.

CM 128 - Funções

Notas de Aula

PSE 2017

Departamento de Matemática - UFPR

Sumário

Introdução

O principal objetivo destas notas é fornecer aos estudantes *apenas um guia* para o curso Funções - CM 128 - ofertado pelo departamento de matemática da UFPR.
Recomendamos (fortemente) que os alunos busquem outros materiais para complementar seu estudo. Listamos no final do texto algumas boas referências para este fim.
Uma grande quantidade dos exercícios propostos neste texto foram inicialmente elaborados pelo prefessor Alexandre Trovon (UFPR) e vários outros pelo professor Lucas Pedroso (UFPR).
Por fim, lembramos ao leitor que este é um material ainda en construção, o qual pode apresentar erros de digitação e formatação. Sendo assim, ficaremos felizes em receber correções, sugestões e críticas.

Capítulo 1

Conjuntos

Resumo:

Nas primeiras aulas deste curso estudaremos alguns aspectos gereais sobre conjuntos, tais como relaçõe de pertinencia, inclusão e intersecção. Faremos ainda uma breve introdução sobre os principais conjuntos numéricos que serão abordados neste curso.

1.1 Aula 1 - Operações entre conjuntos

1. Relações de pertinencia e inclusão. Conjunto complementar;
2. União e interseção de conjuntos
3. Produto cartesiano

1.1.1 Conjuntos

Não será foco deste curso uma discussão formal sobre o conceito de *conjunto*. Para nossos fins a seguinte definição, dada por Georg Cantor (1845-1918), será suficiente:

Definição 1.1.1 (Conjunto) *Chama-se conjunto o agrupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto*

Ao longo desta disciplina (bem como ao longo do curso de matemática) estudam-se vários tipos de conjuntos, tais como, os numéricos, de pontos, de curvas, de funções, de triângulos.

Alguns exemplos são:

Exemplo 1.1.1

(a) O conjunto numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$;

(b) Conjunto das funções polinomiais, das funções trigonométricas;

(c) Gráficos de funções;

Definição 1.1.2 *Dado um conjunto A utilizaremos a notação $x \in A$ (lê-se x pertence a A) para indicar que x é um elemento de A.*

Exemplo 1.1.2

(a) $10 \in \mathbb{N}$, $-7 \in \mathbb{Z}$;

(b) Com respeito aos conjuntos $A = \{1, 2, 7, 9\}$, $B = \{1, 7\}$ e $C = \{9, 10\}$ temos:

- $1 \in A$, $2 \in A$, $7 \in A$ e $9 \in A$;
- $1 \in B$ e $7 \in B$;
- $9 \in C$ e $10 \in C$;

Observação 1.1.1

(a) Note que todos os elementos de B são também elementos de A;

(b) Existem elementos de A que não são elementos de B;

(c) Os conjuntos B e C não possuem elementos comuns. (O símbolo $\emptyset$ indica o conjunto vazio, ou seja, aquele que não possui elementos.)

Com base nestas observações introduzimos os seguintes conceitos:

Definição 1.1.3 *Sejam A e B conjuntos.*

(i) Dizemos que B é subconjunto de A (notação $B \subset A$) quando todo elemento de B for elemento de A;

(ii) Dizemos que B é subconjunto próprio de A (notação $B \subsetneq A$) quando $B \subset A$ e existe pelo menos um $x \in A$ tal que $x \notin B$;

(iii) Dizemos que os conjunto A e B são iguais quando $A \subset B$ e $B \subset A$;

(iv) Quando B é um subconjunto de A definimos o conjunto complementar B, em relação a A, como sendo aquele que contém todos os elementos que estão em A mas não em B e o denotamos por $A - B$, ou ainda, B_A^C. De modo mais preciso:

$$B_A^C = A - B = \{x \in A, \quad \textit{tais que} \quad x \notin B\}$$

Observação 1.1.2 *A definição de igualdade de conjuntos, apesar de ser muito intuitiva e, aparentemente, trivial fornece uma importante ferramenta para a demonstração de alguns resultados. Vamos explorar este assunto mais adiante.*

Exemplo 1.1.3

Segue das definições acima e do exemplo anterior que:

- $B \subsetneq A$;
- $A - B = \{2, 9\}$;
- $A \neq B$;

Exemplo 1.1.4

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $0 \in A$;
- $3 \notin A$;
- $\{3,7\} \in A$;
- $\{\{3,7\}\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;
- $7 \notin A$;
- $\{0,2\} \subset A$;
- $\{3\} \not\subset A$;

Observação 1.1.3 *Ao longo deste curso os alunos terão um primeiro contato formalização de conceitos matemáticos e demonstrações de proposições. Neste sentido recomendamos a leitura das seções 1.6 e 2.3 da referência [4]. Recomenda-se também a referência [1].*

1.1.2 União e Interseção

Exibimos agora duas operações entre conjuntos extremamente importantes:

Definição 1.1.4 *Sejam A e B conjuntos.*

(i) A união entre dois conjuntos A e B (notação $A \cup B$) é um novo conjunto que contém exatamente todos os elementos de A e todos os elementos B. Em símbolos:

$$A \cup B = \{x, \quad \textit{tais que} \quad x \in A, \quad \textit{ou} \quad x \in B\} \tag{1.1}$$

(ii) A interseção entre os conjuntos A e B (notação $A \cap B$) é um novo conjunto que contém exatamente os elementos comuns a A e B. Em símbolos:

$$A \cap B = \{x, \quad \textit{tais que} \quad x \in A, \quad \textit{e} \quad x \in B\}. \tag{1.2}$$

Exemplo 1.1.5 *Sejam A, B e C os conjuntos $A = \{1,5,7,9\}$, $B = \{1,7,10\}$ e $C = \{8,10\}$.*

- $A \cup B = \{1,5,7,9,10\}$;
- $A \cap B = \{1,7\}$;
- $B \cup C = \{1,5,7,8,9,10\}$;
- $B \cap C = \emptyset$;

Proposição 1.1.1 *As seguintes afirmações são verdadeiras para quaisquer subconjuntos A, B e C de um conjunto U.*

(a) $(A \cap B) \subset A$

(b) $A \subset (A \cup B)$

(c) $A \subset B$ e $B \subset C \implies A \subset C$

(d) $(A \cup B) = (A \cap B) \iff A = B$

(e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(g) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(h) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

(Vamos demonstrar apenas alguns destes itens, sendo que os demais devem ser feitos como exercício.)

Demonstração:

(a) Pela definição de inclusão devemos provar que qualquer elemento do conjunto $A \cap B$ é também um elemento do conjunto A. Considere então $x \in A \cap B$. Segue de (1.2) que $x \in A$ e $x \in B$, logo

$$x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow A \cap B \subset A.$$

(b) Para verificar este item devemos mostrar que todo elemento de A é um elemento de $A \cup B$. Para tanto, dado $x \in A$ segue de (1.1) que $x \in A \cup B$.

(c) Exercício.

(d) Este é um resultado do tipo **se e somente se**, ou seja, devemos provar duas afirmações:

(i) $(A \cup B) = (A \cap B) \implies A = B$;

(ii) $A = B \implies (A \cup B) = (A \cap B)$;

Para provar (i) devemos assumir que vale a igualdade $(A \cup B) = (A \cap B)$ e provar que $A = B$, ou seja, demonstar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

Considere então $x \in A$. Segue do item (b) que $x \in A \cup B$, mas pela hipótese $(A \cup B) = (A \cap B)$ temos

$$x \in A \subset A \cup B = A \cap B,$$

então $x \in A \cap B$ e pela definição de interseção obtemos $x \in B$, portanto $A \subset B$.

Para provar que $B \subset A$ podemos seguir as mesmas ideias, pois para $x \in B$ temos

$$x \in B \subset A \cup B = A \cap B,$$

concluindo então a prova da afirmação (i).

A demonstração da afirmação (ii) segue dos seguintes fatos:

$$A = B \implies A \cup B = A \cup A = A$$

e

$$A = B \implies A \cap B = A \cap A = A$$

Assim, $A \cup B = A = A \cap B$, logo fica conluida a prova do item (d).

(e) Exercício.

(f) Exercício.

(g) Para provar a igualdade destes conjuntos devemos verificar as duas inclusões

(i) $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$

(ii) $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$

Para verificar (i) note que se $x \in (A \cup B)^C$, então $x \notin A \cup B$, logo x não pode ser elemento de A e não pode ser elemento de B. Temos então $x \notin A$ e $x \notin B$, ou seja, $x \in A^C$ e $x \in B^C$. Mostramos então que

$$x \in (A \cup B)^C \implies x \in A^C \cap B^C$$

Agora, se $x \in A^C \cap B^C$ então $x \notin A$ e $x \notin B$, logo $x \notin A \cup B$ e portanto $x \in (A \cup B)^C$, o que conclui a prova de (ii).

(h) Exercício.

■

1.1.3 Produto cartesiano

Seja $\{x, y\}$ um conjunto, cujos elementos podem ou não ser distintos. Para estes elementos definimos dois novos elementos, chamados de pares ordenados, indicados por (x, y) e (y, x).

Dado um outro par ordenado (x', y') definimos

$$(x, y) = (x', y') \text{ se, e somente se, } x = x' \text{ e } y = y'$$

Em particular, $(x, y) = (y, x)$ se, e somente se, $x = y$.

Definição 1.1.5 *Dados dois conjuntos não vazios A e B definimos o produto cartesiano (notação $A \times B$) de A por B como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente:*

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A \ \text{ e } \ y \in B\}$$

Exemplo 1.1.6

Com respeito aos conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{0\}$ temos:

(a) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

(b) $A \times C = \{(a, 0), (b, 0)\}$

Observação 1.1.4 *É interessante notar que o produto cartesiano não é comutativo, ou seja, nem sempre vale a igualdade $A \times B = B \times A$. De fato, basta considerar o produto de conjuntos distintos.*

1.1.4 Exercícios

Exercício 1.1.1 *Dados os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{0, 3, 7, 5\} \ \text{ e } \ C = \{0, -1, 2\},$$

determine o conjunto $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

Exercício 1.1.2 *Considere o conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 11\}$. Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.*

(a) $1 \in A$

(b) $2 \in A$

(c) $7 \notin A$

(d) $11 \in A$

(e) $\{1\} \in A$

(f) $\{1, 3, 4\} \subset A$

(g) $\{1, 3\} \cap \{3, 5, 7\} \subset A$

(h) $4 \subset A$

Exercício 1.1.3 *Considere os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3\} \ \text{ e } \ \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

(a) Verifique se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações:

(a_1) $2 \in A$;

(a_2) $11 \in A$;

(a_3) $1 \in \mathcal{P}(A)$;

(a_4) $\{1, 3\} \subset A$;

(a_5) $\{2, 3\} \in \mathcal{P}(A)$;

(a_6) $\{1, 3\} \in A$;

(b) Como foi construído o conjunto $\mathcal{P}(A)$?

Exercício 1.1.4 *Considere os conjuntos*

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $B = \{2, 3, 4\}$,
- $C = \{2, 4, 5\}$.

Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.

