar se é possível determinar uma expressão para f^{-1} e com ela examinar o Dom f^{-1} = Im f para verificar se algum ponto do intervalo $[-8, 1[$ é excluído. Em primeiro lugar é preciso verificar se f é injetora. Para isso, suponhamos que existam $x_1, x_2 \in A$ para os quais

$$f(x_1) = f(x_2)$$

ou seja,

$$\frac{3+2x_1}{2-x_1} = \frac{3+2x_2}{2-x_2}$$

ou

$$\cancel{6} - 3x_2 + 4x_1 - \cancel{2x_1x_2} = \cancel{6} + 4x_2 - 3x_1 - \cancel{2x_1x_2}$$

ou

$$7x_1 = 7x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Portanto, f é injetora. Tentemos determinar uma expressão para f^{-1}.

Temos

$$y = \frac{3 + 2x}{2 - x}$$

donde se tira

$$2y - xy = 3 + 2x$$

ou

$$2x + xy = 3 - 2y \therefore x = \frac{3 - 2y}{2 + y}$$

$$\therefore f^{-1}(y) = \frac{3 - 2y}{2 + y}$$

Como $-2 \notin \text{Dom}\, f^{-1}$ e $-2 \in [-8, 1[$, resulta que a função f não é sobrejetora, porque ela não assume o valor $y = -2$.

3. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ -x^2 + 4 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \\ -2 & \text{se } x < -2 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

pede-se:

a) fazer o seu gráfico;

b) determinar o conjunto $\text{Im}\, f$.

Solução:

a) Este gráfico é constituído por três trechos diferentes.

Temos:

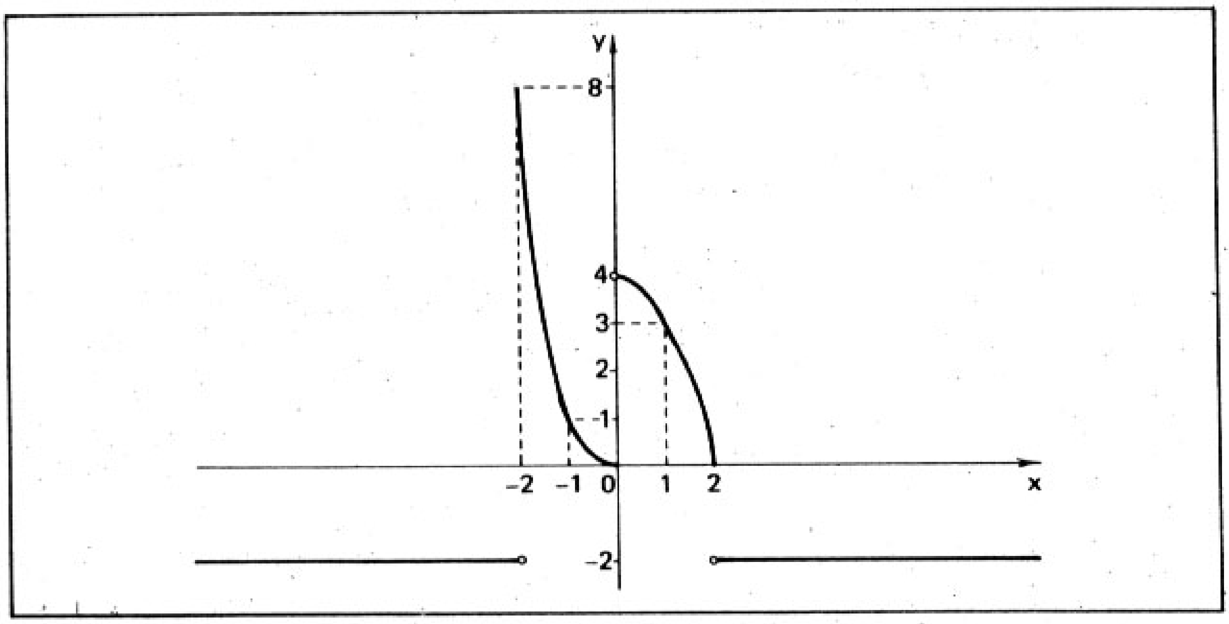


Figura 3.49

b) Pelo gráfico da Figura 3.49, temos

$$\text{Im}\, f = \{-2\} \cup [0, 8]$$

4. Mostre que a função

$$f(x) = -\sqrt{x^2 + 4x - 5} \qquad x \in\,]-\infty, -5]$$

admite inversa e obtenha uma expressão para essa inversa.

Solução:

É fácil perceber que $\text{Im}\, f =]-\infty, 0]$. Provemos que

$$f :]-\infty, -5] \longrightarrow]-\infty, 0]$$

é injetiva. Supondo que $x_1, x_2 \in\,]-\infty, -5]$ são tais que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

ou seja,

$$-\sqrt{x_1^2 + 4x_1 - 5} = -\sqrt{x_2^2 + 4x_2 - 5}$$

teremos

$$x_1^2 + 4x_1 - \cancel{5} = x_2^2 + 4x_2 - \cancel{5}$$

ou

$$x_1^2 - x_2^2 + 4(x_1 - x_2) = 0$$

ou ainda,

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4) = 0$$

o que nos dá

$$x_1 = x_2 \quad \text{ou} \quad x_2 = -x_1 - 4$$

Provemos que $x_2 = -x_1 - 4$ não é possível. De fato, se $x_1 \in\,]-\infty, -5]$

Teremos

$$x_1 \leqslant -5$$

ou

$$-x_1 \geqslant 5$$

o que nos dá

$$x_2 = -x_1 - 4 \geqslant 1 \quad \text{e} \quad x_2 \notin\,]-\infty, -5]$$

contra a hipótese. Logo, só podemos ter $x_1 = x_2$ e f é injetora. Portanto, f é bijetora e admite inversa

$$f^{-1} :]-\infty, 0] \longrightarrow]-\infty, -5]$$

Para obter a expressão de f^{-1}, sendo $y = f(x)$ dada por $y = -\sqrt{x^2 + 4x - 5}$, basta obter x como função de y. Teremos

$$y^2 = x^2 + 4x - 5 \quad \text{ou} \quad x^2 + 4x - (5 + y^2) = 0$$

Resolvendo com o uso da fórmula das raízes de uma equação de 2.º grau, virá

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4(5 + y^2)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36 + 4y^2}}{2}$$

O duplo sinal que precede o radical nos diz que, para cada y, temos dois valores para x, o que não é possível. Observando que quando $y = 0$ devemos ter $x = -5$, vemos que o sinal $-$ é o que deve ser escolhido, ou seja,

$$f^{-1}(y) = \frac{-4 - \sqrt{36 + 4y^2}}{2} \quad \text{para } y \in \left]-\infty, 0\right]$$

5. Dadas as funções

$$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad \operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$$

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \operatorname{Dom} g = [-1, 1]$$

obtenha gof e fog e seus domínios de definição.

Solução:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 - (f(x))^2} = \sqrt{1 - tg^2 x}$$

$$\operatorname{Dom}(gof) = \{x \in \operatorname{Dom} f \mid -1 \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant 1\} =$$

$$= \{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \operatorname{tg}(g(x)) = \operatorname{tg}\sqrt{1 - x^2}$$

$$\operatorname{Dom} fog = \{x \in \operatorname{Dom} g \mid \sqrt{1 - x^2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} = [-1, 1]$$

6. Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x},\ x \neq 0$$

Temos

i) $\frac{1}{x} = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}_+ = \mathbf{Z} - \{0\} \Longrightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen} k\pi = 0$

$\therefore\ x = \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbf{Z}_+ \Longrightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$

ii) $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Longrightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$

$$\therefore\ x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} = \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{4k}{2}\right)} = \frac{2}{\pi(4k + 1)} \Longrightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1$$

iii) $\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Longrightarrow \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$

$$\therefore\ x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} = \frac{2}{\pi(4k - 1)} \Longrightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{x} = -1$$

iv) Gráfico

x	$f(x)$
$2/\pi$	1
$1/\pi$	0
$2/3\pi$	-1
$1/2\pi$	0
$2/5\pi$	+1
0 ········	··········
$-2/5\pi$	-1
$-1/2\pi$	0
$-2/3\pi$	1
$-1/\pi$	0
$-2/\pi$	-1