(a) $A \subset B$

(b) $A \subset C$

(c) $B \subset A$

(d) $B \subset C$

(e) $C \subset A$

(f) $C \subset B$

(g) $C \subset C$

(h) $\emptyset \subset B$

Exercício 1.1.5 *Dados os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \ \ B = \{2, 4, 6, 8\} \ \ C = \{3, 4, 5, 6\},$$

determine:

- $A \cap B$ e $A \cup B$
- $A \cap C$ e $A \cup C$
- $B \cap C$ e $B \cup C$
- $(A \cap B) \cap C$ e $A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C$ e $A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cup C$ e $A \cap (B \cup C)$

Exercício 1.1.6 *Considere os conjuntos*

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
- $B = \{2, 4, 6, 8\}$,
- $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,
- $D = \{3, 4, 5\}$,
- $E = \{3, 5\}$,

verifique quais destes conjuntos podem substituir o conjunto X nas seguintes afirmações:

(a) $X \subset D$ e $X \not\subset B$ (b) $X \subset C$ e $X \not\subset A$ (c) $X \subset A$ e $X \not\subset C$

Exercício 1.1.7 *Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, achar os conjuntos $X \neq A$ tais que $\{1\} \subset X$ e $X \subset A$.*

Exercício 1.1.8 *Determine os elementos do conjunto X, Y e Z, tais que:*

$$X \cap Y = \{2, 4\}, \quad X \cup Y = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$X \cap Z = \{2, 3\}, \quad X \cup Z = \{1, 2, 3, 4\}$$

Exercício 1.1.9 *Considere o conjunto universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e os subconjuntos*

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}, \quad Y = \{1, 2, 3\} \quad e \quad Z = \{4, 6, 8\}.$$

Determine:

- X^C, Y^C e Z^C
- $X^C \cap X$ e $X^C \cup X$
- $X \cap Y$, $X \cap Z$ e $Y \cap Z$
- $(X \cup Y)^C$ e $X^C \cup Y^C$
- $(X \cap Y)^C$ e $X^C \cap Y^C$
- $(X \cap Z)^C$ e $X^C \cap Z^C$

Exercício 1.1.10 *Construa exemplos de conjuntos A, B e C que não satisfazem as seguintes afirmações:*

(a) Se $A \cap B = \emptyset$ e $B \cap C = \emptyset$, então $A \cap C = \emptyset$;

(b) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \cap B \neq \emptyset$;

(c) Se $A \cap B \subset C$, então $A \subset C$;

Exercício 1.1.11 *Determine os elementos dos seguintes produtos cartesianos:*

- $\{1\} \times \{1, 2\}$
- $\{1, 2\} \times \{a, b, c\}$
- $\{0, 1\} \times \{3, 4\}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$
- $\{0, 2\} \times \{0, 2\}$
- $\{\{1, 2\}, \{3\}\} \times \{\{5\}, \{6\}\}$

Exercício 1.1.12 *Considere os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{3, 4\}$. Determine:*

- $A \times (B \cup C)$
- $A \times (B \cap C)$
- $(A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \times B) \cap (A \times C)$

Exercício 1.1.13 *Determine os números reais que tornam iguais os seguintes pares ordenados:*

(a) $(x + y, 1)$ e $(3, x - y)$

(b) $(y - 2, 2x + 1)$ e $(x - 1, y + 2)$

Exercício 1.1.14 *Sejam a e b dois números pertencentes conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Determine a interseção dos conjuntos*

$$M(a) = \{a, 2a, 3a, \ldots\} \quad e \quad M(b) = \{b, 2b, 3b, \ldots\}.$$

1.2 Aula 2 - Os números racionais

---

1. Os conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ suas operações.

1.2.1 Os números naturais

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é, geralmente, introduzicomo sendo o conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}. \tag{1.3}$$

Entretanto, note que (1.3) é apenas um representação informal deste conjunto, pois pois o símbolo "$\ldots$" não apresenta de modo preciso a construção de $\mathbb{N}$.

A construção formal (a qual é uma bela construção) dos números naturais é feita através dos chamados *Axiomas de Peano*, os quais podem ser formulados da seguinte forma:

Definição 1.2.1 *O conjunto dos números naturais é caracterizado pelos seguintes fatos:*

(i) todo número natural tem um sucessor, que é ainda um número natural; números diferentes possuem sucessores diferentes;

(ii) existe um único número natural, denotado por 1, que não é sucessor de nenhum outro;

(iii) se um conjunto A de números naturais contém o 1 e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então $A = \mathbb{N}$;

Um entendimento mais profundo desta construção exige técnicas que fogem do escopo deste curso. Entretanto, vale ressaltar que esta formulação de $\mathbb{N}$ permite exibir de forma precisa o significado das operações de soma e produto entre números naturais, como descrevemos na sequência.

Primeiramente, para cada número natural m denote por $s(m)$ o seu sucessor. Assim, a soma de dois números naturais pode ser definida da seguinte forma:

- para cada par de números naturais m, n associamos o número (natural) $m + n$ caracterizado por:

$$\begin{aligned} m + 1 &= s(m); \\ m + s(n) &= s(m+n), \quad \text{isto é,} \quad m + (n+1) = (m+n) + 1 \end{aligned}$$

Por exemplo, se utilizarmos a notação $s(1) = 2$, então

$$1 + 1 = s(1) = 2.$$

Agora, se denotarmos $s(2) = 3$, então

$$1 + s(1) = s(1+1) = s(s(1)) = s(2) = 3,$$

ou seja,

$$1 + 2 = 3,$$

assim, obtemos a noção usual de soma de números naturais.

Para definir o produto procedemos da seguinte forma:

- para cada par de númermos naturais m, n associamos o número (natural) $m \cdot n$ caracterizado por:

$$\begin{aligned} m \cdot 1 &= m; \\ m \cdot s(n) &= m \cdot n + m, \quad \text{isto é,} \quad m \cdot (n+1) = m \cdot n + m, \end{aligned}$$

Note então que

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1, \\ 1 \cdot s(1) &= 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2, \\ 1 \cdot s(2) &= 1 \cdot 2 + 1 = 2 + 1 = 3, \end{aligned}$$

de modo que reobtemos a noção usual de produto.

Observamos ainda que, seguindo estas ideias, podemos dar um sentido formal para a *desigualdade* entre números naturais:

- dados os números naturais m, n escreve-se $m < n$ quando existe $p \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n = m + p$. Neste caso, diz-se que m é menor do que n.

Em particular, prova-se que se $m < n$ e $n < k$, então $m < k$. Mais ainda, dados $m, n \in \mathbb{N}$ apenas uma (e somente uma) das seguintes possibildiades ocorre

$$m < n, \; m = n, \quad \text{ou}, \; n < m.$$

Como dito acima, a formalização destas ideias foge ao nosso objetivo, assim assumiremos que ela é válida, bem como o seguinte resultado:

Proposição 1.2.1 *As seguintes afirmações são satisfeitas em relação às operções definidas acima:*

(associativa) $(m + n) + p = m + (n + p)$ *e* $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$*;*

(distributiva) $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$*;*

(comutativa) $m + n = n + m$ *e* $m \cdot n = n \cdot m$*;*

(corte) $m + n = m + p \Rightarrow n = p$ *e* $m \cdot n = m \cdot p \Rightarrow n = p$*;*

(compatibilidade) $m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$ *e* $m < n \Rightarrow m + p < n + p$ *;*

1.2.2 Números pares e números ímpares

Com o intuito de explorar algumas propriedades apresentadas pela proposição 1.2.1, bem como aperfeiçoar as técnicas de demonstração, faremos alguns comentários sobre dois subconjuntos de $\mathbb{N}$, saber: *números pares e números ímpares.*

Definição 1.2.2 *Definimos o seguintes conjuntos em* $\mathbb{N}$*:*

(pares) $\mathcal{P} = \{m \in \mathbb{N};\ \exists n \in \mathbb{N} \ \textit{ satisfazendo } \ m = 2 \cdot n\}$*;*

(ímpares) $\mathcal{I} = \{1\} \cup \{m \in \mathbb{N};\ \exists n \in \mathbb{N} \ \textit{ satisfazendo } \ m = 2 \cdot n + 1\}$

Observação 1.2.1

Note que $\mathcal{I} = \mathbb{N} - \mathcal{P}$ e $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$. Além disso, $\mathbb{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{I}$.

Proposição 1.2.2 *O conjunto dos números pares é fechado em relação à soma e ao produto, isto é,*

$$m, n \in \mathcal{P} \Longrightarrow m + n \in \mathcal{P}$$

e

$$m, n \in \mathcal{P} \Longrightarrow m \cdot n \in \mathcal{P}$$

Demonstração:

Considere $m, n \in \mathcal{P}$. Por definição, existem $p, q \in \mathcal{P}$ tais que

$$m = 2 \cdot p \ \text{ e } \ n = 2 \cdot q,$$

logo

$$m + n = (2 \cdot p) + (2 \cdot q) = 2 \cdot p + 2 \cdot q = 2 \cdot (p + q) = 2 \cdot s,$$

sendo $s = p + q$, portanto $m + n = 2 \cdot s$ e assim $m + n \in \mathcal{P}$.

Por outro lado, temos

$$m \cdot n = (2 \cdot p) \cdot (2 \cdot q) = 2 \cdot p \cdot 2 \cdot q = 2 \cdot (2 \cdot p \cdot q) = 2 \cdot t,$$

sendo $t = 2 \cdot p \cdot q$, donde $m \cdot n \in \mathcal{P}$.

■

Observação 1.2.2

Uma forma equivalente de dizer que o número m é dizer que ele é divisível por 2. Podemos denotar isso por

$$p = \frac{m}{2}, \quad \text{para algum} \quad p \in \mathbb{N}.$$

De modo geral temos: dizemos que um número natural m é divsível por $n \in \mathbb{N}$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n \cdot p$. Neste caso, escrevemos

$$p = \frac{m}{n}.$$

Observe que nem sempre existe a divisão de números naturais como, por exemplo, $1/2$.

1.2.3 Equações

Ainda com o objetivo de explorar a proposição 1.2.1, faremos agora uma breve abordagem sobre a resolução de equações envolvendo números naturais.

Exemplo 1.2.1 *Vamos resolver o seguinte problema: obter um número $x \in \mathbb{N}$ que seja solução da equação $3x + 7 = 10$. (Note que não faz sentido, até o presente momento, a ideia de "passar" subtraindo).*

Observe inicialmente que $10 = 3 + 7$, logo

$$3x + 7 = 10 \iff 3x + 7 = 3 + 7,$$

logo pela propriedade do corte (para a soma), temos

$$3x + 7 = 10 \iff 3x = 3 = 3 \cdot 1$$

e pela propriedade do corte (para o produto), temos

$$3x + 7 = 10 \iff x = 1.$$

Exemplo 1.2.2 *Obter um número $x \in \mathbb{N}$ que seja solução da equação $5x + 2 = 10$.*

Analogamente ao caso anterior, escrevendo $10 = 8 + 2$, obtemos

$$5x + 2 = 10 \iff 5x + 2 = 8 + 2 \iff 5x = 8.$$

Neste caso não pode existir um elemento $x \in \mathbb{N}$ tal que $5x = 8$. De fato, note que

$$5 \cdot 1 = 5 < 8 \ \text{ e } 5 \cdot 2 = 10 > 8,$$

logo, pelo último item da proposição 1.2.1, o número x deveria satisfazer $1 < x < 2$, o que é impossível para qualquer $x \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.2.3 *Obter um par números naturais x e y que seja solução da equação $x \cdot y = 17$.*

É fácil ver que o par $(1, 17)$ e $(17, 1)$ é uma solução deste problema. Mais ainda, esta é a única solução possível.