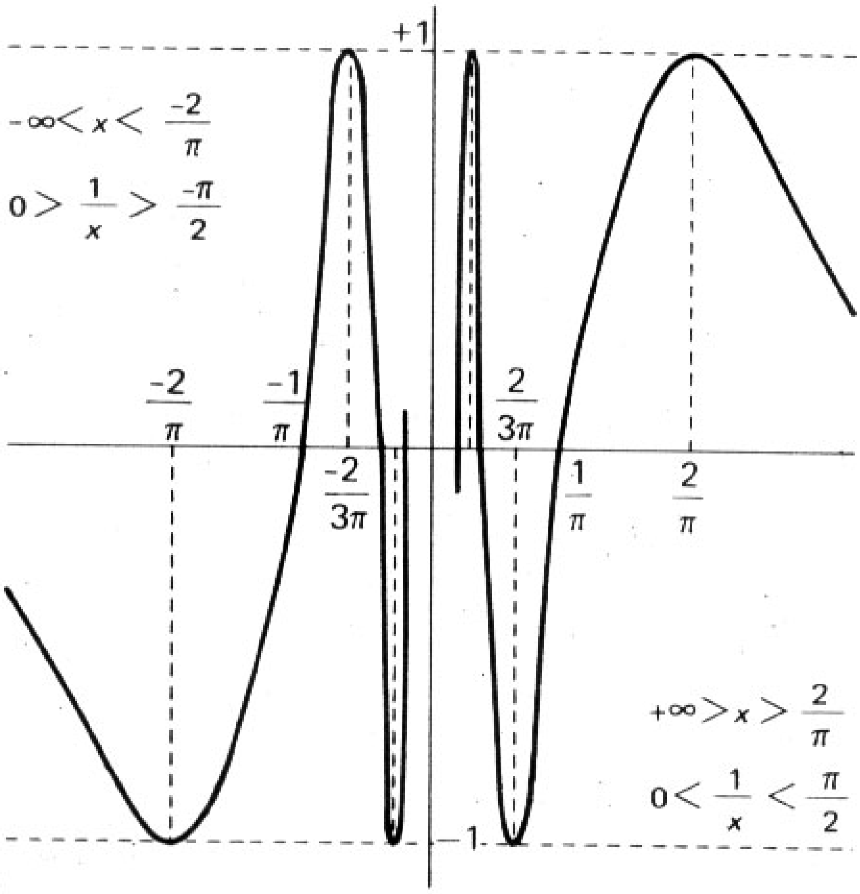


Figura 3.50

3.15. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule $f(a)$ sendo dados

a) $a = -1$ e $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

b) $a = 0$ e $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{1 - x^2}$;

c) $a = \dfrac{7}{2}$ e $f(x) = \dfrac{2}{x}$;

d) $a = 1$ e $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 5x + 1}$;

2. Calcule $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, fazendo as simplificações possíveis supondo que seja $x \neq a$, nos seguintes casos:

a) $f(x) = x^2 - 4$;

b) $f(x) = x^3$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

d) $f(x) = 4x^4$;

3. Determine o domínio de definição das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x+5}$;

b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+2}{x+1}}$;

d) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{-8x+12}{x+5}}$;

e) $f(x) = \ell n\, \dfrac{8-x}{x+2}$;

f) $f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$;

g) $f(x) = \sqrt{x - x^3}$;

h) $f(x) = \ell n\, \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x+1}$;

i) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 - x^2}}$;

j) $f(x) = \dfrac{\ell n\,(-x^2 - 6x + 16)}{\sqrt[4]{-x^2 + x + 20}}$;

l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}} + \ell n(x^2 - 4x - 5)$;

m) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 4x - 12} + \ell n\, \dfrac{8-x}{x+2}$;

n) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{-3x+2}{5x+1}$;

o) $f(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{5x+1}$;

p) $f(x) = \arccos\left(\log_2 \dfrac{x-1}{10}\right)$;

q) $f(x) = \ell n \cos 2x$.