Este exemplo se encaixa na seguinte definição:

Definição 1.2.3 (Números primos) *Dizemos que um número natural p, diferente de 1, é um número primo quando as únicas soluções da equação $x \cdot y = p$ são $x = 1$ e $y = p$.*

1.2.4 Os números inteiros

Dados dois números naturais m e n, com $m > n$, definimos o número $m - n$ como sendo o (único) número natural p que satisfaz a equação $m = p + n$, ou seja,

$$m - n = p \iff m = p + n.$$

Observação 1.2.3 *Note que:*

- *a diferença $m - n$ é, de fato, única pois se for $m - n = p$ e $m - n = p'$, então $p = p'$;*
- *quando $m < n$ (ou mesmo $m = n$) a diferença $m - n$ não faz sentido em $\mathbb{N}$, pois isto violaria o último item da proposição 1.2.1;*
- *para qualquer $m \in \mathbb{N}$ não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m + n = m$;*

Com base nestas observações introduzimos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ da seguinte forma:

(i) defini-se o conjunto $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, chamado de conjunto dos inteiros positivos;

(ii) defini-se o conjunto $\mathbb{Z}^- = \{-n,\ n \in \mathbb{N}\}$, chamado de conjunto dos inteiros negativos, em que inicialmente a notação $-n$ representa apenas um símbolo qualquer (depenendete do natual n);

(iii) defini-se um elemento chamado zero, o qual é denotado por 0;

Assim, definimos o conjunto

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

Fixadas estas notações, introudizmos agora as operações de soma e produto em $\mathbb{Z}$:

(Soma) Caracterizemos a soma de números inteiros por:

- $m + n = 0$ se, e somente se, $m = -n$;
- $m + 0 = m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$;
- $m + n$ coincide com a soma de números naturais se $m, n \in \mathbb{Z}^+$;
- se $m \in \mathbb{Z}^+$ e $-n \in \mathbb{Z}^-$, com $m > n$, então $m + (-n)$ é a diferença entre números naturais $m - n$;
- se $m \in \mathbb{Z}^+$ e $-n \in \mathbb{Z}^-$, com $m < n$, então $m + (-n)$ é o número inteiro $-(n - m)$;
- se $-m \in \mathbb{Z}^-$ e $n \in \mathbb{Z}^+$, com $m > n$, então $-m + n$ é o número inteiro $-(m - n)$;
- se $-m \in \mathbb{Z}^-$ e $n \in \mathbb{Z}^+$, com $m < n$, então $-m + n$ é a diferença entre números naturais $n - m$;
- se $-m \in \mathbb{Z}^-$ e $-n \in \mathbb{Z}^-$, então $-m + (-n)$ é o número inteiro $-(m + n)$;

(Produto) Caracterizemos o produto de números inteiros por:

- $m \cdot n = 0$ se, e somente se, $m = 0$ ou $n = 0$;
- $m \cdot n$ coincide com o produto de números naturais $m \cdot n$;
- se $m \in \mathbb{Z}^+$ e $-n \in \mathbb{Z}^-$, então $m \cdot (-n)$ é o número inteiro $-(m \cdot n)$;

- se $-m \in \mathbb{Z}^-$ e $n \in \mathbb{Z}^+$, então $(-m) \cdot n$ é o número inteiro $-(m \cdot n)$;
- se $-m \in \mathbb{Z}^-$ e $-n \in \mathbb{Z}^-$, $(-m) \cdot (-n)$ é o produto de números naturais $m \cdot n$;

Observação 1.2.4

(a) Mostra-se (sem grandes dificuldades) que estas duas operações em $\mathbb{Z}$ satisfazem as propriedades comutativa, associativa e distributiva enunciadas na proposição 1.2.1;

(b) Se m e n são inteiros diferentes de zero, então $m \cdot n \neq 0$;

(c) Podemos também definir a noção de desigualdade:

- dizemos que um número inteiro m é positivo se $m \in \mathbb{Z}^+$, e escrevemos $m > 0$;
- dizemos que um número inteiro m é negativo se $m \in \mathbb{Z}^-$, e escrevemos $m < 0$;
- dados $m, n \in \mathbb{Z}$, dizemos que $m > n$ se a diferença $m - n$ é um inteiro positivo;

Proposição 1.2.3 *As seguinte afirmações são válidas em $\mathbb{Z}$:*

(a) Se $m < n$, então $m + p < n + p$;

(b) Se $m > 0$, então $-m < 0$;

(c) Se $m < 0$, então $-m > 0$;

(d) Se $m < n$ e $p > 0$, então $m \cdot p < n \cdot p$;

(e) Se $m < n$ e $p < 0$, então $m \cdot p > n \cdot p$;

Observação 1.2.5

(a) Temos, evidentemente, $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$. Além disso, as operações de soma e produto definidas em Z coincidem com as de $\mathbb{N}$.

(b) A equação $10x + 14 = 4$ pode ser resolvida em $\mathbb{Z}$. De fato, somando o número (-14) em ambos os membros desta equação obtemos

$$\begin{aligned} 10x + 14 = 4 &\iff (10x + 14) + (-14) = 4 + (-14) \\ &\iff 10x + (14 + (-14)) = -(14 - 4) \\ &\iff 10x = -10 \\ &\iff x = -1. \end{aligned}$$

1.2.5 Números pares e ímpares

De modo natural podemos considerar os conceitos de números inteiros pares e ímpares:

(pares) $\mathcal{P} = \{m \in \mathbb{Z};\ \exists n \in \mathbb{Z} \ \text{ satisfazendo } \ m = 2 \cdot n\}$;

(ímpares) $\mathcal{I} = \{m \in \mathbb{Z};\ \exists n \in \mathbb{Z} \ \text{ satisfazendo } \ m = 2 \cdot n + 1\}$

Proposição 1.2.4 *Dado $m \in \mathbb{Z}$, temos $m^2 \in \mathcal{P}$ se, e somente se, $m \in \mathcal{P}$.*

Demonstração: Para mostrar que $m^2 \in \mathcal{P}$ implica em $m \in \mathcal{P}$ é suficiente provar que nenhum número ímpar possui quadrado par.

Para tanto, note que se $m \in \mathbb{Z}$ é ímpar, então $m = 2n + 1$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, assim

$$m^2 = m \cdot m = (2n + 1) \cdot (2n + 1) = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2k + 1,$$

sendo $k = 2n^2 + 2n$. Portanto, m^2 é ímpar quando m for ímpar.

Para mostrar a recíproca, ou seja, que m par implica em m^2 par basta notar que

$$m^2 = m \cdot m = (2 \cdot n) \cdot (2 \cdot n) = 2(2n^2) = 2 \cdot k.$$

■

1.2.6 Os números racionais

Como vimos anteriormente os números naturais e os inteiros são fechados com relação as operações de soma, subtração e produto. Porém, não são fechados com respesito à divisão. Os números racionais, definidos abaixo, corrigem essa deficiência.

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é definido da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ r;\ r = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

As operações de soma e produto em $\mathbb{Q}$ são as seguintes: dados dois números racionais r e s com representações

$$r = \frac{a}{b} \text{ e } s = \frac{c}{d},$$

sendo a, b, c, d inteiros e b, d diferentes de zero definimos:

$$r + s = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \text{ e } r \cdot s = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Exemplo 1.2.4

$$\frac{3}{4} + \frac{-2}{5} = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{7}{20} \text{ e } \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5} \right) = \frac{3 \cdot (-2)}{4 \cdot 5} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$$

Observação 1.2.6

(a) Dado um racional r existe uma infinidade de formas de se escrever $r = a/b$, porém as operações acima independem da escolha das frações que possam representar cada racional. (Verifique.)

(b) As propriedades comutativa, associativa e distributiva enunciadas são válidas em $\mathbb{Q}$;

(c) Podemos também definir a noção de desigualdade:

- dizemos que um número racional $r = p/q$ é positivo se $p \cdot q > 0$;
- dizemos que um número racional $r = p/q$ é neqativo se $p \cdot q < 0$;
- dados $r, s \in \mathbb{Q}$, dizemos que $r > s$ se $r - s > 0$;

1.2.7 Exercícios

1. Verifique quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

   (a) O conjunto $\{-1, 0, 1\}$ é fechado em relação à adição;

   (b) O conjunto $\{-1, 0, 1\}$ é fechado em relação à multiplicação;

   (c) O conjunto $\{-1, 0, 1\}$ é fechado em relação à subtração;

   (d) O conjunto $\{3n + 1,\ n \in \mathbb{Z}, 0, 1\}$ é fechado em relação à multiplicação;

   (d) O conjunto $\{6n + 3,\ n \in \mathbb{Z}, 0, 1\}$ é fechado em relação à adição;

2. Dado um número inteiro a definimos o conjunto de seus múltiplos como sendo o conjunto

$$M_a = \{a \cdot m,\ m \in \mathbb{Z}\}.$$

   O conjunto M_a é fechado em relação à adição? Em relação à multiplicação?

3. Repita a proposição 1.2.2 para o caso de números inteiros.

4. Verifique onde as afirmações da proposição 1.2.1 foram utilizadas na demonstração da proposição 1.2.2.

5. Mostre que as operações de soma e produto são comutativas, associativas e distributivas;

6. A proposição 1.2.2 pode ser aplicada para o conjunto dos naturais ímpares?

1.3 Aula 3 - Os números irracionais

---

1. Respresentação decimal de racionais.

2. Dízimas periódicas e não-periódicas.

3. Existência de números irracionais: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.3.1 Exercícios

1. Expresse cada número decimal como uma fração na forma mais reduzida possível:

   (a) $2,4$

   (b) $-3,6$

   (c) $0,5555\ldots$

   (d) $0,\overline{18}$

   (e) $0,09595\ldots$

   (f) $3,\overline{27}$

   (g) $1,38181\ldots$

   (h) $-4,1\overline{7}$

   (i) $2,472472\ldots$

   (j) $1,6\overline{42}$

   (k) $0,\overline{857142}$

   (l) $1,35135135...$

2. Será que é possível escrever um decimal com um número infinito de algarismos e que não seja uma dízima periódica, seguindo alguma regra para a colocação dos algarismos?

3. Transforme os decimais em frações irredutíveis. Em seguida, reponda a pergunta.

   (a) $2,5$ e $2,4999$

   (b) $1,02$ e $1,01\overline{9}$

   (c) $3,74$ e $3,73999\ldots$

   (d) $5,\overline{9}$ e 6

   (e) O que você observou nas frações dos itens anteriores?

4. Expresse cada número como decimal:

(a) $\frac{7}{10}$ **(c)** $\frac{9}{15}$ **(e)** $-\frac{17}{20}$ **(g)** $-\frac{8}{7}$

(b) $\frac{2}{5}$ **(d)** $-\frac{7}{8}$ **(f)** $\frac{4}{11}$ **(h)** $-\frac{56}{14}$

5. As fórmulas a seguir serão muito úteis. Verifique-as:

   (a) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ **(b)** $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$ **(c)** $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$

6. Determine o valor de x, sabendo que $\dfrac{1}{2-\dfrac{x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}$. (Não é necessário resolver nenhum tipo de equação.)

7. Considere $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n$ (n natural e $a_n \neq 0$) um polinômio com coeficientes inteiros. Seja $r = \frac{p}{q}$ um número racional com p e q primos entre si. Se r é raiz de $f(x)$, é sabido que p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Usando este fato, prove que são irracionais:

   (a) $\sqrt{3}$ **(b)** $\sqrt[4]{5}$ **(c)** $\sqrt{p}$

8. Cortou-se, primeiramente, $\frac{2}{7}$ de um fio. Depois cortou-se $0,6$ do restante. A parte que restou foi dividida em 50 partes iguais, cada uma medindo 16 metros. Calcule o comprimento do fio.

9. Euclides mostrou que há um número infinito de primos usando um argumento muito simples. Ele supôs que houvesse somente um número finito de primos, digamos $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ e então considerou o número $p_1 \cdots p_n + 1$ consistindo do produto de todos esses primos mais 1. Dessa forma, esse número não poderá ser primo, já que é maior que todos os primos listados. Portanto, algum primo p_k da lista acima deve dividi-lo. Obtenha com isso uma contradição.

10. Dados dois números a e b reais e positivos, chama-se *média aritmética* de a e b ao número $\frac{a+b}{2}$ e chama-se *média geométrica* ao número $\sqrt{ab}$. Se $0 < a < b$, mostre que

    (a) $a < \frac{a+b}{2} < b$ **(b)** $a < \sqrt{ab} < b$ **(c)** $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

11. Mostre que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$.

12. Mostre que existem a e b racionais, tais que $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

13. Quais das sentenças abaixo são verdadeiras? Explique sua resposta.

    (a) $3 \in \mathbb{R}$

    (b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

    (c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

    (d) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

    (e) $\sqrt{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

    (f) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

    (g) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

    (h) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

    (i) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

14. Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. Caso não seja verdadeira, apresentar um **contra-exemplo**, ou seja, um exemplo para o qual a afirmação feita é falsa.

    (a) A soma de dois números racionais é sempre racional.

    (b) A soma de um número irracional com um racional é sempre irracional.

    (c) O produto de dois números racionais é sempre racional.

    (d) O produto de dois números irracionais é sempre irracional.

    (e) Um número irracional elevado ao quadrado é sempre irracional.

    (f) A soma de dois números irracionais é sempre irracional.

(g) A raiz quadrada de um número irracional positivo é sempre irracional.

(h) Quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $ab = ac$ então $b = c$.

(i) Quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$, se $ab < ac$ então $b < c$.

(j) Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, se $a < b$ então $a^2 < b^2$.

(k) Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, se $a^2 = b^2$ então $a = b$.