4. Seja $f : A \longrightarrow \mathbf{R}_+$. Determine o domínio A para as seguintes funções f:

a) $f(x) = 3x + 1$;

b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$;

c) $f(x) = \dfrac{2x-5}{1-x}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$;

e) $f(x) = |3 - x| - 1$;

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{10}$.

5. Seja $f : A \longrightarrow [0, 1]$. Determine o domínio A, sendo f dada por

a) $f(x) = 3x - 1$;

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

c) $f(x) = -x^2 + x + 2$;

d) $f(x) = \dfrac{1-x}{3-x}$.

6. Seja $f : A \longrightarrow [-9, -1[$ dada por $f(x) = \dfrac{3+4x}{3-x}$. Pede-se:

a) determinar A;

b) mostrar que f é injetora;

c) verificar se f é sobrejetora.

7. Seja $f : A \longrightarrow]1, 10]$ dada por $f(x) = \dfrac{4-11x}{4-2x}$. Pede-se:

a) determinar A;

b) mostrar que f é injetora;

c) verificar se f é sobrejetora.

8. Seja $f: A \longrightarrow]-4, 1]$ dada por $f(x) = \dfrac{10 + 3x}{10 - 2x}$. Pede-se:

a) determinar A;

b) mostrar que f é injetora;

c) verificar se f é sobrejetora.

9. Dê o domínio e esboce o gráfico:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$;

b) $g(x) = \text{sen } 2x + 2$;

c) $f(x) = |x + 3| - 2$;

d) $g(x) = 2^{-x}$;

e) $f(x) = \ell n\,(-x^2 + 2x)$;

f) $h(x) = 2 + (x - 1)^3$;

g) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x}$;

h) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

i) $f(x) = x \text{ sen } x$;

j) $h(t) = 2^{t^2}$;

l) $g(t) = t \text{ sen } \dfrac{1}{t}$;

m) $h(v) = v^2 \cos \dfrac{1}{v}$;

n) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ (serpentina de Newton);

o) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (parábola de Neil);

p) $f(x) = e^{-x^2}$ (curva de probabilidades);

q) $g(t) = \sqrt{\text{sen } t}$;

r) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + |x|$;

s) $f(x) = x + [x]$;

t) $g(x) = [x^2]$;

u) $h(x) = [x]^2$;

v) $f(x) = [|x|]$.

10. Construa o gráfico e determine o conjunto imagem das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -2 & \text{se} \quad x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{se} \quad x \neq -2 \\ 3 & \text{se} \quad x = -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad 0 \leqslant x < 2 \\ -x^2 + 9 & \text{se} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{se} \quad -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 2 \\ -1 & \text{se} \quad x < -2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -\,|\,x+2\,| & \text{se} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x^2 - 4x & \text{se} \quad -2 \leqslant x < 0 \\ -4 & \text{se} \quad x < -2 \quad \text{ou} \quad x > 2 \end{cases}$

11. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Pede-se:

a) Dom f;

b) Dom fof;

c) calcular $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

d) calcular $f(cx)$;

e) calcular $f(x+h)$.

12. Sejam f e g funções definidas num mesmo conjunto A. Definindo-se novas funções

$$\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$$
$$\min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

pede-se:

a) determinar expressões para essas funções em termos do uso de valor absoluto.

b) demonstrar que

$$f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$$

As funções $\max(f, 0)$ e $\min(f, 0)$ denominam-se, respectivamente, parte positiva e parte negativa de f e são bastante usadas.

13. **Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$ a seguir, obtenha gof e fog e seus respectivos domínios de definição:**

a) $f(x) = x \quad 1$ e $g(x) = x^3$;

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$;

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = x^2 - x - 2$;

e) $f(x) = -x^2 - x + 56$ e $g(x) = \sqrt{x}$;

f) $f(x) = \sqrt{9 - 9x^2}$ e $g(x) = \text{cotg}\, x$;

g) $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$.

14. **Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x \geqslant 1$, obtenha a expressão de sua função inversa, o domínio dessa inversa e represente f e f^{-1} graficamente.**

15. Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}$, $x \neq 1$, determinar

a) a sua função inversa f^{-1};

b) o conjunto $\text{Im}\, f$.

16. Dada a função $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{4 - x^2}$, $x \geqslant 0$, pede-se:

a) mostrar que f é injetora;

b) determinar sua função inversa f^{-1};

c) determinar o conjunto $\text{Im}\, f$.

17. Determine, se existir, a função inversa de cada uma das funções a seguir:

a) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$, $\quad x \in \left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $\quad x \in \left]-\infty, -2\right[$;

c) $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$, $x \in [-2, 1]$.

18. Mostre que:

a) $\cos(\text{arcsen}\, x) = \sqrt{1 - x^2}$;

b) $\text{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$;

c) $\sec(\text{arctg}\, x) = \sqrt{1 + x^2}$;

d) $\text{cossec}(\text{arccotg}\, x) = \sqrt{1 + x^2}$.

19. Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow \mathbf{R}$ duas funções. Demonstre que:

a) se f e g são injetoras, então, gof é injetora;

b) se f e g são sobrejetoras, então, gof é sobrejetora;

c) se gof é injetora, então, f é injetora;

d) se gof é sobrejetora, então g é sobrejetora.

20. Determine duas funções, f e g, tais que $h = gof$ nos seguintes casos:

a) $h(x) = (x^2 + 3)^5$;

b) $h(x) = \left(\dfrac{2x + 5}{x - 4}\right)^3$;

c) $h(x) = (\text{sen}\, 4x)^4 + 5\,(\text{sen}\, 4x)^2 + 2$;

d) $h(x) = 2^{\text{sen}\, 2x}$;

e) $h(x) = 3(x - [x])^2 + 1$.

21. Sejam $f(x) = x^2$, $g(x) = 4^x$ e $h(x) = \text{tg}\, x$.

Diga como são compostas essas funções para se obter a função $v(x) = 4^{\text{tg}\, x^2}$

22. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ |x| & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

verifique se ela é inversível e determine sua inversa.

23. Verifique se o conjunto dado é gráfico de função e, em caso afirmativo, explicite-a:

a) $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - 3y = 1\}$; b) $G = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$;

c) $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$; d) $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^3\}$;

e) $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 4y = -4\}$;

f) $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| = |y|\}$.

24. Determine dois conjuntos A e B para que a equação a seguir determine uma função implícita $f : A \longrightarrow B$:

a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; b) $y^2 - x^2 = 1$;

c) $x^2 - 2x + y^2 - 4y = -4$; d) $\dfrac{y+1}{y} = x$;

e) $|x| = |y|$; f) $xy^2 - y - 4x = 0$.

3.16. FUNÇÕES MONOTÔNICAS

Definição (Funções Monotônicas)

Seja $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ e $B \subset A$.

a) Diz-se que f é crescente em B quando

$$\forall x_1, x_2 \in B \text{ com } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

b) Diz-se que f é estritamente crescente em B

$$\forall x_1, x_2 \in B \text{ com } x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

c) Diz-se que f é decrescente em B quando

$$\forall x_1, x_2 \in B \text{ com } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

d) Diz-se que f é estritamente decrescente em B quando

$$\forall x_1, x_2 \in B \text{ com } x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Em qualquer um dos casos, a função diz-se monotônica em B. Nos casos b) e d) ela também se diz monotônica estrita em B.

Quando a propriedade ocorrer em todo domínio A, elimina-se a locução "em A".

Exemplo 1

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{Z}$ dada por $f(x) = [x]$ é crescente.

Exemplo 2

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$ é estritamente crescente.

Exemplo 3

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ é estritamente decrescente em $\mathbf{R}_-$ e estritamente crescente em $\mathbf{R}_+$.

Exemplo 4

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é estritamente crescente.

Exemplo 5

A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é estritamente decrescente em $\mathbf{R}_{--} = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$ e estritamente decrescente em $\mathbf{R}_{++}$, mas não é estritamente decrescente em $\mathbf{R}_* = \mathbf{R} - \{0\}$.

Exemplo 6

A função constante é monotônica em $\mathbf{R}$, simultaneamente crescente e decrescente.