(l) Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, se $a < b$ então $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

15. Efetue as operações indicadas e escreva, em cada caso, se o resultado é um número racional ou irracional.

(a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ **(c)** $\sqrt[7]{3^2} \cdot \sqrt[7]{3^5}$ **(e)** $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$ **(g)** $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$

(b) $7 - \sqrt[3]{5} - (8 - \sqrt[3]{5})$ **(d)** $5 + \sqrt{11} - (3 - \sqrt{11})$ **(f)** $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

16. Prove que:

(a) Um número racional $\dfrac{m}{n}$, com $mdc(m, n) = 1$ (a fração é irredutível), pode ser representado como um decimal finito se, e somente se, $n = 2^j 5^k$, onde $j, k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

(b) Todo número racional $\dfrac{m}{n}$, com $mdc(m, n) = 1$ (a fração é irredutível), e onde $n = Np$, $N \in \mathbb{Z}$, p é um primo, $p \neq 2$ e $p \neq 5$, pode ser representado como uma dízima periódica.

Capítulo 2

Inequações de grau 1

Resumo:

2.1 Aula 4 - Inequações

1. Equações de primeira ordem.
2. Intervalos
3. A relação de ordem $\leqslant$ em $\mathbb{R}$ e algumas propriedades.
4. Primeiras inequações.

2.1.1 Exercícios

1. Resolva as inequações, expressando a solução em forma de intervalo (quando possível).

(a) $x - 1 < 4$

(b) $x(3 - x) < 2$

(c) $-10x + 5 \leqslant x$

(d) $\dfrac{2}{x} - 3 < \dfrac{4}{x} + 1$

(e) $2x - 3 - (x + 2) < \dfrac{1}{3}$

(f) $x - 3 + x - 1 > x - 4$

(g) $x - 2 + x + 3 < x + 1$

(h) $\dfrac{3}{x} < 5$

(i) $x(x - 3)(6 - x) < 0$

(j) $(x + 1)(2x - 3)(x + 5) \geq 0$

(k) $1 - 3x \leqslant 2 - 3x$

(l) $(1 - 3x)(2 - 3x) > 2$

(m) $(4x - 1)(3x + 2)(5x + 1) \leq 0$

2.2 Aula 5 - Inequações envolvendo quocientes

2.2.1 Exercícios

1. Resolva as inequações, expressando a solução em forma de intervalo (quando possível).

(a) $\dfrac{3 - x}{x - 1} < 4$

(b) $\dfrac{x}{3 - x} > 2$

(c) $\dfrac{-10x + 5}{x} \leqslant 1$

(d) $\dfrac{2}{x - 3} < -5$

(e) $\dfrac{2x - 3}{x + 2} \geqslant \dfrac{1}{3}$

(f) $\dfrac{x - 3}{x - 1} > 1$

(g) $\dfrac{x - 2}{x + 3} \geqslant 1$

(h) $\dfrac{3}{x} > 5$

(i) $\dfrac{x - 3}{6 - x} < 0$

(j) $\dfrac{2x - 3}{x + 5} \geq 0$

(k) $\dfrac{1 - 3x}{3} \leqslant 2 - 3x$

(l) $\dfrac{1 - 3x}{2 - 3x} > 2$

(m) $\dfrac{4x - 1}{3x + 2} \geqslant 0$

2.3 Aula 6 - Inequações Modulares

1. O módulo (valor absoluto) de um número real;
2. Equações modulares
3. Inequações modulares

2.3.1 Exercícios

1. Resolva as equações abaixo.

   (a) $|5x-3|=3$;
   (b) $|5x+1|=1$;
   (c) $|5x+1|=-1$;
   (d) $5|x|+6=0$;
   (e) $|2x+5|>2$;
   (f) $x-|5x+6|=0$;
   (g) $x-|2x+1|=2$;
   (h) $|3x+4|=3$;
   (i) $|3x+4|=-x$;
   (j) $|2x-4|=|4x+3|$;
   (k) $|x|-|3x+4|=2x$;
   (l) $3|x|+1=0$;
   (m) $x|x+1|=0$;
   (n) $|4x-1|=3$;
   (o) $|3x+7|=|3x+8|$;

2. Elimine o módulo nas expressões abaixo.

   (a) $f(x)=|3x+1|-|4x-2|$;
   (b) $g(x)=|-2x-2|+3|x-2|$;
   (c) $h(x)=|3x-1|+|3x-2|$;
   (d) $i(x)=|x-1|+|x|+|x+1|$;

3. Resolva as inequações abaixo.

   (a) $|x-7|<9$;
   (b) $|2x+3|\leq 10$;
   (c) $|3x-1|<x$;
   (d) $|x-1|+|x-3|<4x$;
   (e) $\dfrac{1}{|x+1||x-3|}\geq\dfrac{1}{5}$;
   (f) $|5x|>1$;
   (g) $|3x-4|\geq 2$
   (h) $|5x|>1$;
   (i) $|x-1|-|x-3|\geq\dfrac{|x-1|}{2}$;
   (j) $|x-3|>x+1$;
   (k) $|2x+1|<0$;
   (l) $3|x|+1>0$;
   (m) $x|x+1|>0$;
   (n) $|4x-1|\leq 3$;
   (o) $|3x+7|>|3x+8|$;
   (p) $\dfrac{(2x+1)(x-2)}{|3x+4|}\geq 0$;
   (q) $\dfrac{|3x+2|}{4x}\geq 0$;
   (r) $\dfrac{|3x+2|}{4x}\geq 1$;

4. Prove que:

   (a) $|x|\geq 0$;
   (b) $|x|=0$ se, e somente se, $x=0$;
   (c) $|x-y|\leq|x|+|y|$;
   (d) $||x|-|y||\leq|x+y|$;
   (e) Dado $c>0$, tem-se $|x|>c$ se, e somente se, $x<-c$ ou $x>c$.;

5. Mostre que se $|x-6|<1$ então $|x|<7$.
6. Suponha que $|x-8|<2$. Quão grande $|x-5|$ pode ser?

Capítulo 3

Funções

3.1 Aula 7 - O domínio de uma função

1. Domíno e contra-domínio de uma função;
2. resolvendo inequações para determinar um domínio;

3.1.1 Exercícios

3.1.2 Generalidades sobre Funcões

1. Sejam $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Com a tabela

x	y
a	4
e	3
i	3
o	2
u	1

   estabelecemos uma regra entre os elementos de A e B de modo que a cada $x \in A$ colocado na tabela, associa-se o $y \in B$ colocado à sua direita. Verifique se a regra assim estabelecida determina uma função $f : A \to B$.

2. Sabe-se que um triângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro a é retângulo. Se os catetos são x e y, expresse y como função de x. Expresse a área desse triângulo como função de x.

3. Um retângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro a tem lados x e y, sendo que y está sobre o diâmetro a. Expresse y em função de x. Expresse a área do retângulo em função de x.

4. Expresse o lado do quadrado inscrito em um triângulo retângulo ABC, em função da base a e da altura

5. Tico e Teco, torcedores fanáticos de certo time da capital, ganharam de seus tios uns cofrinhos na forma de porquinhos. No de Tico havia R$30,00 e no de Teco R$ 50,00. Os moleques resolveram guardar parte da mesada semanal. Tico prometeu guardar R$ 5,00 por semana e Teco, R$ 3,00.

   (a) Faça uma tabela representando a situação semanal das mesadas de Tico e Teco.
   (b) Determinar as quantias nos cofrinhos em 20 semanas.
   (c) Quando terão quantias iguais?
   (d) Em que semana Tico terá R$ 12,00 a mais que Teco?
   (e) Em que semana Teco terá R$ 12,00 a mais que Tico?
   (f) Em que momento Tico terá o dobro da quantia de Teco?
   (g) Expresse a quantia guardada pelo Tico em função do número n de semanas.
   (h) Expresse a quantia guardada pelo Teco em função do número n de semanas.

3.1.3 Calculos

1. Calcular $f(a)$ sabendo que:

   (a) $a = -1$ e $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

   (b) $a = 0$ e $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{1 - x^2}$;

   (c) $a = \dfrac{7}{2}$ e $f(x) = \dfrac{2}{x}$;

   (d) $a = 1$ e $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 5x + 1}$;

2. Se $f(x) = x^3 + 4x - 3$, calcule:

   (a) $f(1)$; (b) $f(0)$; (c) $f(\frac{1}{2})$; (d) $f(\sqrt{2})$;

3. Seja $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$, calcule:

   (a) $g\left(\dfrac{1}{a}\right)$;

   (b) $\dfrac{1}{g(a)}$;

   (c) $g(a^2)$;

   (d) $[g(a)]^2$;

   (e) $g(\sqrt{a})$;

4. Calcular $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, fazendo as simplificações possíveis, supondo que $x \neq a$, em cada um dos itens a seguir:

   (a) $f(x) = x^2 - 4$; (b) $f(x) = x^3$; (c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; (d) $f(x) = 4x^4$;

5. Se $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

   (a) $f(-x)$; (b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; (c) $f\left(\dfrac{1}{1 - x}\right)$; (d) $f(f(x))$;

6. Uma função f com domínio $A \subset \mathbb{R}$ é *par* se $f(-a) = f(a)$ para todo a em A tal que $-a \in A$, e *ímpar* se $f(-a) = -f(a)$. Determine em cada alternativa abaixo se f é par, ímpar, ou nem par nem ímpar.

   (a) $f(x) = 3x^3 - 4x$;

   (b) $f(x) = 9 - 5x^2$;

   (c) $f(x) = -2$;

   (d) $f(x) = 2x^3 + x^2$;

   (e) $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$;

   (f) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$;

   (g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

   (h) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$;

   (i) $f(x) = |x| + 5$;

   (j) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;

   (k) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

3.1.4 Domínios

1. Determine o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \sqrt{x + 5}$;

   (b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

   (c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x + 2}{x + 1}}$;

   (d) $f(x) = 4\sqrt{\dfrac{-8x + 12}{x + 5}}$;

   (e) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{1 - x}$;

   (f) $f(x) = |3 - x| - 1$;

   (g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

   (h) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$;

2. Seja $f : A \to [0, 1]$. Determine o domínio A, quando f é dada por:

(a) $f(x) = 3x - 1$; (b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$; (c) $f(x) = -x^2 + x + 2$; (d) $f(x) = \dfrac{1-x}{3-x}$;

3.1.5 Teóricos

1. Dada a função $f(x) = x^2 + 1$, calcule $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$;
2. Se $f(x) = ax + b$, calcule $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$;
3. Se $f(x) = x^2$ mostre que $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$;
4. Se $f(x) = ax$ mostre que $f(x) + f(1 - x) = f(1)$ para todo x real. Mostre também que $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ quaisquer que sejam os números reais x_1 e x_2.
5. As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Explique.
6. As funções f e g, cujas regras são dadas respectivamente por
$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$
podem ser iguais? Explique.
7. As funções
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 1 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \end{array}$$
são iguais? Explique.
8. Dada uma função qualquer f, definida em toda a reta (ou num intervalo $]-a, a[$), mostre que a função $g(x) = f(x) + f(-x)$ é par.
9. Uma função f é dita aditiva se o domínio de f é $\mathbb{R}$ e $f(a + b) = f(a) + f(b)$ é verdadeiro para todos os números reais a e b.
   (a) Dê um exemplo de função aditiva.;
   (b) Dê um exemplo de função não-aditiva.;
   (c) Mostre que se f é uma função aditiva, então $f(0) = 0$.;
   (d) Mostre que uma função aditiva deve satisfazer a $f(-x) = -f(x)$;
10. Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ considere as funções $p, q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ e $q(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que p é par e que q é ímpar.
11. Se $f(x) = 4x - 3$ mostre que $f(2x) = 2f(x) + 3$.