Exemplo 7

A função $f(x) = \operatorname{tg} x$ é estritamente crescente em qualquer intervalo do tipo $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ com $k \in \mathbf{Z}$, mas não é estritamente crescente no seu domínio $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Exemplo 8

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = x^n$ com $n \in \mathbf{N}$ é tal que:

a) Se n é par, f é estritamente crescente em $\mathbf{R}_+$ e estritamente decrescente em $\mathbf{R}_-$. De fato, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+$ com $x_1 < x_2$, a partir da identidade,

$$x_2^n - x_1^n = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}\underbrace{(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \dots + x_1^{n-1})}_{>0}$$

concluímos $x_2^n - x_1^n > 0$, ou seja, $x_1^n < x_2^n$. Por outro lado, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em $\mathbf{R}_-$ com $x_1 < x_2 \leqslant 0$ temos:

$$-x_1 > -x_2 \geqslant 0$$

donde, pelo que acabamos de ver,

$$(-x_1)^n > (-x_2)^n$$

isto é, sendo n par

$$x_1{}^n > x_2{}^n$$

b) Se n é ímpar, f é estritamente crescente, o que se demonstra do mesmo modo que em a). [c.q.d.]

3.17. FUNÇÃO PERIÓDICA

Definição

Diz-se que uma função $f: A \longrightarrow \mathbf{R}$ é periódica quando existe um número real $t \neq 0$, tal que para todo $x \in A$, têm-se

a) $x + t \in A$;
b) $f(x + t) = f(x)$.

O número t denomina-se um período de f. O menor período positivo T de f, quando existe, chama-se o *período de f*, e neste caso f diz-se periódica de período T.

Exemplo 1

As funções seno, cosseno, secante e cossecante são periódicas de período $T = 2\pi$.

Exemplo 2

As funções tangente e cotangente são periódicas de período $T = \pi$.

Exemplo 3

A função de Sísifo $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = x - [x]$ é periódica de período 1, pois,

$$f(x + 1) = x + 1 - [x + 1] = x + 1 - [x] - 1 = x - [x] = f(x)$$

e não existe outro número t tal que $0 < t < 1$ e que seja período de f (Figura 3.52).

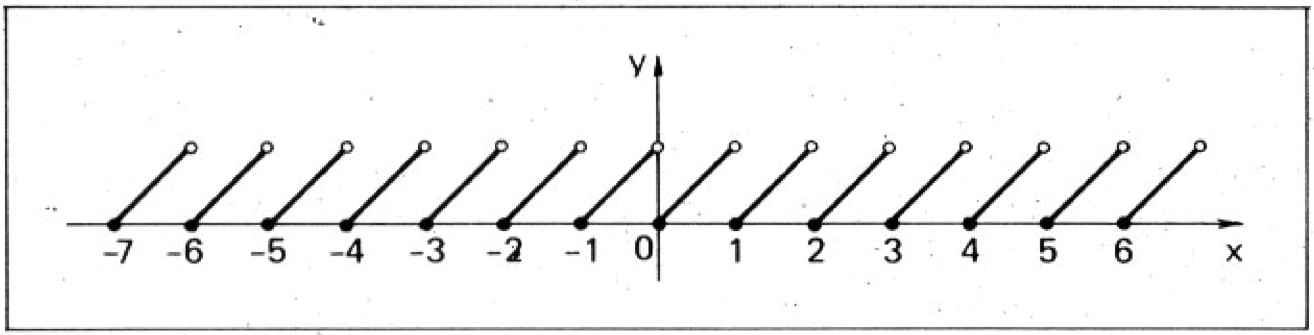


Figura 3.51

Exemplo 4

A função $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \{-1, 1\}$, dada por $f(x) = (-1)^n$ é periódica de período 2 (Figura 3.52).

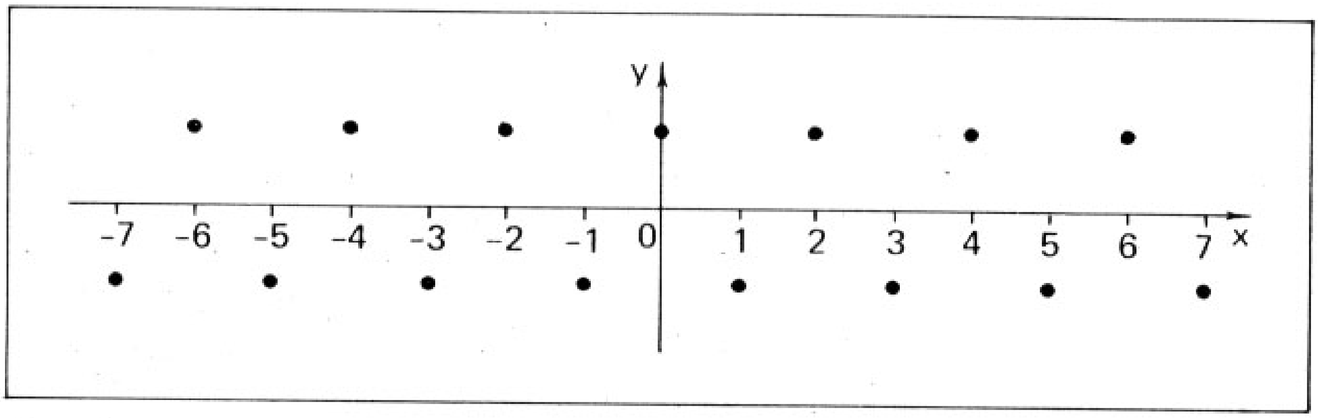


Figura 3.52

3.18. FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Definição

a) *Função par.* Uma função $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ diz-se par quando para todo $x \in A$ têm-se $-x \in A$ e $f(-x) = f(x)$.

b) *Função ímpar.* Uma função $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ diz-se ímpar quando para todo $x \in A$ têm-se $-x \in A$ e $f(-x) = -f(x)$.

Exemplo 1

A função $f(x) = \cos x, x \in \mathbf{R}$, é par, pois para todo $x \in \mathbf{R}$ têm-se $-x \in \mathbf{R}$ e

$$\cos(-x) = \cos x$$

Exemplo 2

A função $f(x) = \operatorname{sen} x, x \in \mathbf{R}$, é ímpar, pois para todo $x \in \mathbf{R}$ têm-se $-x \in \mathbf{R}$ e

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

Exemplo 3

A função $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, é par, pois para todo $x \in \mathbf{R}$ têm-se $-x \in \mathbf{R}$ e

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Exemplo 4

A função $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ é ímpar, pois, para todo $x \in \mathbf{R}$, $-x \in \mathbf{R}$ e

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Exemplo 5

A função tangente cujo domínio é o conjunto $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ é ímpar, pois para todo $x \in A$ têm-se $-x \in A$ e

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

3.19. FUNÇÃO LIMITADA

Definição 1

Diz-se que uma função $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ é majorada quando o conjunto $\operatorname{Im} f$ é majorado, isto é, quando existe $M_1 \in \mathbf{R}$ tal que

$$f(x) \leqslant M_1, \forall x \in A$$

Definição 2

Diz-se que uma função $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ é minorada quando o conjunto $\operatorname{Im} f$ é minorado, isto é, que existe $M_2 \in \mathbf{R}$ tal que

$$M_2 \leqslant f(x), \ \forall x \in A$$

Se uma função for majorada e minorada, diz-se que ela é *limitada* e, em conseqüência, tem-se

$$| f(x) | \leqslant M, \forall x \in \mathrm{A}$$

para

$$M = \max \{| M_1 |, | M_2 |\}$$

Definição 3

Se a função $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ é majorada o supremo do conjunto $\operatorname{Im} f$ denomina-se supremo da função e indica-se com $\sup\limits_{x \in A} f(x)$.

Se o supremo do conjunto $\operatorname{Im} f$ for máximo, ele se denomina máximo de f e se indica por $\max\limits_{x \in A} f(x)$.

Definições análogas podem ser dadas para o ínfimo de f ($\inf\limits_{x \in A} f(x)$) e mínimo de f ($\min\limits_{x \in A} f(x)$).

Exemplo 1

A função constante $f(x) = k$, $x \in \mathbf{R}$, é limitada e $\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = k$.