3.2 Aula 8 - Gráficos de funções

3.2.1 Exercícios

1. Abaixo temos funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esboce os gráficos destas funções.

(a) $f(x) = 3 - x$;
(b) $f(x) = -10x + 5$;
(c) $f(x) = x + 2$;
(d) $f(x) = 4x - 1$;
(e) $f(x) = |4x - 1|$;
(f) $f(x) = |x| - 1$;
(g) $f(x) = ||x| - 1|$;
(h) $f(x) = |5x - 3|$;
(i) $f(x) = x - |5x + 6|$;
(j) $f(x) = |2x - 4| + |4x + 3|$;
(k) $f(x) = |2x - 4| - |4x + 3|$;
(l) $f(x) = |3x + 1| - |4x - 2|$;
(m) $f(x) = |3x - 1| + |3x - 2|$;
(n) $f(x) = |x - 1| + |x| + |x + 1|$;

2. As funções abaixo estão todas definidas em $\mathbb{R}$. Resolva as inequações.

(a) $f(x) = |x - 7|$ e $f(x) < 9$;
(b) $f(x) = |2x + 3|$ e $f(x) \leq 10$;
(c) $f(x) = |3x - 1|$ e $f(x) < x$;
(d) $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ e $f(x) < 4x$;
(e) $f(x) = \dfrac{1}{|x + 1||x - 3|}$ e $f(x) \geq \dfrac{1}{5}$;
(f) $f(x) = |x - 1| - |x - 3|$ e $f(x) \geq \dfrac{|x - 1|}{2}$;
(g) $f(x) = \dfrac{|3x + 2|}{4x}$e $f(x) \geq 0$;

3. O custo de uma plantação é, normalmente, uma função do número de hectares semeado. O custo do equipamento é um *custo fixo*, pois tem que ser pago independentemente do número de hectares plantado. O custo de suprimentos e mão-de-obra varia com o número de hectares plantados e são chamados de *custos variáveis*. Suponha que os custos fixos sejam de R$ 10.000,00 e os custos variáveis de R$ 200,00 por hectare. Seja C o custo total, calculado em milhares de reais, e x o número de hectares plantados.

(a) Encontre uma fórmula para C em função de x;
(b) Esboce o gráfico de C *versus* x;
(c) Explique como você pode visualizar os custos fixos e variáveis no gráfico;

4. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{2}$ é negativa?

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3x - 1}{4}$. Para que valores do domínio a imagem é menor que 4?

3.3 Aula 9 - Gráficos de funções afim

3.3.1 Exercícios

1. Em cada item a seguir encontre a equação da reta que passa pelo par de pontos.

(a) $(3, 2)$ e $(-2, 4)$;
(b) $(1, 1)$ e $(2, -2)$;
(c) $(-3, -3)$ e $(4, 9)$;
(d) $(-1, -3)$ e $(-2, 5)$
(e) $(0, 0)$ e $(3, 2)$;
(f) $(5, 0)$ e $(0, 5)$;
(g) $(-2, -3)$ e $(5, -7)$;
(h) $\left(\dfrac{1}{5}, 2\right)$ e $\left(\dfrac{5}{2}, -2\right)$;
(i) $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$ e $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$;

2. Determine se a reta passando pelos dois primeiros pontos é paralela à reta passando pelos dois últimos.

(a) $(6, 2)$ e $(0, 2)$; $(5, 1)$ e $(12, 10)$;
(b) $(-2, -4)$ e $(-4, 1)$; $(7, 4)$ e $(-3, 19)$;
(c) $(6, -1)$ e $(11, 1)$; $(5, -2)$ e $(20, 4)$;
(d) $(-1, 4)$ e $(7, 1)$; $(4, 2)$ e $(15, -2)$;

3. Nos itens a seguir encontre a equação da reta que possui inclinação m, e que passa pelo ponto dado.

(a) $m = \dfrac{1}{2}$, $\left(\dfrac{1}{3}, 3\right)$;
(b) $(-2, 5)$, $m = -\dfrac{2}{3}$;
(c) $m = 1$, $(-4, -3)$;
(d) $m = -1$, $(-3, -3)$
(e) $(0, 3)$, $m = -2$;
(f) $(3, 0)$, $m = 2$;
(g) $(-4, 3)$, $m = 0$;
(h) $(1, -3)$, $m = 0$;

4. Nos problemas a seguir, determine o ponto de intersecção das duas retas, se existir, e desenhe os gráficos em cada situação.

   (a) $3x + y - 1 = 0$ e $2x + y - 1 = 0$;
   (b) $-2x + 3y - 6 = 0$ e $-2x + 3y + 3 = 0$;
   (c) $-2x + 5y + 30 = 0$ e $5x + 2y - 2 = 0$;
   (d) $-x + y - 2 = 0$ e $x + y - 2 = 0$
   (e) $y - 3x = 0$ e $y - 3x + 1 = 0$;
   (f) $y + x + 1 = 0$ e $2y + 2x + 1 = 0$;

5. O gráfico de uma função linear, f, tem coeficiente angular $m = 2$. Se $(-1, 3)$ e $(c, -2)$ pertencem ambos ao gráfico de f, encontre o número c.

6. Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(2, 1)$ e que é perpendicular à reta $y = 5x + 3$.

7. Encontre a equação das retas paralela e perpendicular à reta $y + 4x = 7$ e que passa pelo ponto $(1, 5)$.

8. Pimentas picantes foram graduadas de acordo com as unidades de Scoville, em que o nível máximo de tolerância humana é de 14.000 Scovilles por prato. O Restaurante Costa Oeste, conhecido por seus pratos picantes, promete um prato especial do dia, que irá satisfazer ao mais ávido aficcionado por pratos apimentados. O restaurante importa pimentas indianas, graduadas em 1.200 Scovilles cada, e pimentas mexicanas, com uma graduação de 900 Scovilles cada.

   (a) Determine a equação de restrição de Scoville, relacionando o número máximo de pimentas indianas e mexicanas que o restaurante deve utilizar na composição do prato especial;
   (b) Resolva a equação da parte (a) obtenha, explicitamente, o número de pimentas indianas usadas nos pratos mais picantes em função do número de pimentas mexicanas.;

3.4 Aula 10 - Funções Injetivas e Sobrejetivas

3.4.1 Exercícios

1. Classifique as funções seguintes como injetora, sobrejetora, bijetora ou nem injetora nem sobrejetora.

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1$;
   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$;
   (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $h(x) = |x - 1|$;
   (d) $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $m(x) = 3x + 2$;
   (e) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = |x|(x - 1)$;
   (f) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^3$;

2. Seja $f : A \to [-9, -1[$ dada por $f(x) = \dfrac{3 + 4x}{3 - x}$. Pede-se:

   (a) Determinar A;
   (b) Mostrar que f é injetora.;
   (c) Verificar se f é sobrejetora.

3. Seja $f : A \to]1, 10]$ dada por $f(x) = \dfrac{4 - 11x}{4 - 2x}$. Pede-se:

   (a) Determinar A;
   (b) Mostrar que f é injetora.;
   (c) Verificar se f é sobrejetora.

3.5 Aula 11 - Funções quadráticas

1. Definição e primeiros exemplos;

2. Alguns gráficos;

3.5.1 Exercícios

Exercício 3.5.1 *Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. Caso não seja verdadeira, apresentar um* **contra-exemplo**, *ou seja, um exemplo para o qual a afirmação feita é falsa.*

(a) *Quaisquer que sejam* $a, b \in \mathbb{R}$, *se* $a < b$ *então* $a^2 < b^2$.

(b) *Quaisquer que sejam* $a, b \in \mathbb{R}$, *se* $a^2 = b^2$ *então* $a = b$.

(c) *Qualquer que seja* $a \in \mathbb{R}$ *positivo, temos que* $a^2 > a$.

Exercício 3.5.2 *Classifique as funções seguintes como injetora, sobrejetora, bijetora ou nem injetora nem sobrejetora.*

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 2x - 1$;

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *tal que* $g(x) = 1 - x^2$;

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *tal que* $h(x) = |x - 1|$;

(d) $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $m(x) = 3x + 2$;

(e) $p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ *tal que* $p(x) = \dfrac{1}{x}$ *(onde* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$*)*;

(f) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $q(x) = x^3$;

(g) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $r(x) = |x|(x - 1)$;

Exercício 3.5.3 *Determine o menor valor de* b *em* $B = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq b\}$ *de modo que a função* $f : \mathbb{R} \to B$ *definida por* $f(x) = x^2 - 4x + 6$ *seja sobrejetora.*

Exercício 3.5.4 *Expresse o lado do quadrado inscrito em um triângulo retângulo* ABC, *em função da base* a *e da altura* h.

Exercício 3.5.5 *Um retângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro* a *tem lados* x *e* y, *sendo que* y *está sobre o diâmetro* a. *Expresse* y *em função de* x. *Expresse a área do retângulo em função de* x.

Exercício 3.5.6 *Sabe-se que um triângulo inscrito na semi-circunferência de diâmetro* a *é retângulo. Se os catetos são* x *e* y, *expresse* y *como função de* x. *Expresse a área desse triângulo como função de* x.

Exercício 3.5.7 *Considerando que a resistência elétrica* R *(em Ohms) para um fio de metal puro está relacionado com a temperatura* T *(em* ^oC*) pela fórmula* $R = R_0(1 + \alpha T)$ *onde* α, R_0 *são constantes positivas, pede-se:*

(a) *Para que temperatura tem-se que* $R = R_0$?;

(b) *Se a resistência é considerada* 0 *para* $T = -273°C$, *determine o valor de* α.;

(c) *Se a prata tem resistência* $1,25$ *ohms a* $0°C$ *a que temperatura sua resistência atinge* $2,0$ *ohms?*

Exercício 3.5.8 *As dosagens para adultos e para crianças devem ser especificadas nos produtos farmacêuticos. Duas das fórmulas para se especificar as dosagens para crianças a partir das dosagens para adultos são a de Cowling, dada por* $y = \dfrac{1}{24}(t + 1)\alpha$ *e a de Friend, dada por* $y = \dfrac{2}{25}t\alpha$ *onde* α *representa a dosagem para adulto, em* mg, *e* t *representa a idade da criança, em anos.*

(a) *Se* $\alpha = 100mg$, *represente graficamente as expressões das dosagens infantis usando as fórmulas de Cowling e de Friend.*;

(b) *Para que idade as duas fórmulas especificam a mesma dosagem?*;

3.6 Aula 12 - Funções quadráticas

1. Exitência de zeros;

3.6.1 Exercícios

Exercício 3.6.1 *Use a fórmula para a solução da equação quadrática para resolver as seguintes equações:*

(a) $5x^2 + 6x - 1 = 0$;

(b) $2x^2 = 18x + 5$;

(c) $x(2x - 3) = 2x - 6$;

(d) $6x^2 - 7x + 2 = 0$;

(e) $\pi u^2 + (\pi^2 - 1)u - \pi = 0$;

(f) $x(x - \sqrt{2} + 4) = 4(x + 1)$;

(g) $x^2 - 6ax + 3a^2 = 0$;

Exercício 3.6.2 *Determine os valores de K para os quais as equações terão raízes reais e iguais.*

(a) $5x^2 - 4x - (5 + K) = 0$;

(b) $(K + 2)x^2 + 3x + (K + 3) = 0$;

(c) $x^2 + 3 - K(2x - 2) = 0$;

(d) $(K + 2)x^2 + 5Kx - 2 = 0$;

(e) $x^2 - x(2 + 3K) + 7 = 0$;

(f) $x(x - \sqrt{2} + 4) = 4(x + 1)$;

(g) $(K - 1)x^2 + 2x + (K + 1) = 0$;

Exercício 3.6.3 *Prove as* relações de Girard *para equações do segundo grau: se $ax^2 + bx + c = 0$ possui raízes x_1 e x_2, então $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.*

Exercício 3.6.4 *Mostre que uma equação do segundo grau que tem x_1 e x_2 como raízes é a equação $x^2 - Sx + P = 0$, onde $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.*

Exercício 3.6.5 *Obtenha uma equação do segundo grau que possua as raízes:*

(a) 2 e 3;

(b) $\dfrac{1}{2}$ e $-\dfrac{3}{2}$;

(c) $0,4$ e 5;

(d) 1 e $-\sqrt{2}$;

(e) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$;

Exercício 3.6.6 *Determinar os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m$ tenha dois zeros reais e distintos.*

Exercício 3.6.7 *Determinar os valores de m para que a equação do segundo grau $(m + 2)x^2 + (3 - 2m)x + (m - 1) = 0$ tenha raízes reais.*

Exercício 3.6.8 *Determinar os valores de m para que a função $f(x) = mx^2 + (m+1)x + (m+1)$ tenha um zero real duplo.*

Exercício 3.6.9 *Determinar os valores de m para que a equação $mx^2 + (2m-1)x + (m-2) = 0$ não tenha raízes reais.*