Exemplo 2

A função $f : \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1[$ dada por $f(x) = x - [x]$ é limitada, isto é,

$$|f(x)| < 1, \forall x \in \mathbf{R}$$

Tem-se

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 0 \text{ e } \sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 1$$

Exemplo 3

A função $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, é limitada inferiormente em $\mathbf{R}$ e tem-se:

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 0$$

Exemplo 4

A função sen : $\mathbf{R} \longrightarrow [-1, 1]$ é limitada em $\mathbf{R}$ e tem-se

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \operatorname{sen} x = \max_{x \in \mathbf{R}} \operatorname{sen} x = 1$$

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} \operatorname{sen} x = \min_{x \in \mathbf{R}} \operatorname{sen} x = -1$$

Exemplo 5

A função $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, não é limitada, não sendo nem majorada nem minorada.

3.20. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Dadas as funções a seguir, determine os intervalos onde elas são monotônicas:

a) $f(x) = x - [x]$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x + 4 \text{ se } & 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 \text{ se } |x| < 2 \\ x^2 - 4 \text{ se } |x| \geqslant 2; \end{cases}$

e) $f(x) = \operatorname{sen} x$;

f) $g(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$

2. Prove que: $\frac{2x}{x+2}$ é estritamente crescente em $]-\infty, -2[$ e também em $]-2, +\infty[$ mas não é estritamente crescente em $\mathbf{R} - \{-2\}$.

3. Prove que a função sen : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbf{R}$ é estritamente crescente.

4. Prove que toda função estritamente crescente ou estritamente decrescente é injetora.

5. Prove que se f é crescente (ou decrescente) e injetora, então, f é estritamente crescente (respectivamente estritamente decrescente).

6. Se $f : A \longrightarrow \operatorname{Im} f$ é monotônica estrita, então, $f^{-1} : \operatorname{Im} f \longrightarrow A$ é monotônica estrita do mesmo tipo.

7. Seja n um número natural par. Prove que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

8. Seja n natural ímpar. Prove que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é estritamente crescente em $\mathbf{R}$.

9. Prove que tg x é estritamente crescente em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

10. Diga quais das funções a seguir são periódicas. Nos casos afirmativos, determine, quando existem, os períodos:

    a) $f(x) = [x] - x$; b) $f(x) = 1, x \in \mathbf{Z}$;

    c) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbf{Q} \\ 0 \text{ se } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}; \end{cases}$

    d) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{n-x}$ para $n - 1 \leqslant x < n, n \in \mathbf{Z}$;

    e) $f(x) = \text{tg } 4x$; f) $f(x) = \text{sen } (x^2)$

11. Verifique se a função a seguir é par ou ímpar justificando a resposta

    a) $f(x) = -x^3 + x$; b) $f(x) = x \text{ sen } x$;

    c) $g(x) = \text{sen}^3 x \cdot \cos x$; d) $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

    e) $v(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; f) $W(t) = t \cdot \cos t$;

    g) $f(x) = |x|$; h) $f(x) = -\frac{x}{|x|}$.

12. Se o conjunto A é simétrico em relação à origem (se $x \in A$, então, $-x \in A$) para toda $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ prove que

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

é uma função par e

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

é uma função ímpar.

13. A função $f(x) = x^2$, $x \in I = [0, 2[$ é limitada? Em caso afirmativo determine:

a) $\inf\limits_{x \in I} f(x)$;

b) $\sup\limits_{x \in I} f(x)$;

c) $\min\limits_{x \in I} f(x)$;

d) $\max\limits_{x \in I} f(x)$.

14. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in I =]0, 1]$. Pergunta-se:

a) Esta função é majorada? Justifique.

b) Esta função é minorada? Justifique.

c) Existe $\sup\limits_{x \in I} f(x)$

d) Existe $\inf\limits_{x \in I} f(x)$?

15. Prove que, se a função $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$

a) é majorada, então, $-f$ é minorada e $\inf\limits_{x \in A} (-f)(x) = -\sup\limits_{x \in A} f(x)$;

b) é minorada, então, $-f$ é majorada e $\sup\limits_{x \in A} (-f)(x) = -\inf\limits_{x \in A} f(x)$.

16. Prove que, se $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ é limitada, então, $|f|$ é também limitada e

a) $\sup\limits_{x \in A} |f| \geqslant \sup\limits_{x \in A} f$

b) $\inf\limits_{x \in A} |f| \geqslant \inf\limits_{x \in A} f$