Exercício 3.6.10 *Determine m na função $f(x) = 3x^2 - 4x + m$ de modo que se tenha $Im(f) = [2, +\infty[$.*

Exercício 3.6.11 *Para as seguintes funções f, encontre o discriminante (Δ) de $f(x) = 0$ e determine se as raízes são reais e diferentes, reais e iguais, ou não existem. Esboce o gráfico de $f(x)$ sem desenhar mais de quatro pontos.*

(a) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$;

(b) $f(x) = x^2 + x + 1$;

(c) $f(x) = 4x^2 - x - 5$;

(d) $f(x) = 7x^2 - 5x - 2$;

(e) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \dfrac{1}{4}$;

(f) $f(x) = x^2 - ax - 1$;

(g) $f(x) = 3x^2 + \pi x + 4$;

(h) $f(x) = x^2 - 2ax + a^2$;

(i) $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3}$;

(j) $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$;

Exercício 3.6.12 *Obtenha as soluções dos sistemas abaixo:*

$$(a)\ \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} 2x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x + 4 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x^2 + x + 8 < 0 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \end{cases}$$

Exercício 3.6.13 *Suponha que x_1 e x_2 sejam raizes da equação $x^2 + x - 7 = 0$. Sem resolver esta equação obtenha os valores*

(a) $x_1^2 + x_2^2$

(b) $x_1^3 + x_2^3$

(c) $x_1^4 + x_2^4$

Exercício 3.6.14 *Para quais valores $a \in \mathbb{R}$ a seguinte equação possui mais do que duas raízes?*

$$(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a - a^2 = 0$$

Exercício 3.6.15 *Para quais valores $a \in \mathbb{R}$ a seguinte equação possui raízes de sinais opostos?*

$$2x^2 - (a^3 + 8a - 1)x + a^2 - 4a = 0$$

Exercício 3.6.16 *Obtenha os valores para m para os quais as raízes da equação $2x^2 + mx + m^2 - 5 = 0$ são menores o que 1.*

Exercício 3.6.17 *Resolva as seguintes equações.*

(a) $x^2 - |x| - 2 = 0$;

(b) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$;

(c) $2x^2 - |5x - 2| = 0$;

(d) $|x^2 + x - 6| = x^2 + x - 6$;

(e) $|x^2 - 1| = x + 3$;

(f) $|x^2 - 1| = |x + 3|$;

Exercício 3.6.18 *Observe como fazemos para completar os quadrados das funções $p(x) = x^2 + 2x + 10$ e $q(x) = x^2 - x$.*

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + 2x + 10 \\ p(x) &= x^2 + 2x + 1 - 1 + 10 \\ p(x) &= (x+1)^2 + 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p(x) &= x^2 - x \\ p(x) &= x^2 - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ p(x) &= x^2 - x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} \\ p(x) &= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Utilize essa idéia para completar os quadrados das funções:

(a) $p(x) = x^2 + 5x + 2;$
(b) $p(t) = -3t^2 - 5t + 1;$
(c) $p(x) = x^2 + 3x;$
(d) $p(x) = x^2 + 4bx + c;$
(e) $p(x) = \pi(x^2 - 2x);$
(f) $p(x) = 4x^2 + 12x + 10;$
(g) $p(x) = ax^2 + bx + c;$

Exercício 3.6.19 *Resolva as seguintes equações completando os quadrados:*

(a) $3x^2 + 6x - 1 = 0;$
(b) $3x(3x - 2) = 6x - 5$;
(c) $y^2 - 15y - 4 = 0;$
(d) $6u^2 + 7u - 3 = 0;$
(e) $x^2 - 2x + 9 = 0$;
(f) $p(2p - 4) = 5;$
(g) $(3x-2)^2+(x+1)^2 = 0;$

Exercício 3.6.20 *Resolva as inequações abaixo.*

(a) $|2x^2 + 3x + 3| \leq 3$
(b) $\dfrac{1}{|x+1||x-3|} \geq \dfrac{1}{5}$
(c) $\dfrac{(x+1)(2x-3)}{x+5} \geq 0$
(d) $\dfrac{|x-1|(x^2-2)}{x-1} > 0;$
(e) $\dfrac{(x^2+1)(x^4+1)}{(x^2+2)(x^6+6)} > 0;$
(f) $\dfrac{6 - x - x^2}{(x^2+x+1)(x+4)(x-6)^2} \geq 0;$
(g) $\dfrac{(x^2-5x+4)(x+2)}{(x^2+3)(2x+1)} \geq 0;$
(h) $\dfrac{2x^2 - x - 3}{x+2} < 0;$
(i) $\dfrac{-2x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x - 4} > 0;$
(j) $\dfrac{3x-4}{x^2-2x+1} \leq 0;$
(k) $\dfrac{3x+5}{-2x^2+5x+3} \geq 0;$
(l) $\dfrac{-x^2+5x-6}{x^2+x-2} \leq 0;$
(m) $\dfrac{x^2+4x-1}{x+3} > 1;$
(n) $\dfrac{3x^2+3x-1}{2x-1} \geq x;$

Exercício 3.6.21 *Em cada item, encontre o conjunto S das soluções reais da equação ou inequação dada.*

(a) $|x^2 - 5x - 3| \leq 3;$
(b) $|2x^2 + 5x + 1| = 1;$
(c) $|2x^2 + 5x + 1| = -1;$
(d) $|x^2 - 1| \geq 2x;$
(e) $|-x^2 + 2x + 5| > 2;$
(f) $x^2 - |5x + 6| = 0$
(g) $|2x^2 - 6| = x$

Exercício 3.6.22 *Esboce o gráfico das funções reais abaixo:*

(a) $f(x) = |x^2 - 5x - 3|;$
(b) $f(x) = |2x^2+5x+1|;$
(c) $f(x) = |x^2 - 1|;$
(d) $f(x) = x^2 - |5x + 6|$

Exercício 3.6.23 *Nos itens a seguir, determine para quais valores de x o trinômio é maior que zero, e para quais valores de x é menor que zero.*

(a) $x^2 - 2x - 3;$
(b) $x^2 + x - 42;$
(c) $2x^2 - x - 1;$
(d) $x^2 - 9;$
(e) $16x^2 - 2x;$
(f) $x^2 + 3x$
(g) $x^2 + x + 1$

Exercício 3.6.24 *Determine o domínio das seguintes funções*

(a) $f(x) = \sqrt{x+5};$
(b) $f(x) = \sqrt{4-x^2};$
(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+2}{x+1}};$
(d) $f(x) = 4\sqrt{\dfrac{-8x+12}{x+5}};$
(e) $f(x) = \sqrt{5+4x-x^2}$;
(f) $f(x) = \sqrt{x-x^3};$
(g) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}};$
(h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}}$

Exercício 3.6.25 *Seja $f: A \to \mathbb{R}_+$. Determine o domínio A para as seguintes funções:*

(a) $f(x) = 3x + 1;$
(b) $f(x) = x^2 - 5x + 6;$
(c) $f(x) = \dfrac{2x-5}{1-x};$
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4};$
(e) $f(x) = |3 - x| - 1$;
(f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{10}};$

Exercício 3.6.26 *Construir o gráfico e determinar o conjunto imagem das seguintes funções:*

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad -1 \le x \le 1 \\ -2 & se \quad x < -1 \ ou \ x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & se \quad x \neq -2 \\ 3 & se \quad x = -2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & se \quad 0 \le x < 2 \\ -x^2+9 & se \quad 2 \le x \le 3 \\ -1 & se \quad x < 0 \ ou \ x > 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & se \quad -2 \le x \le 0 \\ x^2-2x+1 & se \quad 0 < x \le 2 \\ -1 & se \quad x < -2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} -|x+2| & se \quad 0 \le x \le 2 \\ -x^2-4x & se \quad -2 \le x < 0 \\ -4 & se \quad x < -2 \ ou \ x > 2 \end{cases}$

Exercício 3.6.27 *Determinar os vértices e a imagem das parábolas*

(a) $y = 4x^2 - 4$;

(b) $y = -x^2 + 3x$;

(c) $y = 2x^2 - 5x + 2$;

(d) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$;

(e) $y = -x^2 + x - \frac{2}{9}$;

(f) $y = x^2 - \frac{7}{3}x - 2$;

Exercício 3.6.28 *Qual deve ser o valor de c para que o vértice da parábola $y = x^2 - 8x + c$ esteja sobre o eixo dos x?*

Exercício 3.6.29 *Qual deve ser o valor de k para que $y = 2x^2 - kx + 8$ tenha duas raízes reais e iguais?*

Exercício 3.6.30 *Se a distância de frenagem d (em metros) de um carro a velocidade de c km/h é dada, aproximadamente, por $d = v + \frac{v^2}{20}$, para quais velocidades o espaço de frenagem é inferior a $20m$?*

Exercício 3.6.31 *Construa o gráfico das funções abaixo (todas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$)*

(a) $f(x) = x^2 - |x| - 2$;

(b) $f(x) = 2x^2 - |5x - 2|$;

(c) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$;

(d) $f(x) = |2x^2 - 5x + 2|$;

(e) $f(x) = \begin{cases} -2x, \ se \ x < -2 \\ x^2 - x - 6, \ se \ 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ \frac{x}{3} - 1, \ se \ x > 3 \end{cases}$

3.7 Aula 13 - Funções quadráticas

1. Máximos e mínimos;

3.7.1 Exercícios

Exercício 3.7.1 *Obtenha os pontos de máximo das funções abaixo nos intervalos indicados*

(a) $f(x) = 3x^2 - x + 5$ *no intervalo* $[1, 2]$;

(b) $f(x) = -4x^2 + 5x - 8$ *no intervalo* $[2, 3]$;

(c) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ *no intervalo* $[-1, 2]$;

(d) $f(x) = -x^2 + 6x - 1$ *no intervalo* $[0, 4]$;

Exercício 3.7.2 *Obtenha os pontos de máximo (ou de mínimo) das funções abaixo*

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 1$;

(b) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;

(c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x$;

(d) $f(x) = |x^2 + 2x + 6|$;

(e) $f(x) = x^2 + 1$;

(f) $f(x) = -3x^2 - 4$;

Exercício 3.7.3 *Um arame de comprimento ℓ deve ser cortado em dois pedaços. Um pedaço será usado para formar um círculo, e outro, um quadrado. Onde se deve cortar o arame, para que a soma das áreas das figuras seja a menor possível?*

Exercício 3.7.4 *Dentre todos os números reais x e z tais que $2x + z = 8$ determine aqueles cujo produto é máximo.*

Exercício 3.7.5 *Dentre todos os números de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.*

Exercício 3.7.6 *Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e o vértice que está fora dos eixos pertencente à reta $y = -4x + 5$.*

Exercício 3.7.7 *Determine o maior valor de a em $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$ de modo que a função $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ seja injetora.*

3.8 Aula 14 - 15 - 16 - Polinômios

3.8.1 Exercícios

Exercício 3.8.1 *Se $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + x^4$ e $h(x) = x^2 + x^4 + x^6$ e $k(x) = 3x^6 - 6x^4 + 2x^2$ encontre números reais a, b e c tais que $k = af + bg + ch$.*

Exercício 3.8.2 *Em cada caso, determine (caso exista) um polinômio do segundo grau $f(x)$ de modo que:*

(a) $f(0) = 1$, $f(1) = 4$ e $f(-1) = 0$;

(b) $f(1) = 0$ e $f(x) = f(x-1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

Exercício 3.8.3 *Nos itens a seguir, fatore o polinômio o máximo possível (utilizando apenas termos reais).*

(a) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$;

(b) $p(y) = 2y^3 + 3y^2 - 8y + 3$;

(c) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 2$;

(d) $p(x) = x^4 - 5x^2 - 10x - 6$;

(e) $p(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 12$;

(f) $p(x) = x^4 - 1$;

(g) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 8x$;

(h) $p(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$;

(i) $p(x) = x^2 - 3$;

(j) $p(x) = -2x^4 + 7x^2 - 3$;

Exercício 3.8.4 *Determine os números a e b de modo que o polinômio $f(x) = x^4 - 3ax^3 + (2a - b)x^2 + 2bx + (a + 3b)$ seja divisível por $g(x) = x^2 - 3x + 4$.*

Exercício 3.8.5 *Determinar p e q de modo que $x^4 + 1$ seja divisível por $x^2 + px + q$.*

Exercício 3.8.6 *Se $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + ax + b$ e por $x^2 + rx + s$ prove que $b = -r(a + r)$.*

Exercício 3.8.7 *Determinar a de modo que a divisão de $x^4 - 2ax^3 + (a+2)x^2 + 3a + 1$ por $x - 2$ tenha resto 7.*

Exercício 3.8.8 *Determinar um polinômio do terceiro grau que se anula em $x = 1$ e que dividido por $x + 1$, $x + 2$ e $x - 2$ tenha resto 6.*

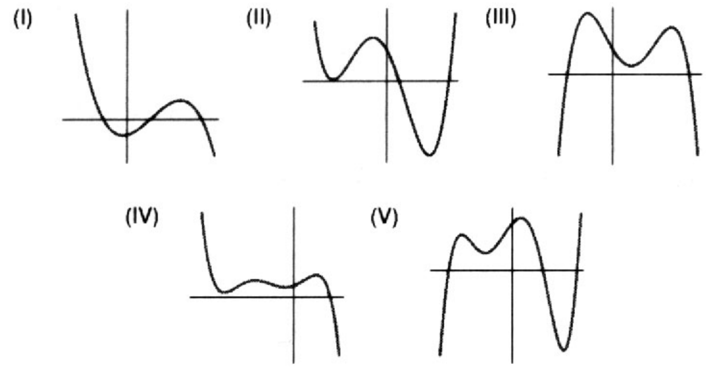
Exercício 3.8.9 *Qual deve ser o valor do coeficiente c para que os restos da divisão de $x^{10} + ax^4 + bx^2 + cx + d$ por $x + 12$ e $x - 12$ sejam iguais?*

Exercício 3.8.10 *As divisões de um polinômio $f(x)$ por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 3$ são exatas. O que se pode dizer do grau de f?*

Exercício 3.8.11 *O gráfico de cada uma das figuras abaixo representa um polinômio. Para cada um deles determine:*

(a) *Qual o menor grau possível do polinômio?*

(b) *O coeficiente líder do polinômio é positivo ou negativo? (O coefciente líder é o coeficiente da potência mais alta de x.)*



Exercício 3.8.12 *Esboce o gráfico dos seguintes polinômios:*

(a) $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$;

(b) $f(x) = 5(x^2-4)(x^2-25)$;

(c) $f(x) = -5(x^2-4)(25-x^2)$;

(d) $f(x) = 5(x-4)^2(x^2-25)$;

Exercício 3.8.13 *Se $f(x) = ax^2+bx+c$, o que você pode dizer de a, b e c se:*

(a) $(1,1)$ *está no gráfico de* $f(x)$*?*

(b) $(1,1)$ *é o vértice do gráfico de* $f(x)$*?*

(c) *A intersecção do gráfico com o eixo dos y é (0,6)?*

(d) *Encontre uma função quadrática que satisfaça todas as três condições anteriores.*

Exercício 3.8.14 *Encontre um polinômio cujas raízes sejam -2, -1, 1 e 4, todas com multiplicidade 1.*

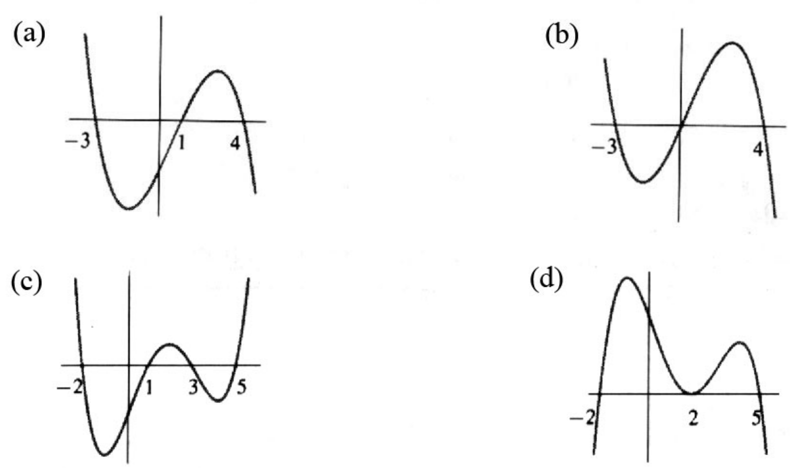
Exercício 3.8.15 *Em cada caso, encontre um polinômio com coeficientes inteiros cujas raízes sejam:*

(a) $\sqrt{2}+1$ e $\sqrt{2}-1$;

(b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

(c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

Exercício 3.8.16 *Para cada um dos itens a seguir: encontre uma possível fórmula para o gráfico; obtenha os intervalos aproximados onde a função é crescente e onde é decrescente.*



Exercício 3.8.17 *Encontre os polinômios cúbicos que representam o gráfico de:*

Exercício 3.8.18 *Encontre todas as raízes racionais dos seguintes polinômios*

(a) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$;

(b) $f(x) = x^3 + 8$;

(c) $f(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{6}$;

(d) $f(x) = 3x^4 - 7x^2 + 2$;

Exercício 3.8.19 *Quais as possíveis raízes inteiras da equação* $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$?

Exercício 3.8.20 *Resolva a equação* $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

3.9 Aula 17 - 18 Função exponencial

3.9.1 Exercícios

Exercício 3.9.1 *Nos itens a seguir, escreva a expressão dada na forma* p/q, *onde* p *e* q *são números inteiros. Por exemplo:*

$$4^{\frac{1}{2}} + 4^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

(a) $\dfrac{3^{-2}}{2^{-3}}$;

(b) $\dfrac{1}{2^{-1}}$;

(c) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}$;

(d) $\dfrac{2^0}{3^{-2}}$;

(e) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$;

(f) $\dfrac{5^{-1}}{3^{-2}}$;

(g) $(-8)^{-\frac{1}{3}}$;

(h) $16^{-\frac{1}{4}}$;

(i) $3^{-2} + 3$;

(j) $5^{-1} + 25^0$;

Exercício 3.9.2 *Nos problemas a seguir, calcule o fator* A. *Por exemplo, se* $y^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = Ay^{-\frac{1}{2}}$ *encontramos* $A = 1 + y$. *Confira:*

$$Ay^{-\frac{1}{2}} = (1+y)y^{-\frac{1}{2}} = y^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}.$$

(a) $y^{\frac{3}{4}} = Ay^{\frac{1}{4}}$;

(b) $x^{\frac{3}{5}} = Ax^{\frac{1}{5}}$;

(c) $x^{-\frac{1}{3}} = Ay^{-\frac{2}{3}}$;

(d) $y^{-\frac{1}{4}} = Ay$;

(e) $y^{\frac{1}{2}} + y = Ay$;

(f) $x^{\frac{2}{3}} + x = Ax$;

(g) $x - x^{\frac{2}{3}} = Ax^{\frac{1}{3}}$;

(h) $a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = Aa$;

(i) $x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{2}} = Ax^{\frac{3}{2}}$;

(j) $x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = Ax^{-\frac{1}{2}}$;

Exercício 3.9.3 *Escreva cada uma das expressões, a seguir, racionalizando o denominador e simplificando onde seja possível. Por exemplo:*

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y},$$

onde assumimos que $x \neq y$

(a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$;

(b) $\dfrac{-4}{1+\sqrt{3}}$;

(c) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

(d) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

(e) $\dfrac{\sqrt{x+a}}{1-\sqrt{x+a}}$;

(f) $\sqrt{x+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$;

(g) $\sqrt{x^2-2}-\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-2}}$;

(h) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;

(i) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;

Exercício 3.9.4 *Considere $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^4$ e $g(x) = 4^x$. Pede-se:*

(a) Faça um esboço do gráfico das duas funções num mesmo sistema de coordenadas.;

(b) Determine os pontos de interseção do gráfico das duas funções;

(c) Determine graficamente os valores de x para os quais $g(x) > f(x)$;

Exercício 3.9.5 *Resolva o seguinte sistema*

$$\begin{cases} 2^{x-2y} &= \dfrac{1}{8} \\ 3^{xy} &= 9 \end{cases}$$

Exercício 3.9.6 *Resolva as equações:*

(a) $(0,533\ldots)^x = \dfrac{225}{64}$;

(b) $\sqrt[5]{32} = 2$;

(c) $27 = 3^{5x} \cdot 9^{x^2}$;

(d) $(0,4)^x + (0,6)^x = 2 \cdot (0,9)^x$;

(e) $\dfrac{25^x + 125}{6} = 5^{x+1}$;

(f) $4^{2^{8^x}} = 256$;

(g) $2^x + \dfrac{4}{2^x} = 5$;

(h) $\dfrac{625^{1-x} \cdot 5}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^x} = \sqrt{5 \cdot 25}$;

(i) $\dfrac{(11^{3x+1})^2}{11^4} = 11^{10x}$;

Exercício 3.9.7 *Resolva as seguintes equações. Uma calculadora e o uso de logaritmos podem ser necessários.*

(a) $4^x = 7$;

(b) $5^{x+1} = 9$;

(c) $6^{2x+3} = 354$;

(d) $x^5 = 873$;

(e) $x^4 = 687$;

(f) $x^{7/2} = 51,4$;

(g) $2 = (1,02)^t$;

(h) $7 \cdot 3^t = 5 \cdot 2^t$;

(i) $5,02(1,04)^t = 12,01(1,03)^t$;

Exercício 3.9.8 *Resolva para x:*

(a) $3^x = 6^{x+3}$;

(b) $7^x = 2^{2x-1}$;

(c) $2^{x-1} = 5^{2x+1}$;

(d) $8^{x+2} = 3^{3x-1}$;

(e) $y = 2^{3x}$;

(f) $10y = 10^x$;

3.10 Aula 19 - Função inversa - Função log

3.10.1 Exercícios

Exercício 3.10.1 *Nos itens a seguir, decida se a função f é inversível ou não:*

(a) $f(d)$ é o total de litros de combustível consumido por um avião ao final de d minutos de um determinado vôo.;

(b) $f(t)$ é o número de clientes presentes nas Lojas Americanas, t minutos após o meio-dia de 29 de março de 2006.;

(c) $f(x)$ é o volume, em litros, de x quilogramas de água a 4 °C.;

(d) *$f(w)$ é o custo, em reais, de se remeter uma carta que pesa w gramas.;*

(e) *$f(n)$ é o número de alunos de uma turma de Cálculo, cujos aniversários caem no n-ésimo dia do ano.*

Exercício 3.10.2 *Seja $f(x)$ a temperatura (em $^\circ C$) quando a coluna de mercúrio de um dado termômetro mede x centímetros. Em termos práticos, qual é o significado de $f^{-1}(C)$?*

Exercício 3.10.3 *Faça uma tabela para os valores de f^{-1}, onde a f é dada abaixo. O domínio de f são os naturais de 1 a 7. Especifique o domínio de f^{-1}.*

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	3	-7	19	4	178	2	1

Exercício 3.10.4 *Seja $f :]-\infty, -1] \to [1, +\infty[$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ qual elemento do domínio de f^{-1} possui imagem 3?*

Exercício 3.10.5 *Seja f a função definida por $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ para $x \geq 0$. Mostre que f é a sua própria inversa.*

Exercício 3.10.6 *Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, onde $x \geq 1$, obter uma expressão para sua inversa, o domínio dessa inversa e representar f e f^{-1} graficamente.*

Exercício 3.10.7 *Dada a função*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ |x| & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

verificar se ela é inversível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa.

Exercício 3.10.8 *A função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x+2| + |x-1|$ admite inversa?*

Exercício 3.10.9 *Resolva a expressão $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 9x + 20} = 1$.*

Exercício 3.10.10 *Determine o menor valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq b\}$ de modo que a função $f : \mathbb{R} \to B$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ seja sobrejetora.*

Exercício 3.10.11 *Determine o maior valor de a em $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$ de modo que a função $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ seja injetora.*

Exercício 3.10.12 *Para cada uma das funções a seguir, obtenha a expressão para a sua inversa.*

(a) $f(x) = 2x + 3$;

(b) $f(x) = ax + b \quad a \neq 0$;

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$;

(e) $f(x) = \sqrt{x-4}$;

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$;

(g) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$;

(h) $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$;

(i) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$;

Exercício 3.10.13 *Determine a função inversa de cada uma das funções abaixo.*

(a) $f(x) = 8 + 11x$;

(b) $f(x) = 2x^3 - 5$;

(c) $f(x) = 7 - 3x^3$;

(d) $f(x) = x$;

(e) $f(x) = (x^3 + 8)^5$;

(f) $f(x) = x^{1/3} + 2$;

Exercício 3.10.14 *Seja $f : A \to]-4, 1]$ dada por $f(x) = \dfrac{10 + 3x}{10 - 2x}$. Pede-se:*

(a) *Determinar A;*

(b) *Mostrar que f é injetora.;*

(c) *Verificar se f é sobrejetora.;*

(d) *Suponha que f é inversível e crescente. O que se pode dizer a respeito de sua inversa ser crescente ou decrescente?*

(e) *Se uma função f é inversível e côncava para cima, o que se pode dizer a respeito da concavidade de sua inversa?*

Exercício 3.10.15 *Dada a função* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}$, $x \neq 1$, *determinar:*

(a) *Sua função inversa* f^{-1};

(b) *O conjunto Im*(f);

Exercício 3.10.16 *Dada a função* $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{4 - x^2}$, $x \geq 0$, *pede-se:*

(a) *Mostrar que f é injetora.;*

(b) *Determinar a função inversa* f^{-1};

(c) *Determinar o conjunto Im*(f);

Exercício 3.10.17 *Determinar, se existir, a função inversa de cada uma das funções a seguir:*

(a) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$, *onde* $x \in]\frac{1}{3}, +\infty[$.;

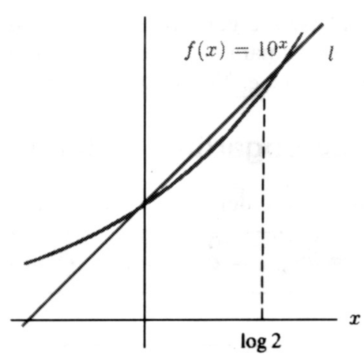
(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, *onde* $x \in]-\infty, -2[$;

(c) $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$, *onde* $x \in [-2, 1]$;

Exercício 3.10.18 *Determine os valores inteiros de x e y que satisfazem a equação* $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$

Exercício 3.10.19 *Encontre a função inversa de* $f(x) = 50e^{0,1x}$.

Exercício 3.10.20 *Encontre a equação da reta l da figura a seguir*



Exercício 3.10.21 *Simplifique o máximo possível as expressões:*

(a) $\log A^2 + \log B - \log A - \log B^2$;

(b) $\log(10^{x+7})$;

(c) $10^{\log A^2}$;

(d) $10^{2 \log Q}$;

(e) $10^{-\log P}$;

(f) $10^{-(\log B)/2}$;

(g) $\dfrac{\log A^2 - \log A}{\log B - \frac{1}{2}\log B}$;

(h) $2\log\alpha - 3\log B - \dfrac{\log\alpha}{2}$;

Exercício 3.10.22 *Resolva para x: (aqui $\log x = \log_{10} x$)*

(a) $\log(3x-1) - \log(x+2) = 2$;

(b) $\log(x-\sqrt{6}) + \log(x+\sqrt{6}) = 1$;

(c) $\log(x^2-1) - \log(x+1) = 1$;

(d) $\log(x^2-4) - 2\log(x-2) = 2$;

Exercício 3.10.23 *Nos itens a seguir, encontre o valor da expressão dada:*

(a) $\log_3 81$;

(b) $\log_4 16$;

(c) $\log_2 16$;

(d) $\log_2\left(\dfrac{1}{32}\right)$;

(e) $\log_3\left(\dfrac{1}{27}\right)$;

(f) $\log_4\left(\dfrac{1}{64}\right)$;

(g) $\log_2 1$;

(h) $\log_7\left(\dfrac{1}{49}\right)$;

(i) $\log_{13} 13$;

(j) $\log_{\frac{1}{2}} 8$;

(k) $\log_{\frac{1}{6}} 216$;

(l) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{1}{64}\right)$;

Exercício 3.10.24 *Sabendo que $a > 0$, simplifique as expressões dadas:*

(a) $\log_a a^{-x}$;

(b) $a^{-\log_a x}$;

(c) $a^{x+\log_a x}$;

(d) $\log_a(xa^{2x})$;

(e) $a^{-\log_a x^2}$;

(f) $a^{\log_a a^x}$;

(g) $\log_a(a^{\log_a a})$;

(h) $a^{2\log_a 3}$;

(i) $\log_a(x^2a^x)$;

(j) $\log_a(a^{x^2-2x})$;

(k) $a^{\log_a(a^x)}$;

(l) $a^{2\log_a x}$;

Exercício 3.10.25 *Determine x em cada item:*

(a) $\log_5 x = 3$;

(b) $\log_2 x = 10$;

(c) $\log_{10} x = \dfrac{1}{2}$;

(d) $\log_{10} x = 1$;

(e) $\log_{16} x = \dfrac{1}{4}$;

Exercício 3.10.26 *Determine a em cada item:*

(a) $\log_a 216 = 3$;

(b) $\log_a 625 = 4$;

(c) $\log_a \sqrt{a} = \dfrac{1}{2}$;

(d) $\log_a \dfrac{1}{49} = -2$;

(e) $\log_a 2 = \dfrac{1}{4}$;

(f) $\log_a 125 = 3$;

Exercício 3.10.27 *Determine y em cada item:*

(a) $2^{\log_2 y} = 13$;

(b) $6^{\log_6 y} = 21$;

(c) $4^{\log_4 y} = 9$;

(d) $y^{\log_4 6} = 6$;

(e) $y^{\log_7 14} = 14$;

(f) $y^{\log_3 2} = 2$;

Exercício 3.10.28 *Determine x em cada item:*

(a) $5^{\log_5 7} = x$;

(b) $3^{\log_x 5} = 5$;

(c) $10^{\log_x 7} = 7$;

(d) $k^{\log_k 4} = x$;

(e) $7^{\log_x k} = k$;

(f) $8^{\log_8 x} = y$;

Exercício 3.10.29 *Efetue as expressões indicadas, simplificando-as o máximo possível.*

(a) $\ln e + \ln(1/e)$; *(b)* $\ln e^2 + e^{-\ln e}$; *(c)* $\ln(e \ln e) + \ln(\ln e)$; *(d)* $e^{-\ln\sqrt{e}}$;

Exercício 3.10.30 *Simplifique completamente as expressões:*

(a) $2\ln A - 3\ln B + \ln(AB)$; *(b)* $e^{2\ln A-(\ln B)/2}$; *(c)* $\ln(xe^{-\ln x})$; *(d)* $\ln(e^2 \ln(e \ln e))$;

Exercício 3.10.31 *Resolva as equações em x*

(a) $2^x = e^{x+1}$; *(b)* $2e^{3x} = 4e^{5x}$; *(c)* $4e^{2x-3} - 5 = e$; *(d)* $10^{x+3} = 5e^{7-x}$;

Exercício 3.10.32 *Nos itens a seguir, converta a função dada para a forma $P = P_o a^{kt}$.*

(a) $P = P_0 e^{0,2t}$ e $a = 2$; *(b)* $P = P_0 e^{0,917t}$ e $a = 3$; *(c)* $P = P_0 e^{-2,5t}$ e $a = 1,7$; *(d)* $P = P_0 e^{-\pi t}$ e $a = e^2$;

Exercício 3.10.33 *Converta as funções para a forma $P_o e^{kt}$, determinando quais representam crescimento e quais decaimento exponencial.*

(a) $P = P_0 2^t$; *(b)* $P = 10(1,7)^t$; *(c)* $P = 5,23(0,2)^t$; *(d)* $P = 174(0,9)^t$;

Exercício 3.10.34 *Resolva as seguintes equações para t:*

(a) $a = be^t$; *(b)* $ae^{kt} = e^{bt}$ com $k \neq b$; *(c)* $ce^{\alpha t} = be^{\gamma t/n}$;

Exercício 3.10.35 *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(a) A função f é crescente ou decrescente? Por quê?

(b) Verifique se f é inversível e, caso seja, calcule sua inversa;

(c) Qual o domínio de f^{-1}?

Exercício 3.10.36 *Determine o domínio da função $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 5x)$.*

Exercício 3.10.37 *Considere $m \in (0,1)$. Determine os valores de x que satisfazem a desigualdade*

$$\log_m(x^4 + m^4) \geq 2 + \log_m\left(\left(\frac{x}{2m}\right)^2 + m^2\right).$$

Exercício 3.10.38 *Qual é a diferença (se é que existe) entre $\ln(\ln(x))$, $\ln^2(x)$ e $(\ln(x))^2$?*

Exercício 3.10.39 *Se $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^x$, obtenha o valor e simplifique as expressões:*

(a) $f(1)$; *(d)* $f(x) + f(2)$; *(g)* $g(f(x))$;

(b) $f(2)$; *(e)* $f(g(x))$; *(h)* $f(x) + f(1 + x)$;

(c) $f(x) - f(x - 1)$; *(f)* $f(f(g(x)))$; *(i)* $g(g(f(x)))$;

Exercício 3.10.40 *Considere as funções*

$$senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad e \quad coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Com base nelas, calcule:

(a) $cosh(0)$ e $cosh(1)$;

(b) $senh(0)$ e $senh(1)$;

(c) $cosh(\ln x)$ e $senh(\ln x)$;

(d) $\dfrac{senh(x)}{cosh(x)}$;

(e) $senh(-x)$ e $cosh(-x)$;

(f) $senh^2(x) + cosh^2(x)$;

Exercício 3.10.41 *Uma das componentes principais de uma contaminação nuclear, como a de Chernobyl, é o estrôncio-90, que decai exponencialmente a uma taxa contínua de aproximadamente 2,47% ao ano. Estimativas preliminares, após o desastre de Chernobyl, sugeriram que levaria uns 100 anos até que a região fosse novamente segura para a habitação humana. Que percentual do estrôncio-90 original ainda permaneceria após esse tempo?*

Exercício 3.10.42 *A meia-vida do rádio-226 é de* 1620 *anos.*

(a) *Obtenha uma fórmula para a quantidade Q de rádio que resta após t anos, dado que a quantidade inicial é Q_0;*

(b) *Que percentual da substância resta após* 500 *anos?*

Exercício 3.10.43 *Nos Jogos olímpicos de 1968, nos arredores da Cidade do México, houve muita discussão a respeito do efeito da grande altitude* (2237 *metros) poderia causar aos atletas. Presumindo-se que a pressão atmosférica decaia exponencialmente em* $0,4\%$ *a cada* 30 *metros, de que percentual fica reduzida a pressão atmosférica ao se deslocar do mar até a Cidade do México?*

Exercício 3.10.44 *Uma certa substância radioativa decai exponencialmente de tal modo que, após* 10 *anos, ainda restam* 70% *da quantidade inicial. Obtenha uma expressão para a quantidade que ainda resta após um número t qualquer de anos. Que quantidade ainda restará após* 50 *anos? Qual a meia-vida? Quanto tempo é preciso para que reste somente* 20% *da quantidade inicial? E para que reste somente* 10%?

Exercício 3.10.45 *O* período de duplicação *é o tempo necessário para que uma grandeza que cresce exponencialmente dobrar seu valor. Calcule o período de duplicação de preços que estão subindo a uma taxa de 5% ao ano.*

Exercício 3.10.46 *A população de uma certa região cresce exponencialmente. Se em 1990 ($t = 0$) havia 40 000 pessoas em uma cidade em 2000 esse número subiu para 46 000 pessoas, encontre uma fórmula para a população em qualquer instante t. Qual será a população em 2020? E o período de duplicação?*

Referências Bibliográficas

[1] Edgar de Alencar Filho, *Teoria Elementar dos Conjuntos*, Livraria Nobel, 1976.

[2] Elon lages Lima, *Números e Funções Reais*, SBM, 2014.

[3] Geson Iezzi, Carlos Murakami, *Fundamentos de Matemática - Vol 1, 2, 3, 6*, Atual, 2013.

[4] Ivan Niven., *Números: Racionais e Irracionais*, SBM, 2012.

[5] Roberto Romano, *Cálculo Diferencial e Integral*, Atlas, 1983.